

11a Lezione

- **La sezione d'urto di Rutherford: approccio classico**
- **Risultati dell'esperimento di Rutherford**
- **Approccio quantistico e sezione d'urto di Rutherford**
- **Sezione d'urto di Mott**

Sezione d'urto di Rutherford

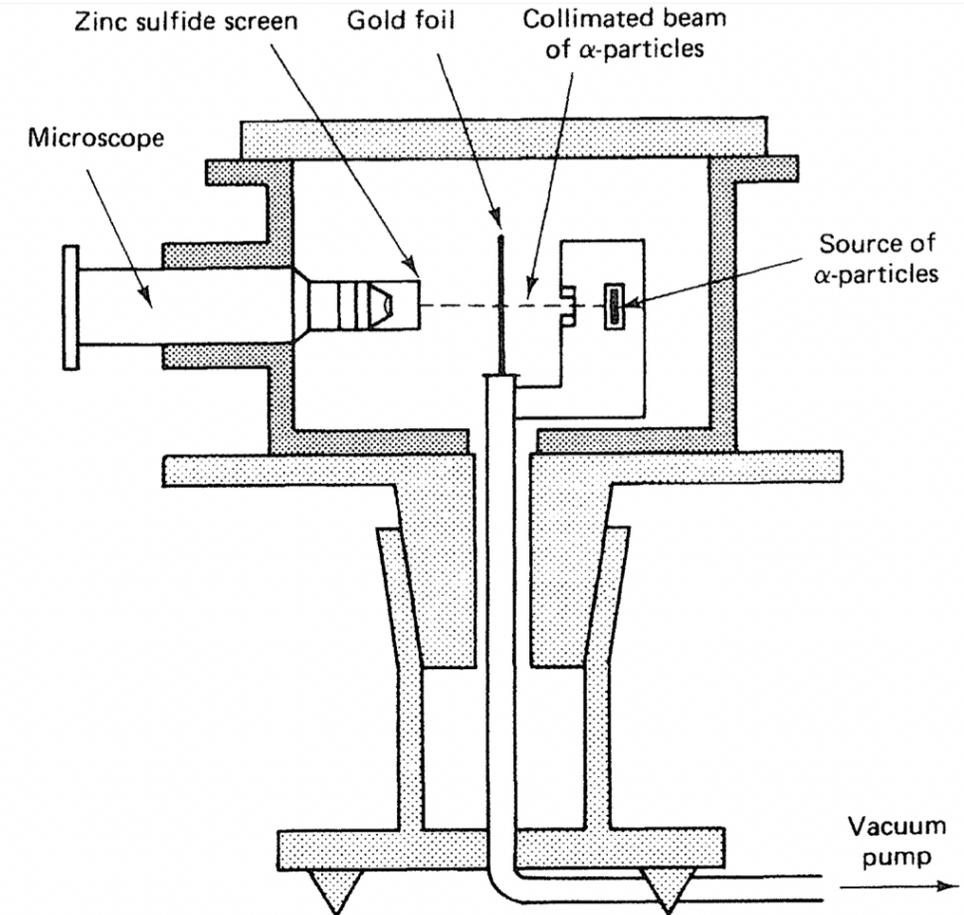
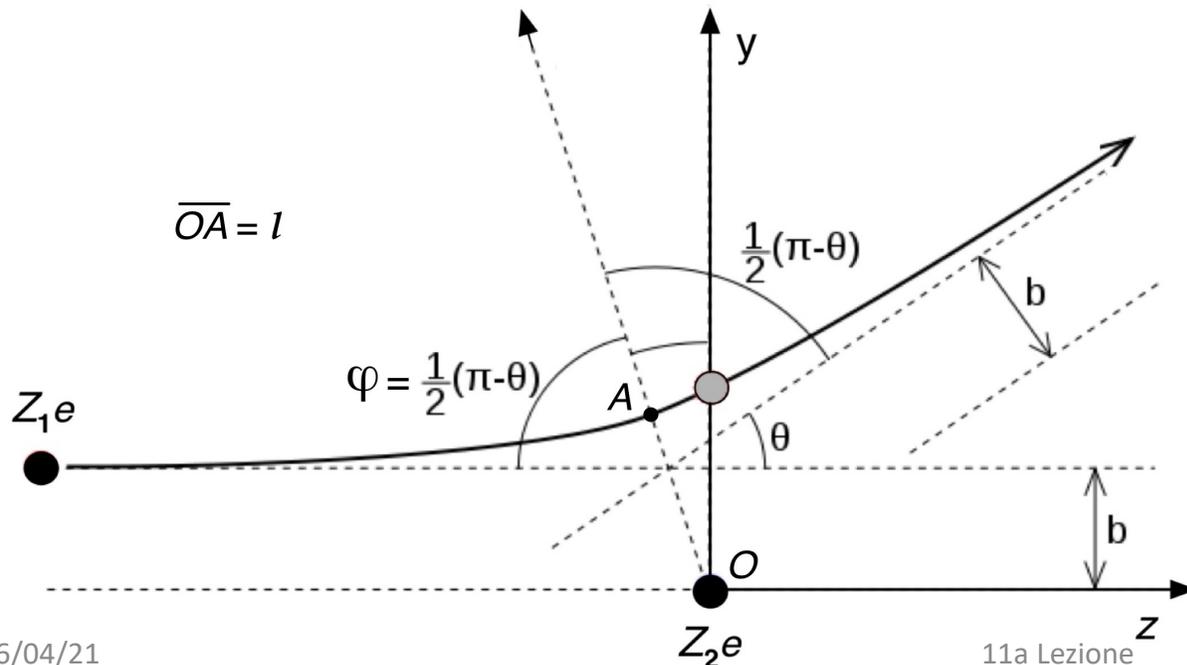
- ▶ Deflessione di particelle cariche su un nucleo di carica Z_2e .
- ▶ Per semplificare si suppongano **solo** interazioni elettromagnetiche.

