

Corso di Laurea in LOGOPEDIA

# FISICA ACUSTICA

# MOTO OSCILLATORIO

**Fabio Romanelli**

Department of Mathematics & Geosciences

University of Trieste

Email: [romanel@units.it](mailto:romanel@units.it)

# Oscillazione

Un'oscillazione è la variazione, tipicamente nel tempo, di qualche misura attorno a un valore centrale (spesso un punto di equilibrio) o tra due o più stati diversi.

Il termine **vibrazione** si usa in maniera più specifica per indicare un'oscillazione meccanica, anche se spesso viene usato come sinonimo di "oscillazione".

## Fisica

Qualsiasi moto che si ripete dopo un intervallo di tempo

## Ingegneria (sistemi meccanici)

Descrive la relazione tra le  
**forze** e il **moto** oscillatorio dei corpi

# Descrizione delle oscillazioni

---

**Sistema fisico**

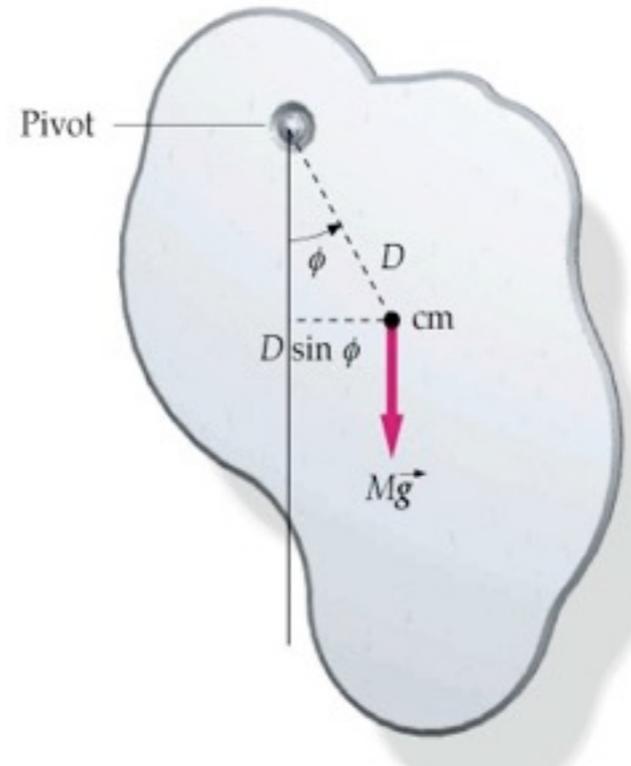


# Descrizione delle oscillazioni

Sistema fisico

Modello

Modello realistico



# Descrizione delle oscillazioni

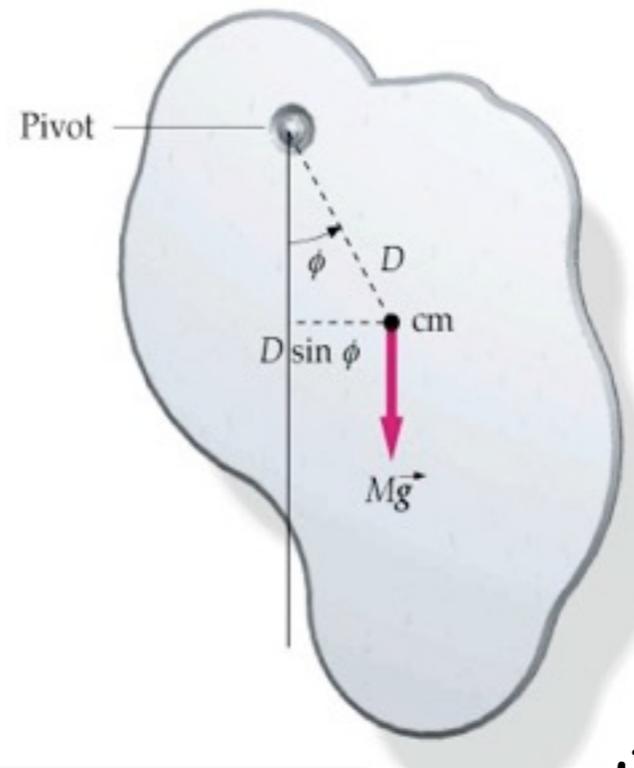
Sistema fisico

Modello

Modello realistico

Legge fisica

Modello matematico



$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{MgD}{I}\phi$$

# Descrizione delle oscillazioni

Sistema fisico

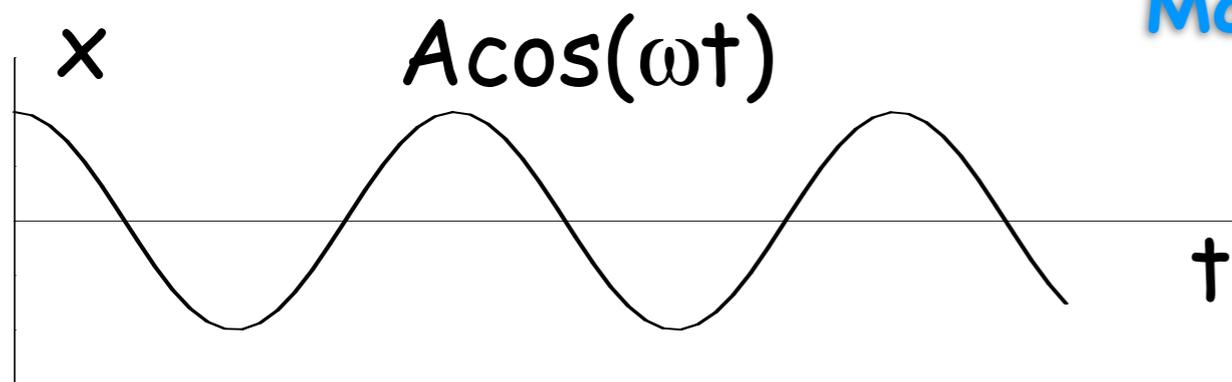
Modello

Modello realistico

Legge fisica

Modello matematico

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{MgD}{I}\phi$$



Matematica

Soluzione mat.

# Moto oscillatorio (armonico)

---

Il moto di un oggetto può essere predetto se sono note le forze che agiscono su di esso.

Un caso speciale di moto avviene quando la forza agente è proporzionale allo spostamento dell'oggetto dalla posizione di equilibrio.

Se questa forza agisce sempre **verso la posizione di equilibrio** il moto avverrà sempre attorno a questa posizione (equilibrio stabile).

Questo caso è noto come moto **periodico** o **oscillatorio**.

