12a Lezione

- Sezione d'urto di Mott
- Fattori di forma

Rutherford: $\boxed{\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{sen}^4\vartheta/2}}$ Non rel.

La sezione d'urto di Mott _

Finora, solo per motivi di semplificazione, si sono **trascurati i ruoli di spin e mom. ang. orbitale**.

Tenendone conto, come è giusto e in certi casi anche indispensabile, si ottiene per la sez. d'urto di diffusione coulombiana, un risultato, **sezione d'urto di Mott** che trascurando il rinculo del nucleo bersaglio, per l'interazione ***e*–nucleo** si scrive :

$$\frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Ruth}(\vartheta)}{d\Omega}\left(1-\beta^2 \mathrm{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

► **Sez. d'urto di Mott, al crescere di v, cala più rapidamente di quella di Rutherford, con l'angolo ϑ di diffusione**.

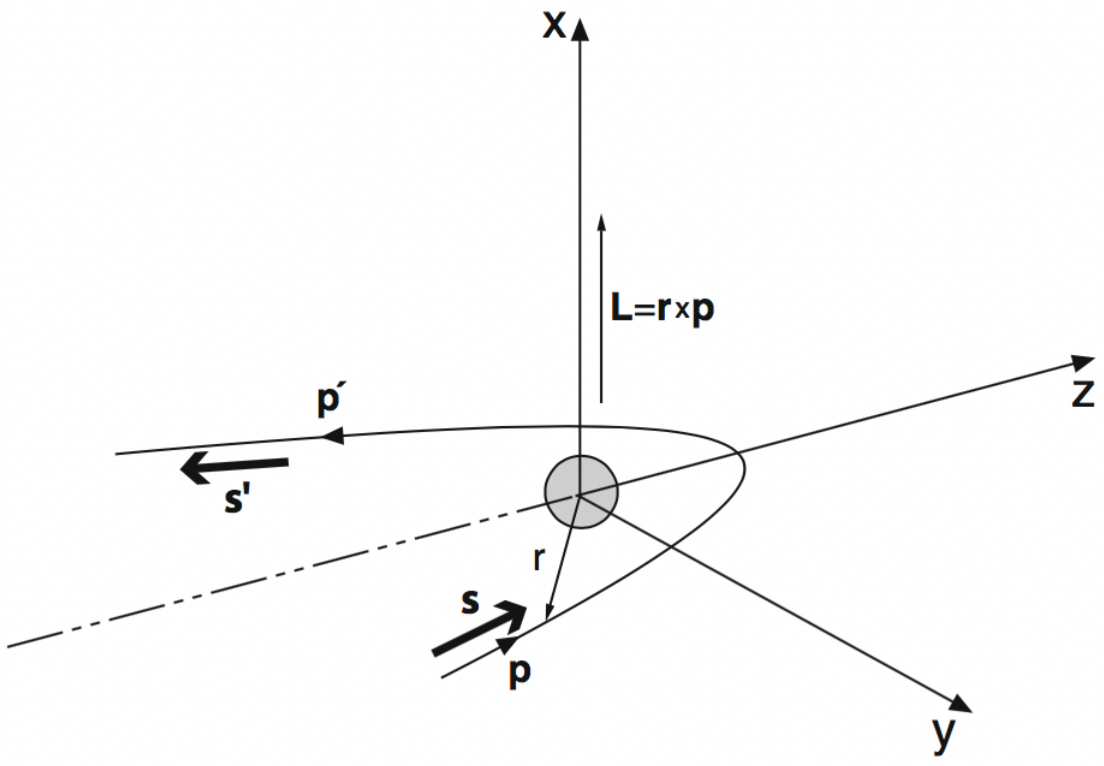
Nei casi **fortemente relativistici** $\beta = v/c \to 1$ e $\frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \frac{d\sigma_{Ruth}(\vartheta)}{d\Omega}\cos^2\frac{\vartheta}{2}$

Considerando il **fattore di forma**, si ha quindi, per la sez. d'urto coulombiana di un **bersaglio esteso** :

$$\frac{d\sigma_{Coul}(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega}\left|F(\vec{q})\right|^2$$

Non deduciamo sez. d'urto di Mott, ma cerchiamo di capirla **nel limite d'un urto con diffusione all'indietro**, a π radianti.
Si introduce **elicità** H : proiezione dello spin $\vec{s}$ lungo la direzione del moto rappresentata dal versore $\vec{p}/\,|\vec{p}\,|$:

$$H = \frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{|\vec{s}\,|\;|\vec{p}\,|}$$



Equazione di Dirac → H si conserva. Considerando la condizione d'urto in figura, la proiezione dello spin sull'asse z dovrebbe cambiar segno con l'urto, ma è impossibile con un bersaglio di spin nullo, per **conservazione del mom. ang. totale.**
Il mom. ang. orbitale $\vec{L}$ è infatti $\perp$ a z e non può quindi determinare modifiche nella componente z del mom. angolare.

La diffusione a π rad. di particelle relativistiche dovrebbe quindi essere soppressa (sperim. confermato).

Se però il bersaglio ha **spin** $\neq 0$, la proiezione dello spin dell' e può essere modificata durante la diffusione a π rad., e la conservazione del mom. ang. trova compensazione nel concomitante cambiamento di direzione dello spin del bersaglio.

Fattore di forma _ Se $Z_2 e$ **non** puntiforme e a simm. sferica, il potenziale, conglobando anche la carica $Z_1 e$ è

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d\vec{r}\,'$$ con $\int \rho(\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,' = 1$, dato che $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ è invariante per traslazione.