Rutherford → α incidono su bersagli di sottili fogli d'oro.

α deflesse osservate e contate con microscopio tramite lampi di fluorescenza su schermo di solfuro di zinco.

Classicamente: particelle incidenti di carica Z_1e e massa m , su un nucleo di carica Z_2e e massa $M \gg m$.

- ▶ Si trascura quindi il rinculo del nucleo bersaglio dopo l'urto.



Apparato di Geiger & Mardsen

$V = Z_2 e / (4\pi\epsilon_0 r)$ è il potenziale, **centrale kepleriano**, generato da centro diffusore con $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$, v è modulo della velocità d'avvicinamento del proiettile. b è detto **parametro d'urto**. La traiettoria è un'iperbole, dato che $E_{tot} > 0$.

Problema classico: determinare l'angolo ϑ di deflessione della traiettoria della particella in funzione di b , ovvero $\vartheta(b)$.

Si procede determinando l'inverso, ovvero $b(\vartheta)$.

Si suppongano, senza perdere in generalità, **forze repulsive**. Da **conservazioni del momento angolare e dell'energia totali** si ha

$b = \frac{lv_A}{v}$, $v^2 = v_A^2 + \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 ml}$. Ponendo $l_0 = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_k}$, che fissata E_k , corrisponde al punto di max. avvicinamento possibile A^* per un urto centrale, si ha $v^2 = v_A^2 + v^2 \frac{l_0}{l}$. E ancora $v_A^2 = \frac{b^2}{l^2} v^2$, $v_A^2 = v^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$

$b^2 = l^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$ ed $l = b \cotg \frac{\varphi}{2}$, come proprietà geometrica dell'iperbole. **Con un po' di trigonometria e sostituendo**

s'ottiene infine $l_0 = 2 b \cotg \varphi$, da cui quanto cercato:

$$b(\vartheta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg \frac{\vartheta}{2}$$