# Esempi di moti oscillatori

---

1. Pendolo
2. Massa attaccata a una molla
3. Vibrazioni di uno strumento a corde

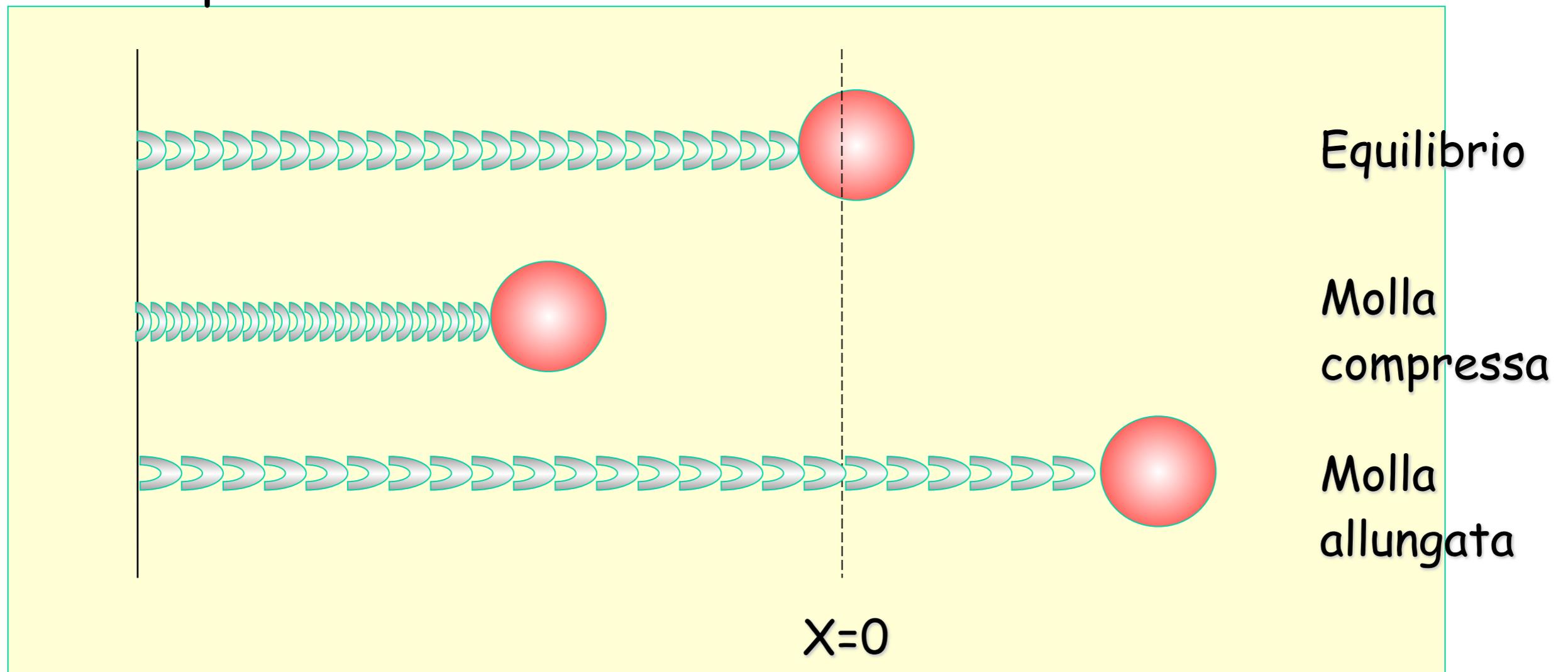
## Altri esempi

1. Molecole d'aria in un'onda sonora armonica
2. Molecole in un solido
3. Corrente elettrica alternata

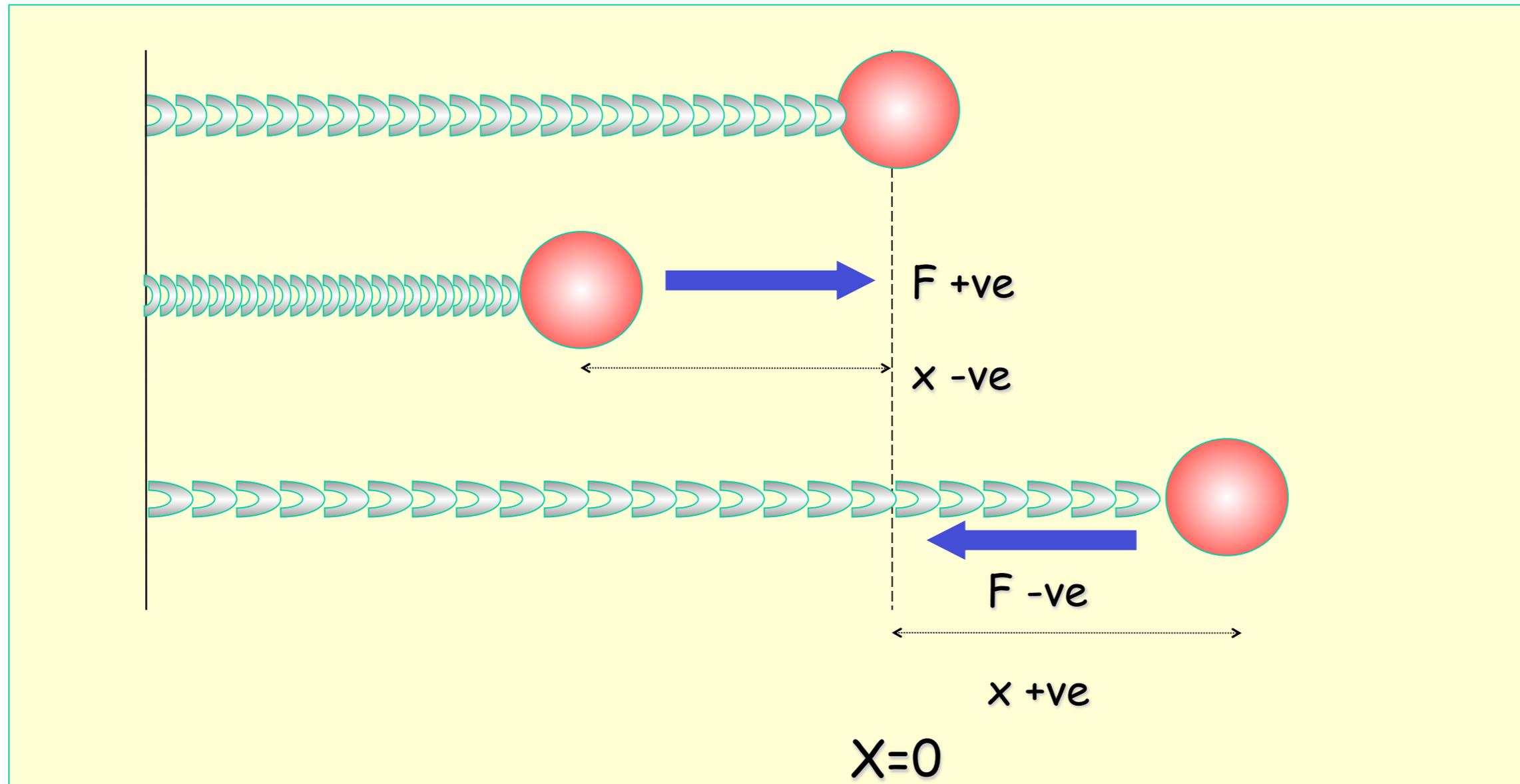
# Moto Armonico Semplice

Se un oggetto oscilla tra due posizioni per un indefinito periodo di tempo senza perdite di energia meccanica il moto è detto **simple harmonic motion (SHM)** o **moto armonico semplice**.

Esempio: massa connessa con una molla.



# Legge di Hooke



La molla esercita una forza sulla massa per ripristinare la condizione iniziale di equilibrio