La matrice di transizione diventa :

$$\mathcal{M}(\vec{q}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar}\, d\vec{r} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d\vec{r}\,'$$

$$= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{D}/\hbar}}{D}\, d\vec{D} \int \rho(\vec{r}\,')\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}\,'/\hbar}\, d\vec{r}\,'$$

$F(\boldsymbol{q})$

il cui secondo integrale, indicato con $F(\vec{q})$, è la **trasformata di Fourier** della distribuzione di densità di carica elettrica, e viene detto **fattore di forma** della distribuzione di carica.

La sez. d'urto di diffusione coulombiana per una carica estesa si scrive:

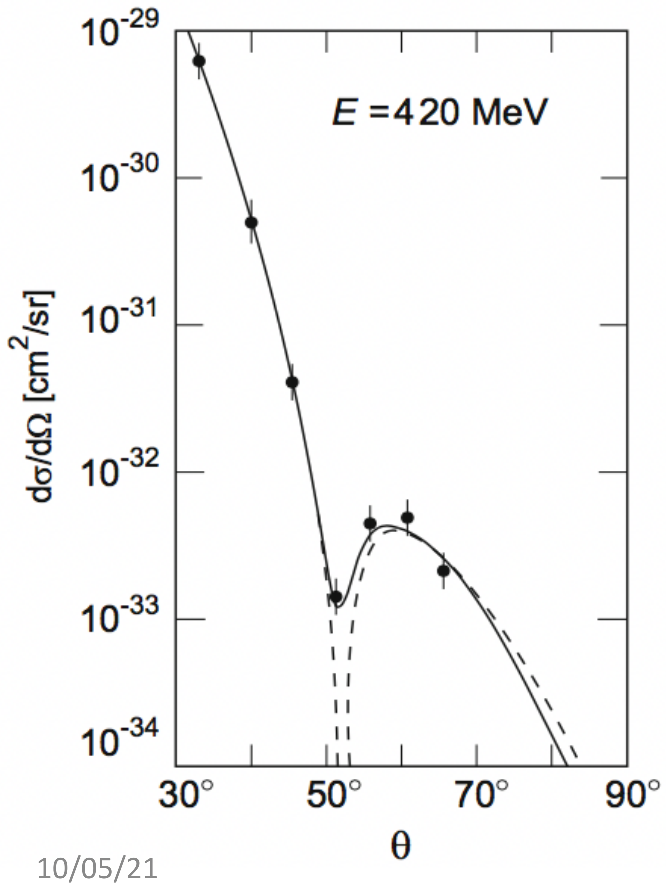
$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{4E_f^2}{(pc)^4} \frac{1}{\mathrm{sen}^4\frac{\vartheta}{2}} |F(\vec{q})|^2$$

- **Ciò vale solo in approssimazione di Born.**
- Diversamente da caso classico, in cui sez. d'urto per carica puntif. ed estesa coincidono per ogni angolo $\vartheta < \vartheta_0$, nel caso quantistico esse coincidono **solo** per $\vartheta = 0$, cioè $|\vec{q}| = 0$.

Misure fattori di forma (elettrici)

Misurare $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ in funzione dell'imp. trasferito $|\vec{q}|$ equivale a farlo in funzione di ϑ o dell'energia dei proiettili, quindi di $|\vec{p}|$, e da' i valori dei fattori di forma per i medesimi valori di $|\vec{q}|$. Interpolando si può ricavare $F(\vec{q}^{\,2})$ come funzione continua. invertendola si ha la distribuzione di carica, ma invertire la trasf. di Fourier richiede di conoscere $F(\vec{q}^{\,2})$ per ogni valori di $|\vec{q}|$.

► Finitezza di E_k disponibile nel canale d'ingresso, limita però superiormente i valori di $|\vec{q}|$ esplorabili.



Risultati sulla distribuzione di carica per valori $r > R \sim 2\pi\hbar/\,|\vec{q}|_{max}$, mentre per $r < R$ dipende dall'ipotesi fatta per estrapolare $F(\vec{q}^{\,2})$ con $|\vec{q}| \to \infty$.

Dal 1953, Hofstadter ➔ campagna misure diffusione di e^- su nuclei e nucleoni.

In figura sez. d'urto differenziale elastica con e^- da $420\ \mathrm{MeV}$ su $^{12}\mathrm{C}$.

Linea tratteggiata → calcolo con onde piane incidenti su una distribuzione sferica e omogenea di carica con superficie diffusa, in approssimazione di Born; linea continua è risultato di un fit sui dati sperimentali.

Si noti andamento diffrattivo, con minimo in $\vartheta \simeq 51^{\mathrm{o}}$, associato al fattore di forma.

In tabella i fattori di forma calcolati per alcune specifiche forme analitiche della distribuzione di carica e in figura ne sono illustrati gli andamenti.
Si ricordi che tutto è comunque sempre legato all'energia del proiettile, e quindi alla lunghezza d'onda di De Broglie ad esso associata

Distrib. carica	$f(r)$	$F(\vec{q}^{\,2})$	
Puntif.	$\delta(r)/4\pi$	1	Cost.
Espon.	$(a^3/8\pi)\cdot e^{-(ar)}$	$(1+\vec{q}^{\,2}/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipol.
Gauss.	$(a^2/2\pi)^{3/2}\cdot e^{-(a^2r^2/2)}$	$e^{-(\vec{q}^{\,2}/2a^2\hbar^2)}$	Gauss.
Sfera omog.	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{per } r \le R \\ 0 & \text{per } r > R \end{cases}$	$\begin{cases} 3\alpha^{-3}(\text{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha) \\ \text{con } \alpha = \lvert\vec{q}\,\rvert R/\hbar \end{cases}$	Oscill.