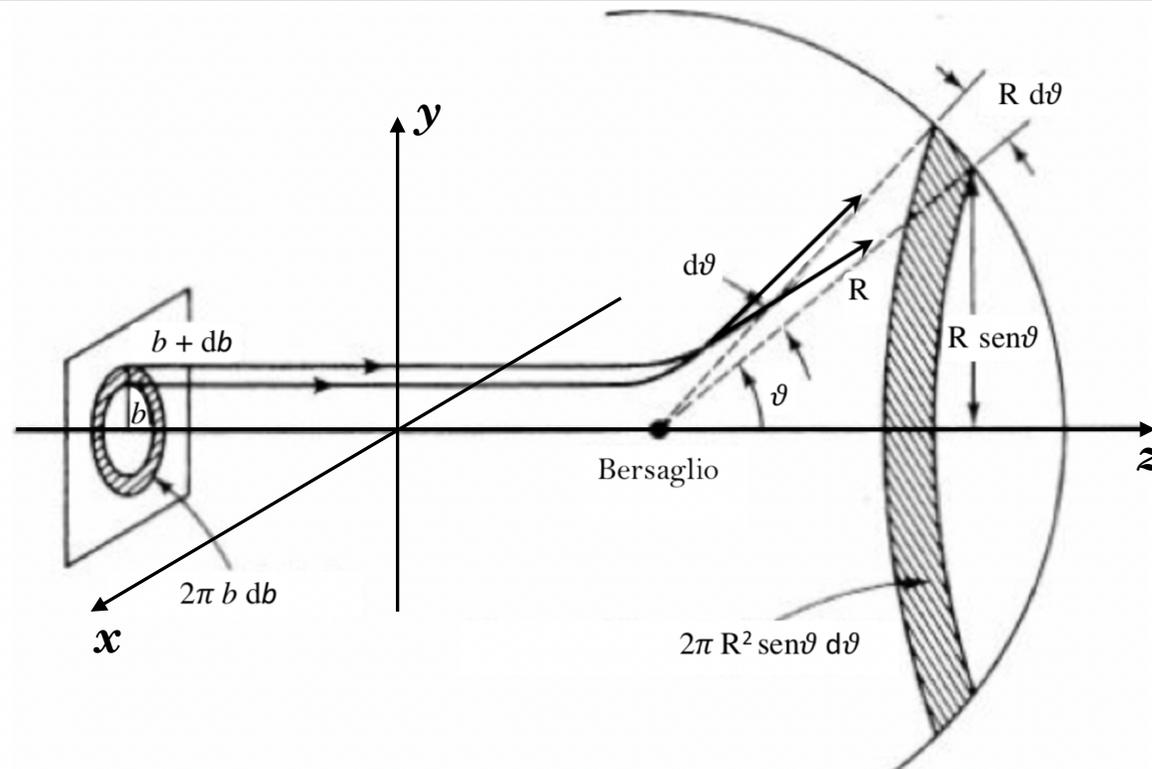
- n_0 proiettili che a distanza ∞ dal bersaglio attraversano unità di superficie del piano (x,y) nell'unità di tempo;
- $dN = 2\pi n_0 b db$ il loro numero che nell'unità di tempo, attraversa l'anello circolare fra b e $b+db$.

Se il numero di particelle si conserva, quelle diffuse nell'angolo solido fra ϑ e $\vartheta+d\vartheta$ saranno

$$|db(\vartheta)| = \left| \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} d\left(\cotg\frac{\vartheta}{2}\right) \right| = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \frac{d\vartheta}{2 \sin^2\vartheta/2}$$

Sostituendo in dN e ricordando che $d\Omega(\vartheta) = 2\pi \sin\vartheta d\vartheta$,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} &= \frac{1}{n_0} \frac{dN(\vartheta)}{d\Omega(\vartheta)} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cotg\vartheta/2}{2 \sin\vartheta \sin^2\vartheta/2} = \\ &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cos\vartheta/2}{2 \sin^3\vartheta/2 \cdot 2 \sin\vartheta/2 \cos\vartheta/2} = \\ &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\vartheta/2} \end{aligned}$$