$$F \propto -x \quad \text{or} \quad F = -k x \quad (\text{Legge di Hooke})$$

dove  $k$  è una costante positiva (+ve), la **costante della molla**

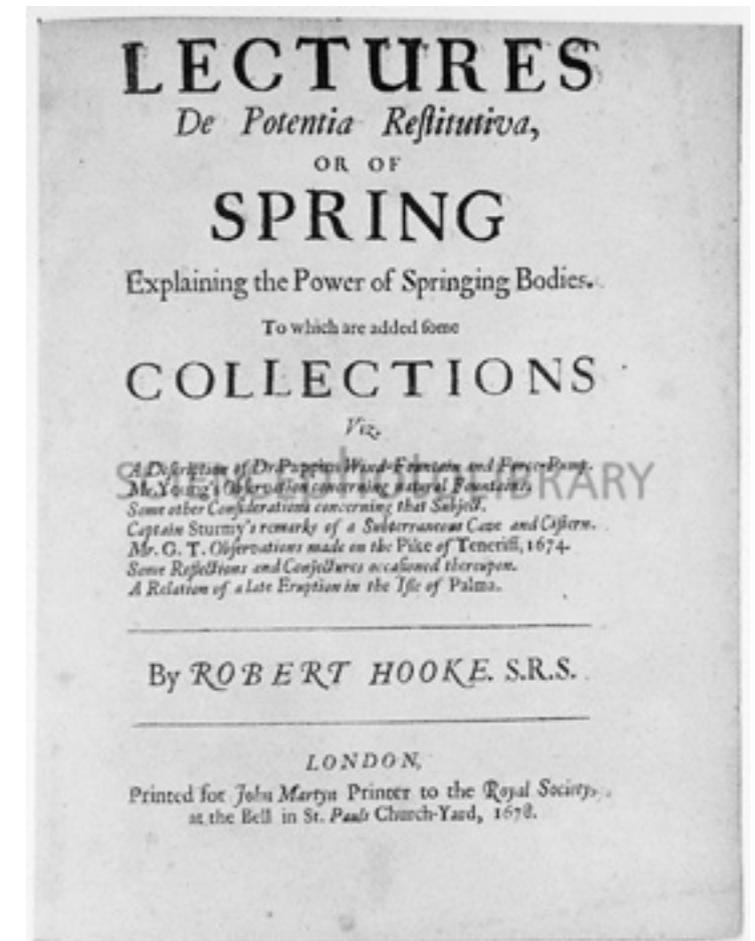
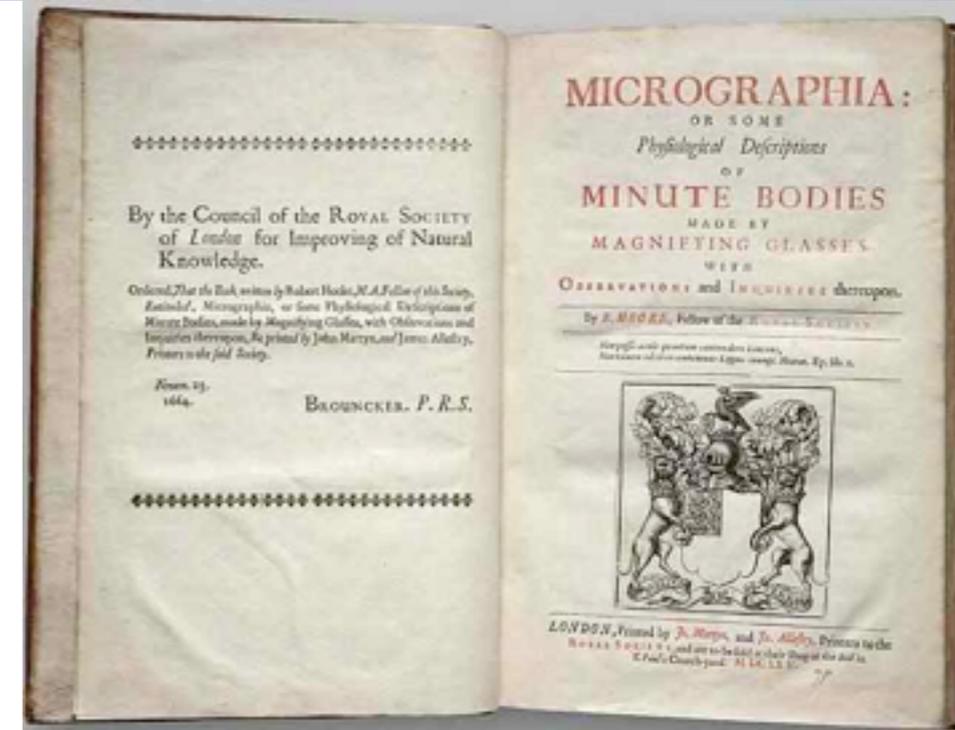
# Hooke's law

Although Robert Hooke's name is now usually associated with elasticity and springs, he was interested in many aspects of science and technology. His most famous written work is probably the *Micrographia*, a compendium of drawings he made of objects viewed under a magnifying glass.

ceiinosssttuu

It's an anagram. In the time before patents and other intellectual property rights, publishing an anagram was a way to announce a discovery, establish priority, and still keep the details secret long enough to develop it fully. Hooke was hoping to apply his new theory to the design of timekeeping devices and didn't want the competition profiting off his discovery.

1678: "About two years since I printed this Theory in an Anagram at the end of my Book of the Descriptions of Helioscopes, viz. ceiinosssttuu, that is **Ut tensio sic vis.**"



# Equazione del MAS

Dalla 2a legge di Newton:

$$F=ma$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Questa è la condizione per il moto oscillatorio semplice

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Un oggetto si muove con moto oscillatorio armonico semplice (SHM) quando l'accelerazione è proporzionale all'opposto dello spostamento.

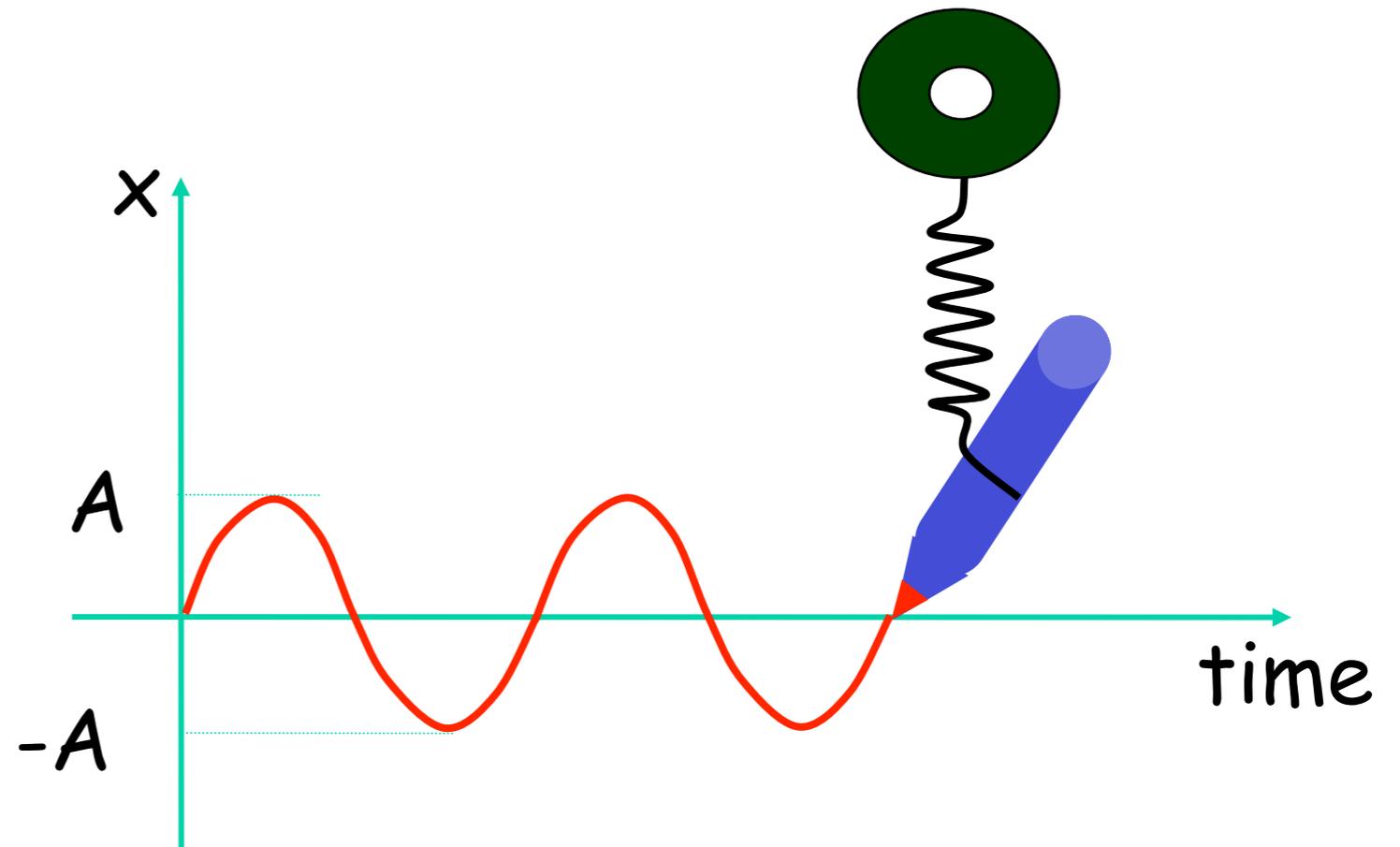
**Alcune definizioni:**

Il tempo impiegato per compiere un'oscillazione completa è il **periodo T**.