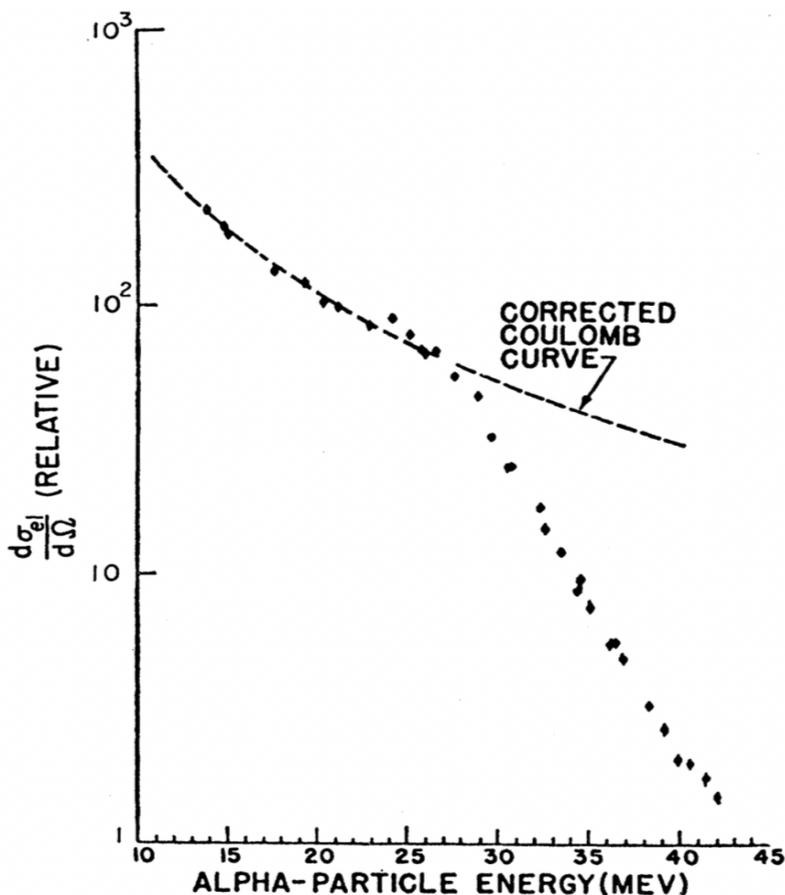
ovvero la **sezione d'urto di Rutherford, indipendente dai segni delle cariche.**

► La sez. d'urto coulombiana totale, ottenuta integrando su tutto l'angolo solido, ha però valore $\infty \rightarrow$ **non ha senso fisico.** Si considera $V(\mathbf{r}) \propto 1/r$ solo fino a certi r : aumentando b le particelle incidenti sentono sempre più gli effetti degli e atomici e delle altre strutture cariche del bersaglio che schermano la carica $Z_2 e$ del diffusore.

► Considerando centro diffusore non puntiforme ma sferico di raggio r_0 , se $l_0 > r_0$, la traiettoria del proiettile è tutta esterna alla regione ove è distribuita la carica bersaglio, e la relazione fra \mathbf{b} e ϑ resta invariata, come $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$.

Per $l_0 < r_0$, con energie cinetiche $E_k > E_{k,0} = Z_1 Z_2 e^2 / (4\pi\epsilon_0 r_0)$, l'effetto della spazialità della carica diffondente si percepisce solo per $\vartheta >$ di un valore limite ϑ_0 tale che

$$r_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg \frac{\vartheta_0}{2}$$



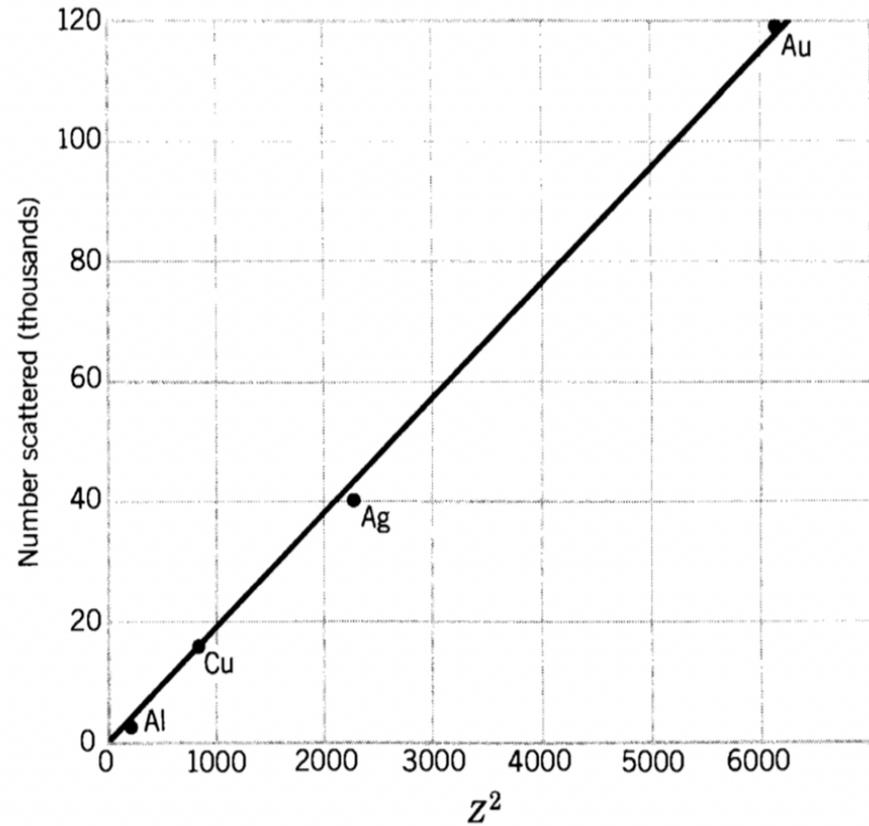
► L'osservazione sperimentale delle deviazioni a grandi angoli nella sez. d'urto, confrontata con previsioni per bersagli puntiformi, permette di stimare r_0 . Bisogna anche tener conto delle dimensioni finite del proiettile.

Rutherford lo aveva intuito e pensava giustamente che l'effetto delle dimensioni nucleari si sarebbe dovuto manifestare, al crescere dell'energia cinetica delle α incidenti, con una deviazione della sezione d'urto da quella ottenuta considerando esclusivamente l'interazione coulombiana.

$d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ dalla reazione $\alpha + {}^{197}\text{Au}$, per $\vartheta = 60^\circ$ a energie crescenti.

Oltre 27 MeV i dati si scostano dall'andamento coulombiano.