La **frequenza di oscillazione**,  $f = 1/T$  in  $s^{-1}$  o Hertz

La distanza dall'equilibrio allo spostamento massimo è l'**ampiezza di oscillazione, A**.

Si consideri:



L'equazione generale per il moto descritto dalla penna è

$$x = A \cos (\omega t + \delta)$$

dove  $(\omega t + \delta)$  è la **fase** del moto

e  $\delta$  è la **costante di fase**

---

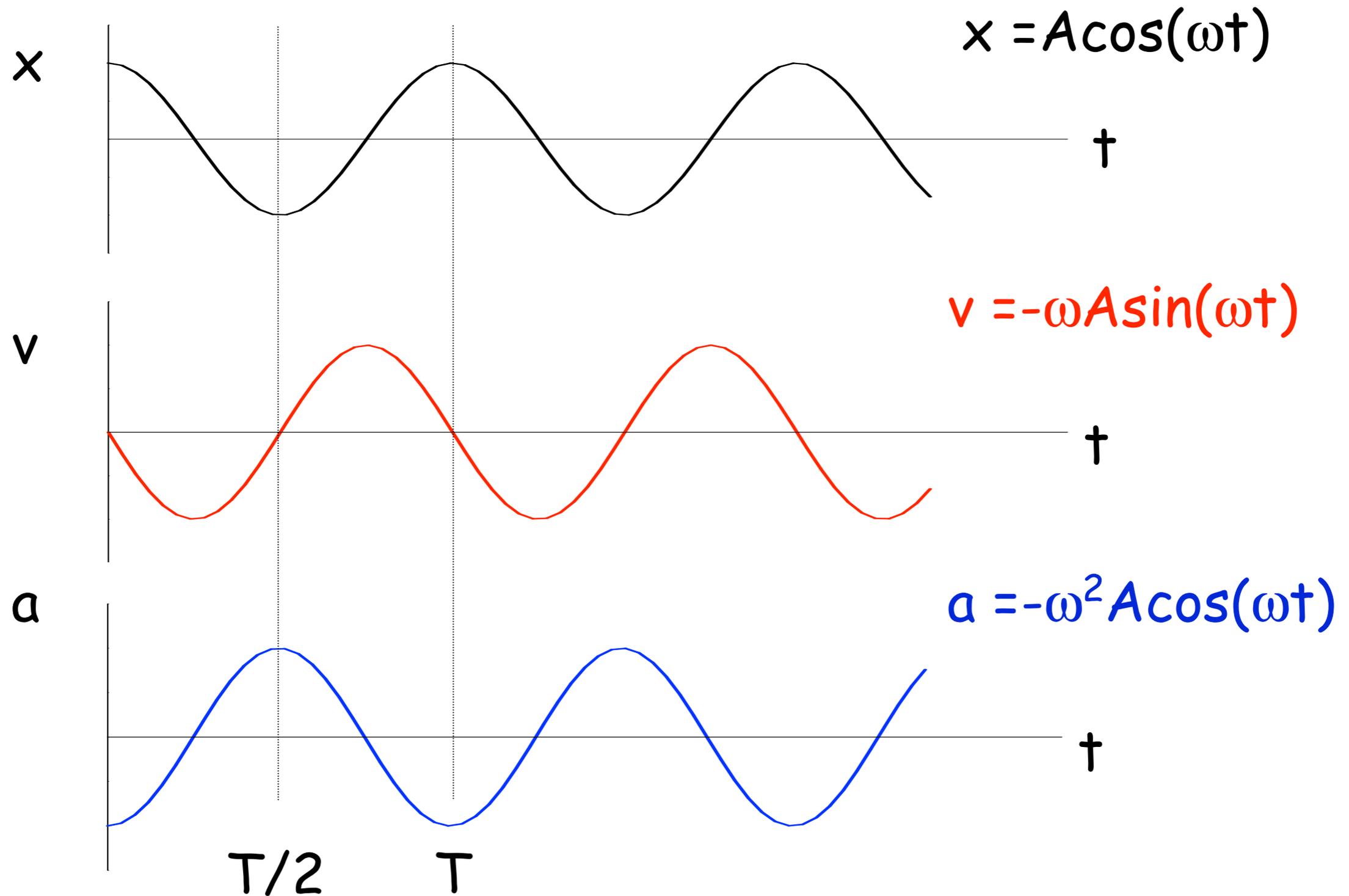
Possiamo legare  $\omega$ ,  $f$  e la costante della molla  $k$  usando le seguenti espressioni

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\omega$  è nota come **frequenza angolare** e la sua unità di misura è  $\text{rad s}^{-1}$