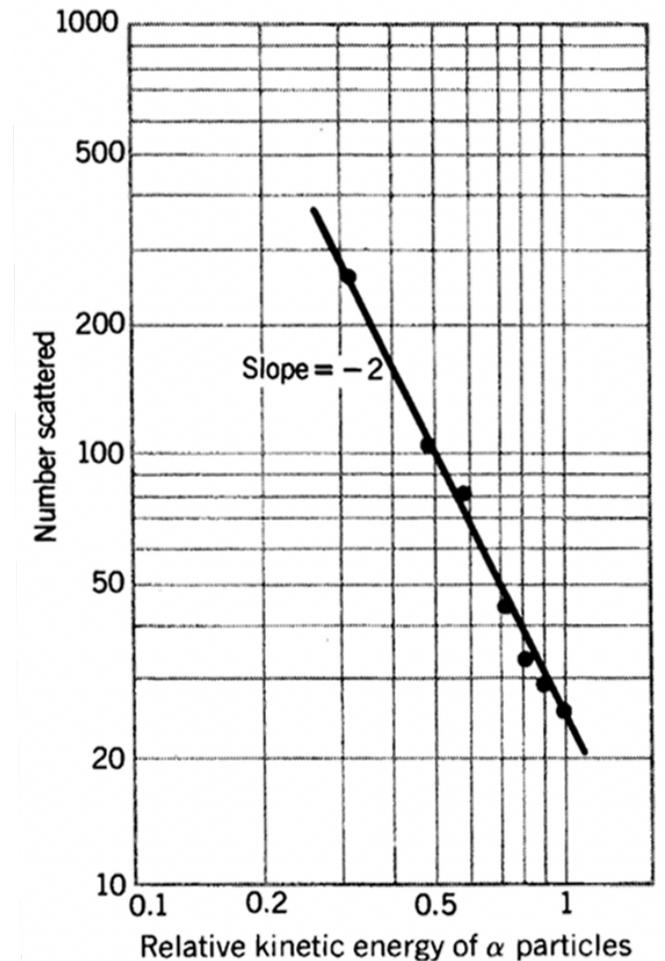
Risultati dell'esperimento di Rutherford, Geiger, Mardsen

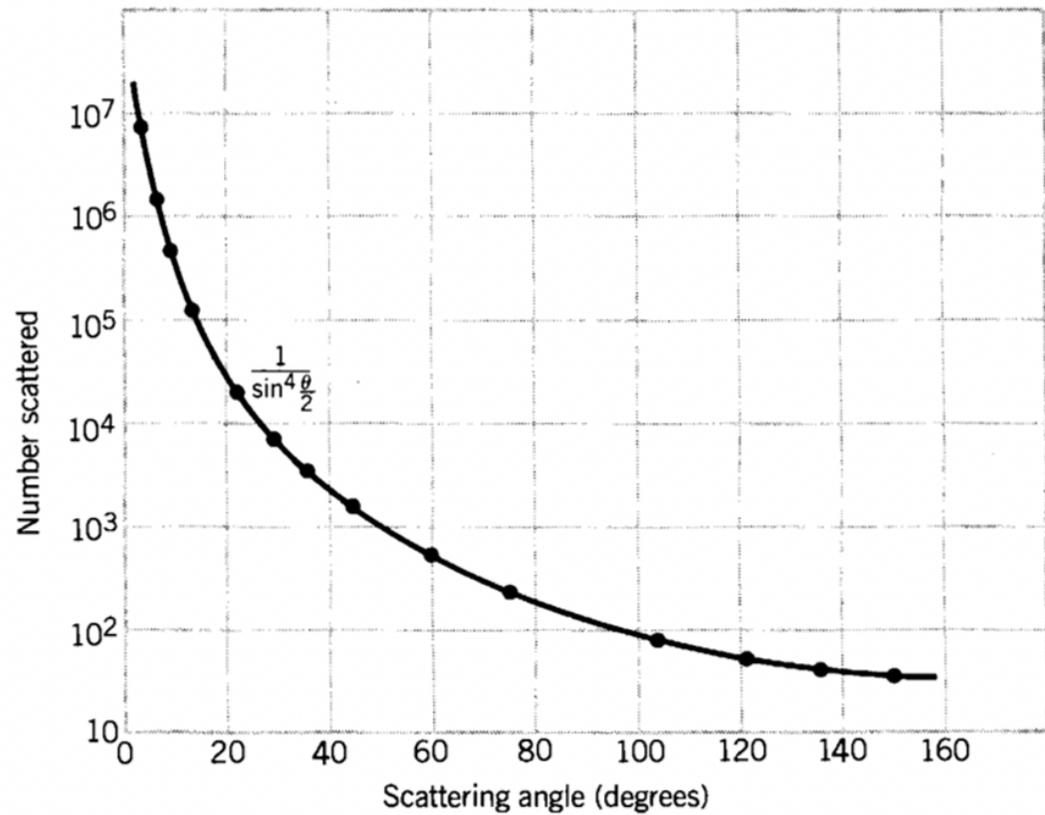


Dipendenza del **rateo di diffusione** da Z^2 del bersaglio.
Andamento conferma previsioni formula di Rutherford.

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\vartheta/2}$$

Dipendenza del **rateo di diffusione** da $E_{k,\alpha}$, per α incidenti su un **bersaglio sottile**.
Conferma previsioni formula di Rutherford.

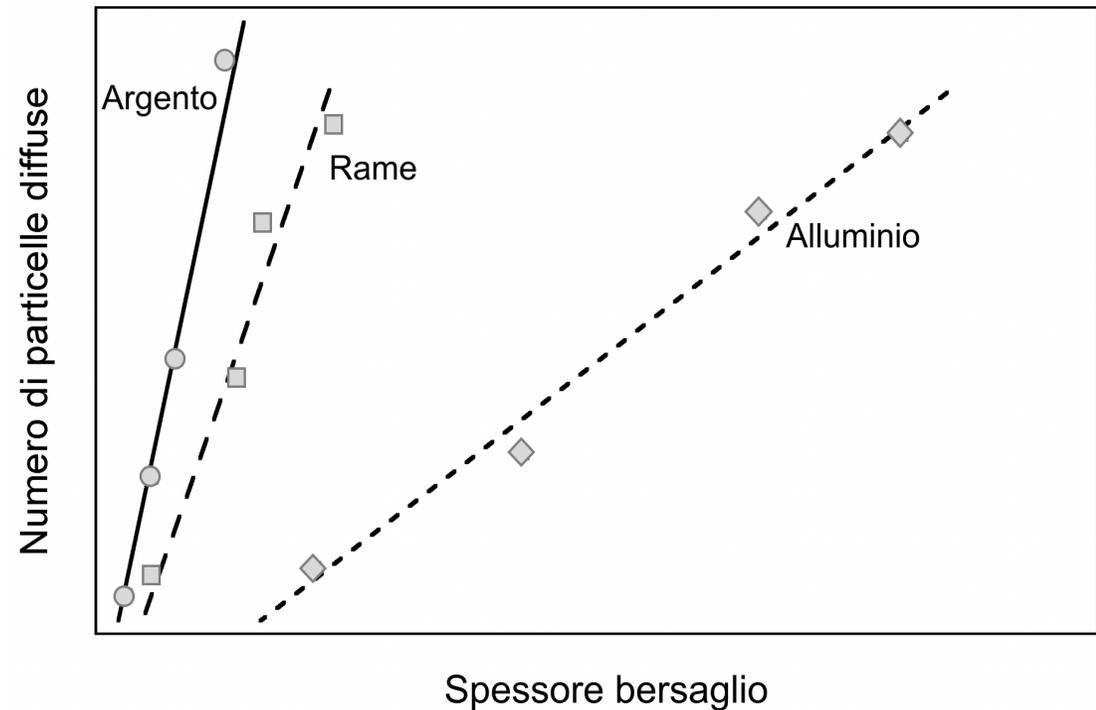




Dipendenza da ϑ del **rateo di diffusione** per sottile bersaglio d'oro.

Conferma previsioni della formula di Rutherford.

Per le **diffusioni multiple** ci si aspetta che numero di particelle diffuse a un angolo $\vartheta > 1^\circ$, per diversi spessori Δz del bersaglio, vari $\propto \sqrt{\Delta z}$, ma dovrebbe variare $\propto \Delta z$ per **diffusioni singole**, poiché prob. di subire singole deviazioni a grande angolo cresce \propto al numero dei bersagli in grado di produrre tali deviazioni, **come si vede dai dati sperimentali in figura.**