# Andamento temporale



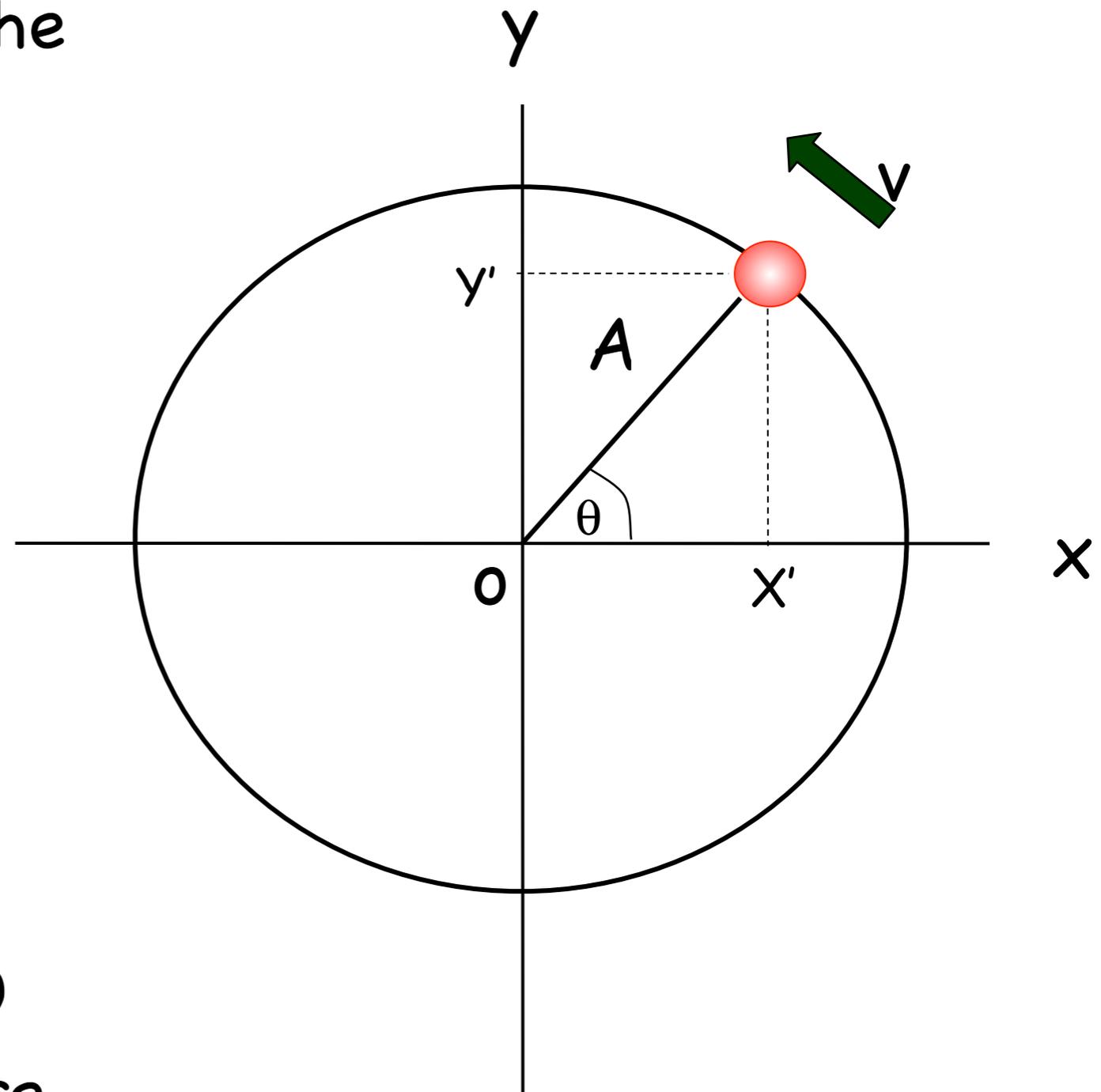
# SHM e moto circolare

Si immagina una particella che si muova con velocità  $v$  costante su di un cerchio di raggio  $A$

Lo spostamento angolare della particella rispetto all'asse  $x$  è dato da

$$\theta = \omega t + \delta$$

Dove  $\delta$  = spostamento a  $t=0$   
e  $\omega = v/A$  = velocità angolare



x funzione del tempo

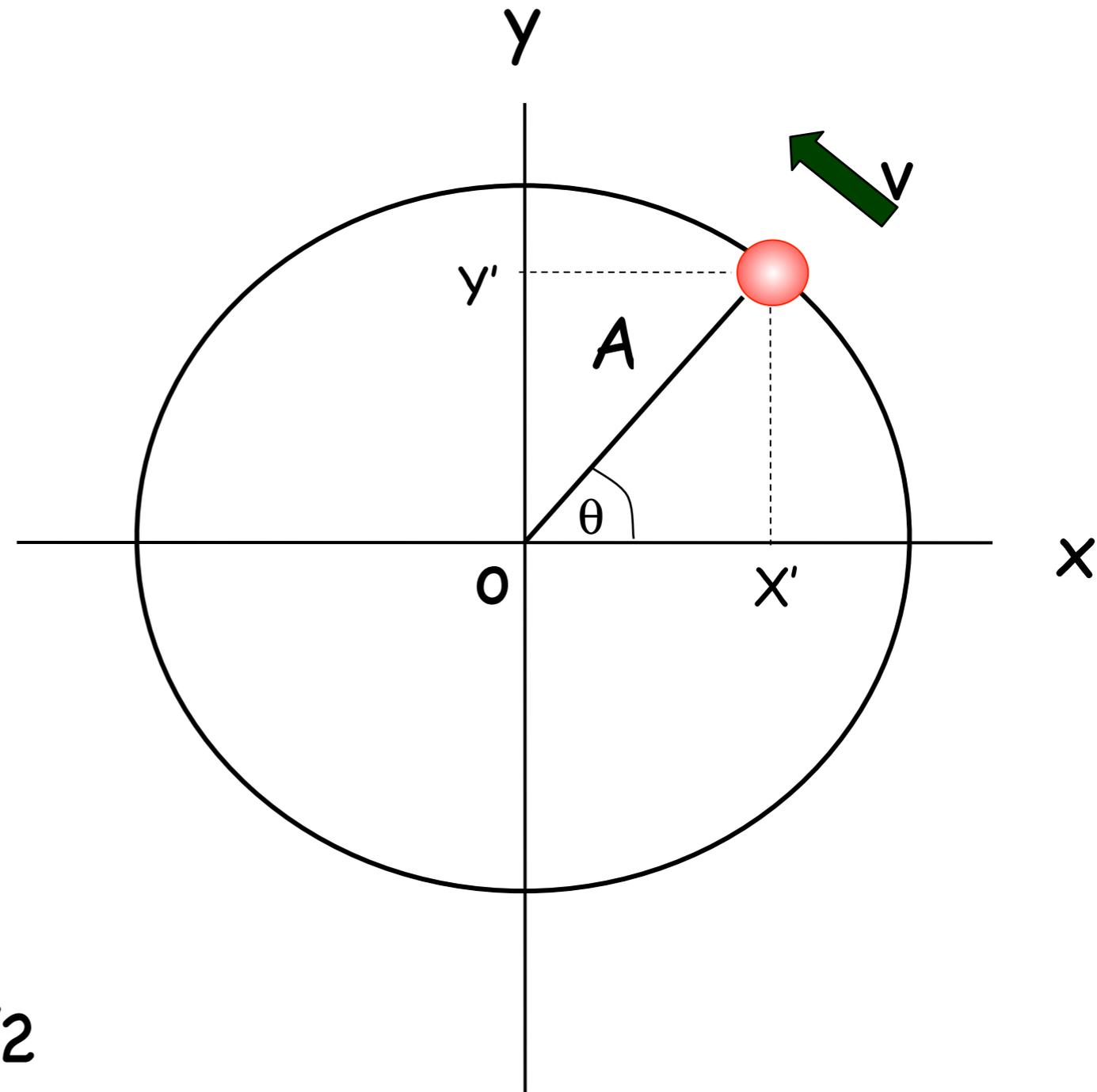
$$x' = A \cos(\theta) \\ = A \cos(\omega t + \delta)$$

y funzione del tempo

$$y' = A \sin(\theta) \\ = A \sin(\omega t + \delta) \\ = A \cos(\omega t + \delta - \pi/2)$$

Sia x che y descrivono SHM

Ma differiscono in fase di  $\pi/2$



Quando una particella si muove con velocità costante su di un cerchio la sua proiezione sul diametro si muove con SHM.

Questo è vero sia per  $x$  che  $y$

Il moto circolare è perciò la combinazione di due SHM perpendicolari, con la stessa ampiezza e frequenza ma con una differenza di fase relativa di  $\pi/2$

# Esempio

Una massa di 0.1 kg è sospesa ad una molla di massa trascurabile con costante elastica di  $40\text{Nm}^{-1}$ . La massa oscilla verticalmente con ampiezza di 0.06m.

(a) Determinare la frequenza angolare del moto

(b) Si esprima l'altezza  $y$  della massa rispetto alla posizione di equilibrio come funzione del tempo, se a  $t=0$  la massa è al punto più alto.