Approccio quantistico al concetto di sezione d'urto

- ▶ **Tasso di reazioni:** fissate **intensità fascio** e **densità centri diffusori**, dipende da **proprietà del potenziale d'interazione** e dal **numero di stati finali**.
- ▶ **Si utilizza la Regola d'oro n. 2.** Corrispondente **elemento della matrice di transizione**, (*ampiezza di probabilità per la transizione*) :

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \mathcal{H}_{int} \psi_i \, dV$$

Tutto lo spazio

Stati finali dipendono da **spazio delle fasi**, spazio **6-dimensionale** di **coordinate** e **impulsi**. Dal principio di indet., ogni particella occupa un **volume** $h^3 = (2\pi\hbar)^3$. Il numero di possibili celle dello spazio delle fasi è quindi dato dal **rapporto** fra il **volume di questo** ed h^3 .

Volume = (contributo spaziale V in cui diffusa particella) \otimes (contributo spazio impulsi $4\pi p'^2 dp'$ (guscio sferico)).

- ▶ Trascurando lo **spin** il numero finale di stati disponibili è quindi:

$$dn(p') = \frac{V 4\pi p'^2}{(2\pi\hbar)^3} dp'$$

Se urti avvengono nel tempo t : $V = v_a t A = \frac{\Phi_a t}{n_a} = \frac{N_a}{n_a}$

A sezione retta del fascio, v_a modulo velocità di ogni particella del fascio, N_a la totalità particelle nel fascio, Φ_a ed n_a l'intensità del loro flusso e loro densità, supposte **uniformi**.

- ▶ **Energia totale** e **impulso** di una particella sono legate dalla relazione: $dE' = v' dp'$

Densità stati finali nell'intervallo energetico dE' :

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{4\pi p'^2 V}{v' (2\pi\hbar)^3}$$

Regola d'oro n. 2 \rightarrow tasso W di reazione per particella bersaglio e particella incidente :

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_b N_a}$$

Sostituendo : $W = \frac{dN(E)/dt}{N_b N_a} = \frac{\sigma v_a}{V}$, e per la sezione d'urto:

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_a} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho(E') V$$

Nota pot. d'interazione si calcola la sez. d'urto. Dalla misura della sez. d'urto si può ottenere l'elemento di matrice M_{fi} .

Si può ora ricalcolare la sez. d'urto di Rutherford quantisticamente. Punti salienti:

- Proiettile e bersaglio puntiformi di cariche Z_1e e Z_2e , trascurando spin e rinculo bersaglio si può utilizzare 3-impulso , e se $Z_2\alpha \ll 1$, si può applicare **approssimazione di Born**.
- Funzioni d'onda dei proiettili negli stati iniziale e finale: **onde piane**.
- **Urto elastico**.
- Volume normalizzazione V abbastanza esteso da considerare **schermaggio** della carica bersaglio (cut-off all' ∞) .

Da **Regola d'oro n. 2**: $\frac{\sigma v_a}{V} = W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{dn}{dE_f}$, $E_f =$ en. tot. di stato finale.

Per ipotesi il solo effetto della diffusione da potenziale coulombiano è la deflessione elastica di un angolo ϑ fra gli impulsi iniziale e finale della particella incidente.

Per energie cinetiche molto alte $\rightarrow v_a \simeq c$ e $|\vec{p}_f| \simeq E_f/c$, da cui $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{4\pi^2 c^4 \hbar^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2$

Per l'elemento della matrice di transizione si ha infine:
$$\sigma(\vartheta) = \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\mathcal{M}(\vec{q})|^2 = \frac{E_f^2}{(2\pi)^2 c^4} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\epsilon_0^2 |\vec{q}|^4}$$
$$= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4E_f^2}{p^4 c^4} \frac{1}{\text{sen}^4 \vartheta / 2}$$

I limiti **relativistico** e **non relativistico** danno rispettivamente:

Rel. $\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_f} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4 \vartheta / 2}$ e $\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4 \vartheta / 2}$ Non rel.

Limite non relativistico corrisponde a risultato classico e non dipende dall'aver utilizzato approssimazione di Born.