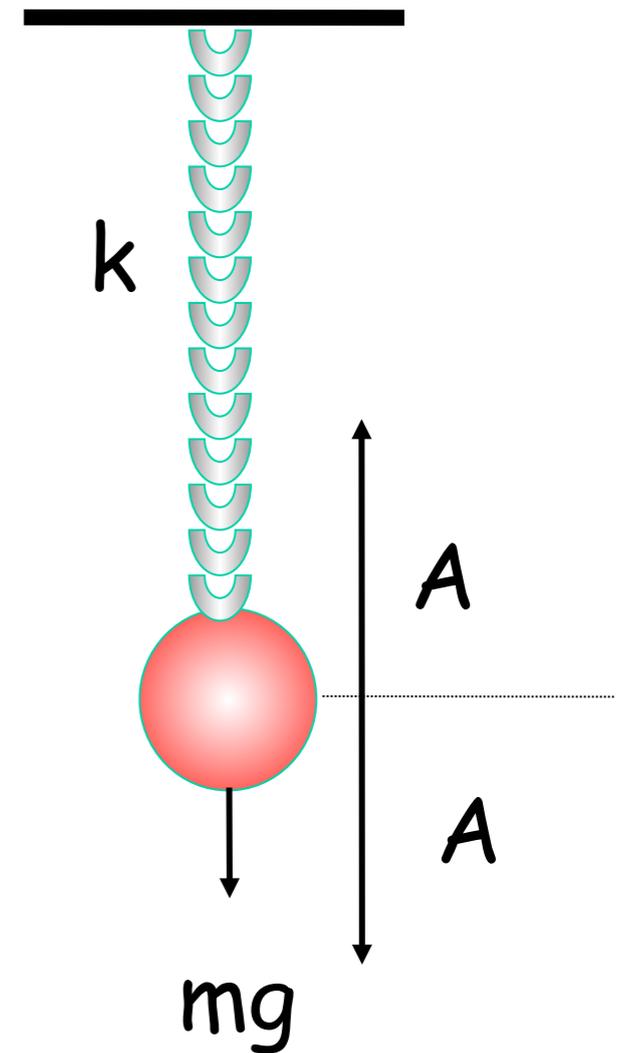
(c) Si esprima l'altezza  $y$  della massa rispetto alla posizione di equilibrio come funzione del tempo, se a  $t=0$  la massa è 0.03m sopra la posizione di equilibrio e si muove verso il basso .

(a) Determinare la frequenza angolare del moto

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{40}{0.10}}$$

$$= 20 \text{ rad.s}^{-1}$$



$$A = 0.06 \text{ m}$$

$$k = 40 \text{ N.m}^{-1}$$

$$m = 0.10 \text{ kg}$$

(b) Determinare  $y(t)$  se  $y(0)=A$

In SHM      posizione  $y(t) = A \cos(\omega t + \delta)$

velocità  $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$

Condizioni iniziali:  $t=0$        $y(0)=A$        $v=0$

$$0.06 = 0.06 \cos(0 + \delta)$$

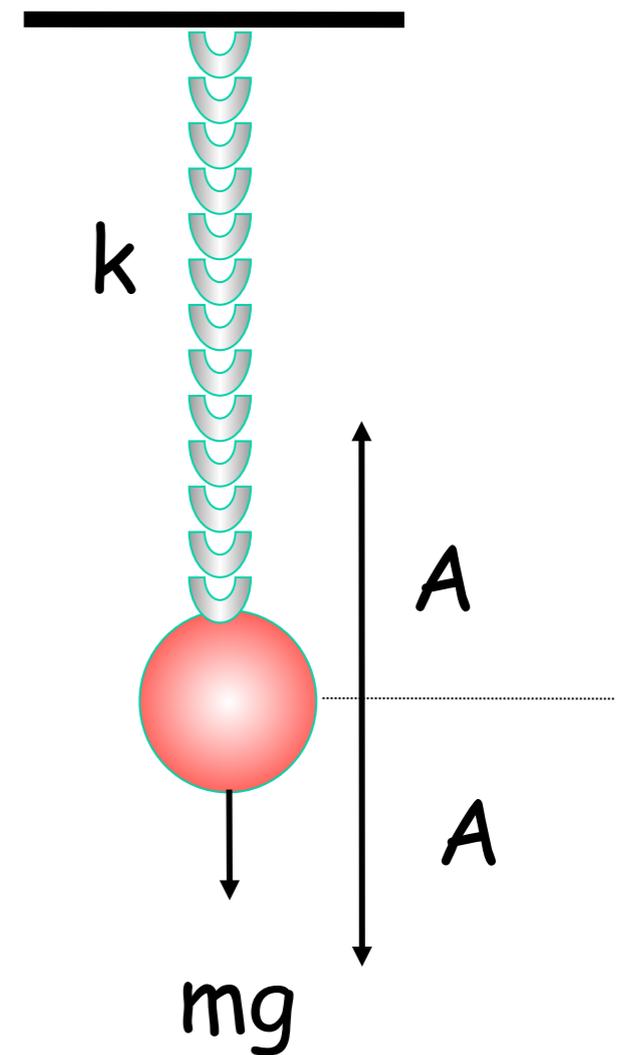
$$0 = -20 \times 0.06 \sin(0 + \delta)$$

$$\cos(\delta) = 1 \quad \sin(\delta) = 0$$

Vero solo se  $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

Se  $\delta = 0$

$$y(t) = 0.06 \cos(20t)$$



$$A = 0.06 \text{ m}$$
$$k = 40 \text{ N m}^{-1}$$
$$m = 0.10 \text{ kg}$$

(c) Determinare  $y(t)$  se  $y(0)=0.03$

In SHM      posizione  $y(t) = A \cos(\omega t + \delta)$

velocità  $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$

Condizioni iniziali:  $t=0$      $y(0)=0.03$      $v=-ve$

$$0.03 = 0.06 \cos(\delta)$$

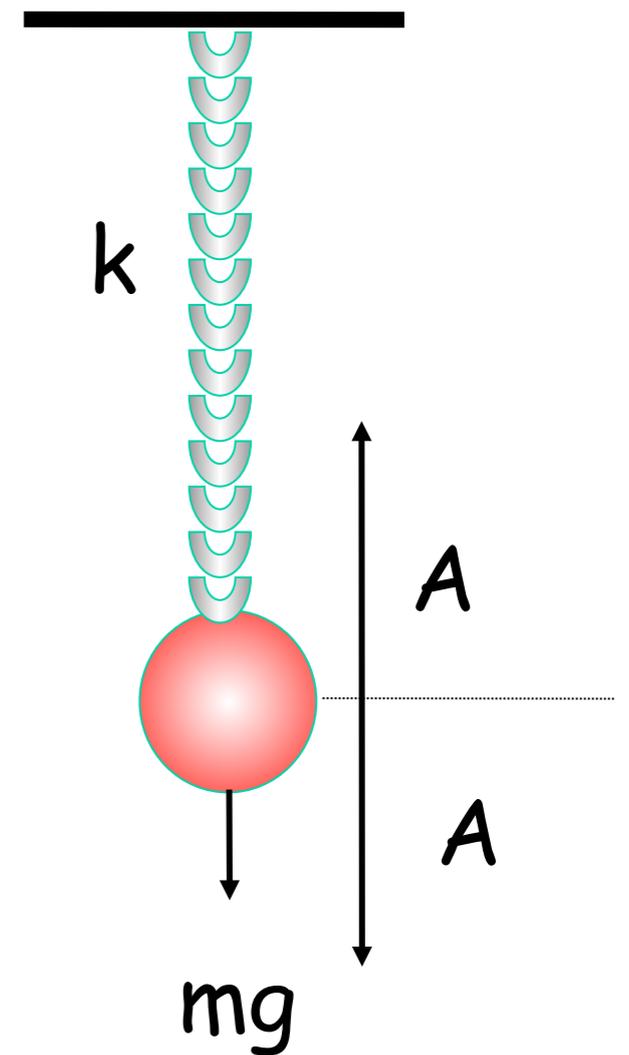
$$0 > -20 \times 0.06 \sin(\delta)$$

$$\cos(\delta) = 0.5 \quad \sin(\delta) > 0$$

Vero solo se  $\delta = \pi/3, 5\pi/3 \dots$  o se  $0 < \delta < \pi$

$$\delta = \pi/3$$

$$y(t) = 0.06 \cos(20t + \pi/3)$$



$$A = 0.06 \text{ m}$$
$$k = 40 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$$
$$m = 0.10 \text{ kg}$$

# Energia

Nel SHM l'energia totale (E) di un sistema è **costante** ma l'energia cinetica (K) e quella potenziale (U) variano (t).

Si consideri una massa a distanza  $x$  dall'equilibrio e su cui agisca una forza di richiamo

## Energia Cinetica

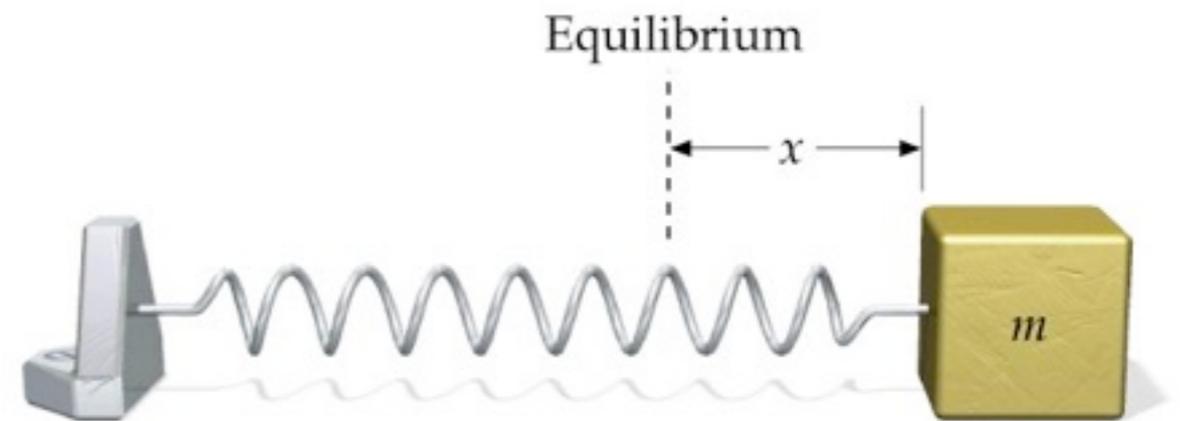
$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$K = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

Sostituendo  $\omega^2 = k/m$

$$K = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$



## Energia Potenziale

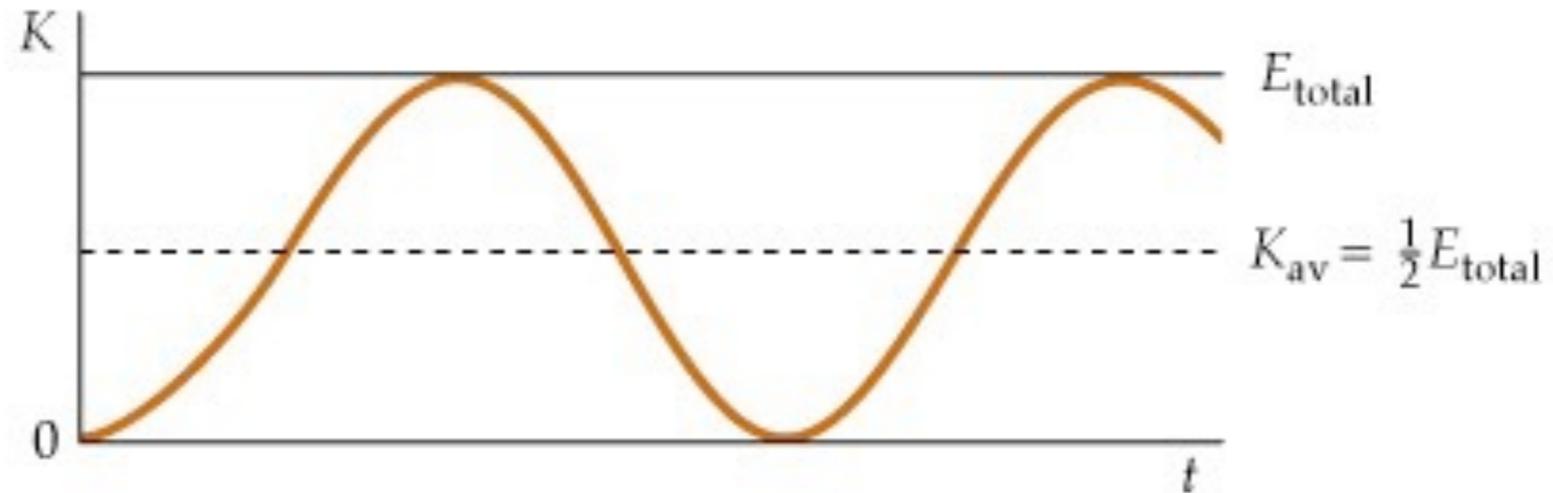
$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

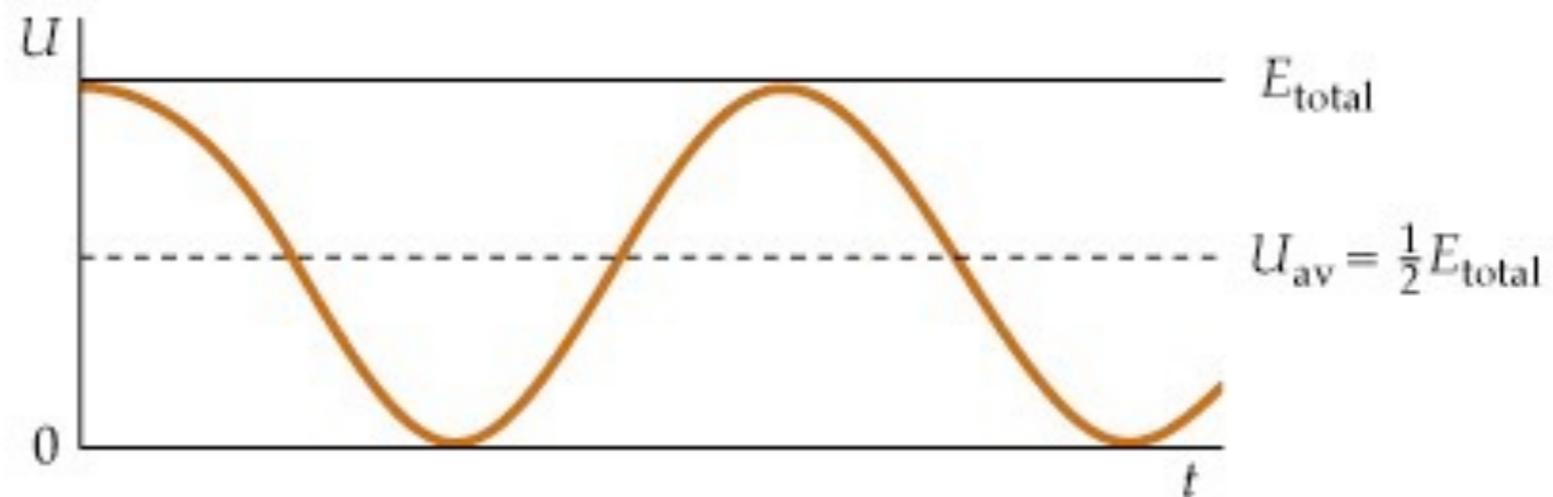
$$U = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

# Rappresentazione grafica

Energia  
Cinetica



Energia  
Potenziale



# Energia totale

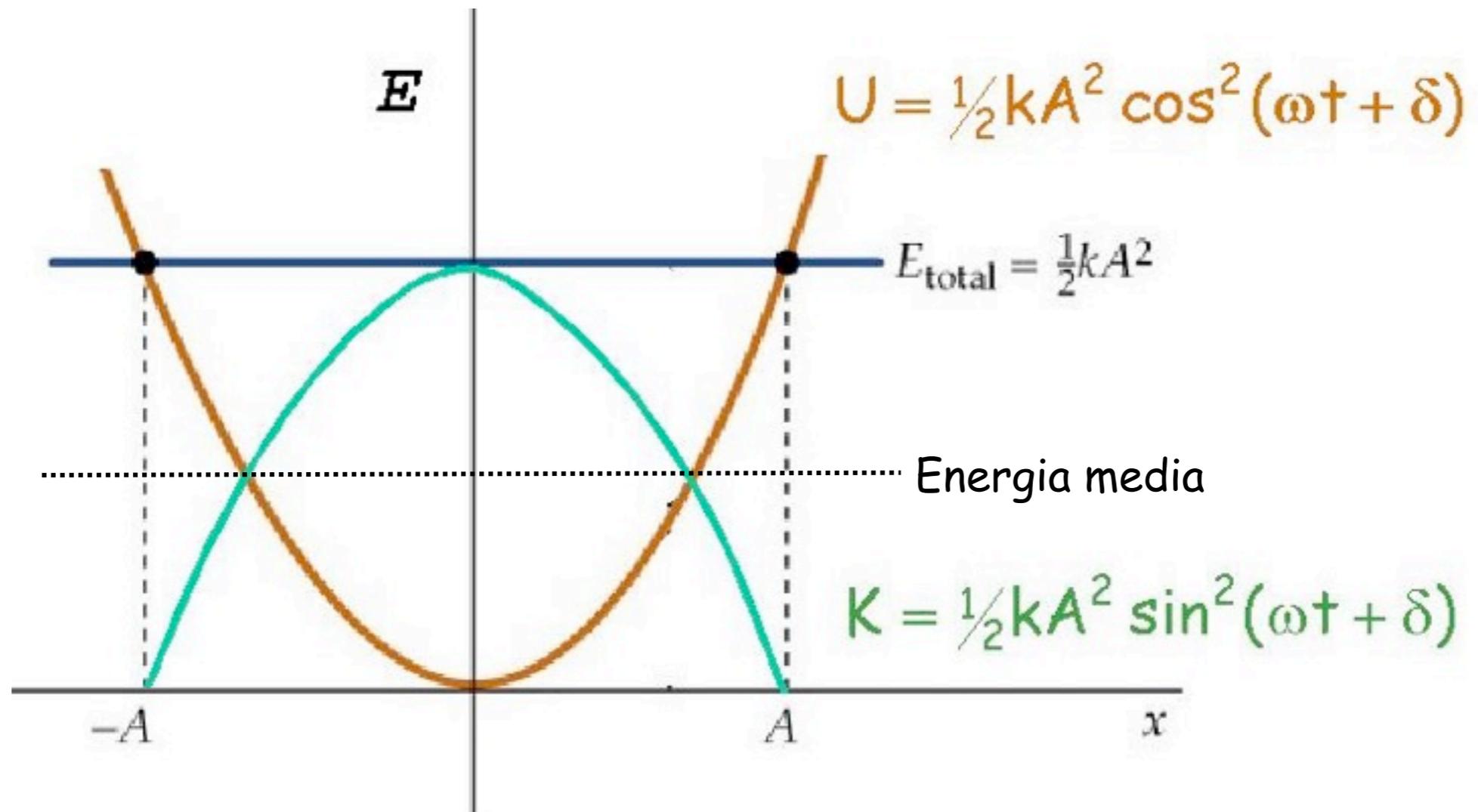
$$\begin{aligned} \text{Energia totale } E &= \quad \quad \quad K \quad \quad \quad + \quad \quad \quad U \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \delta) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \left( \sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta) \right) \end{aligned}$$

ma  $\left( \sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta) \right) = 1$

$$\therefore E = \frac{1}{2}kA^2$$

Nel SHM l'energia totale del sistema è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del moto!

# Rappresentazione grafica



Al massimo spostamento  $K=0$   $\therefore E = U$

All'equilibrio  $U=0$  e  $v=v_{\text{max}}$   $\therefore E = K$

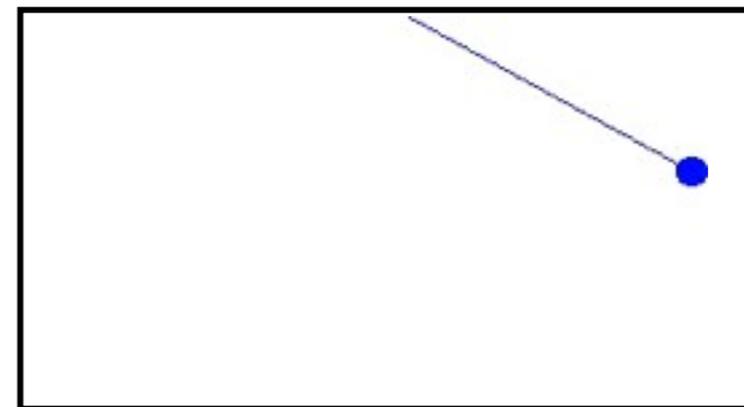
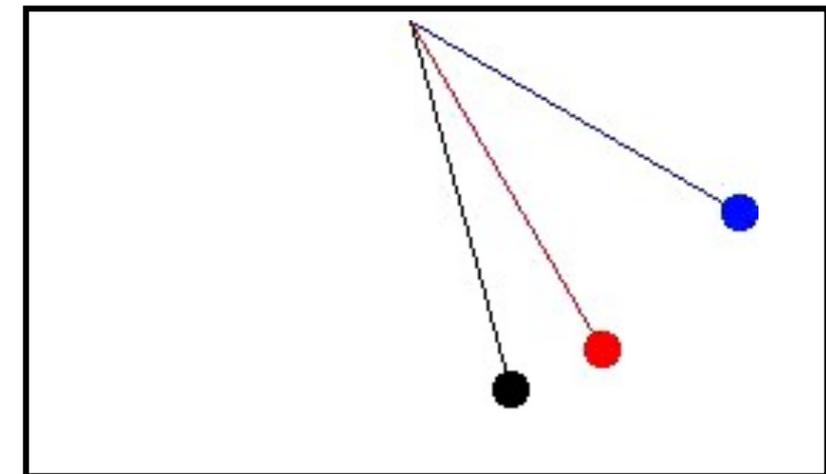
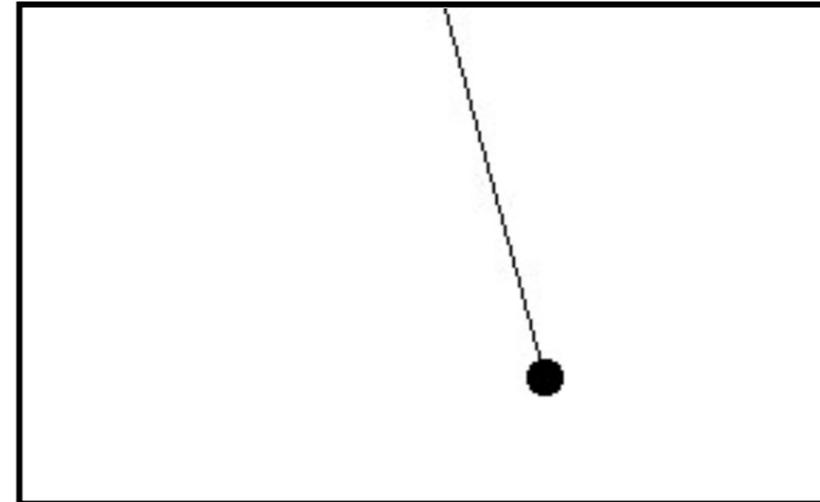
Ad ogni istante  $E = K + U$  è costante

# Il pendolo semplice

Un pendolo consiste di una corda di lunghezza  $L$  con una massa appesa  $m$ .

Quando la massa viene spostata e lasciata da un angolo iniziale  $\varphi$  rispetto alla verticale oscillerà con periodo  $T$ .

Deriveremo un'espressione per  $T$ .



Forze sulla massa:

$mg$  (verso il basso)

tensione (verso l'alto)

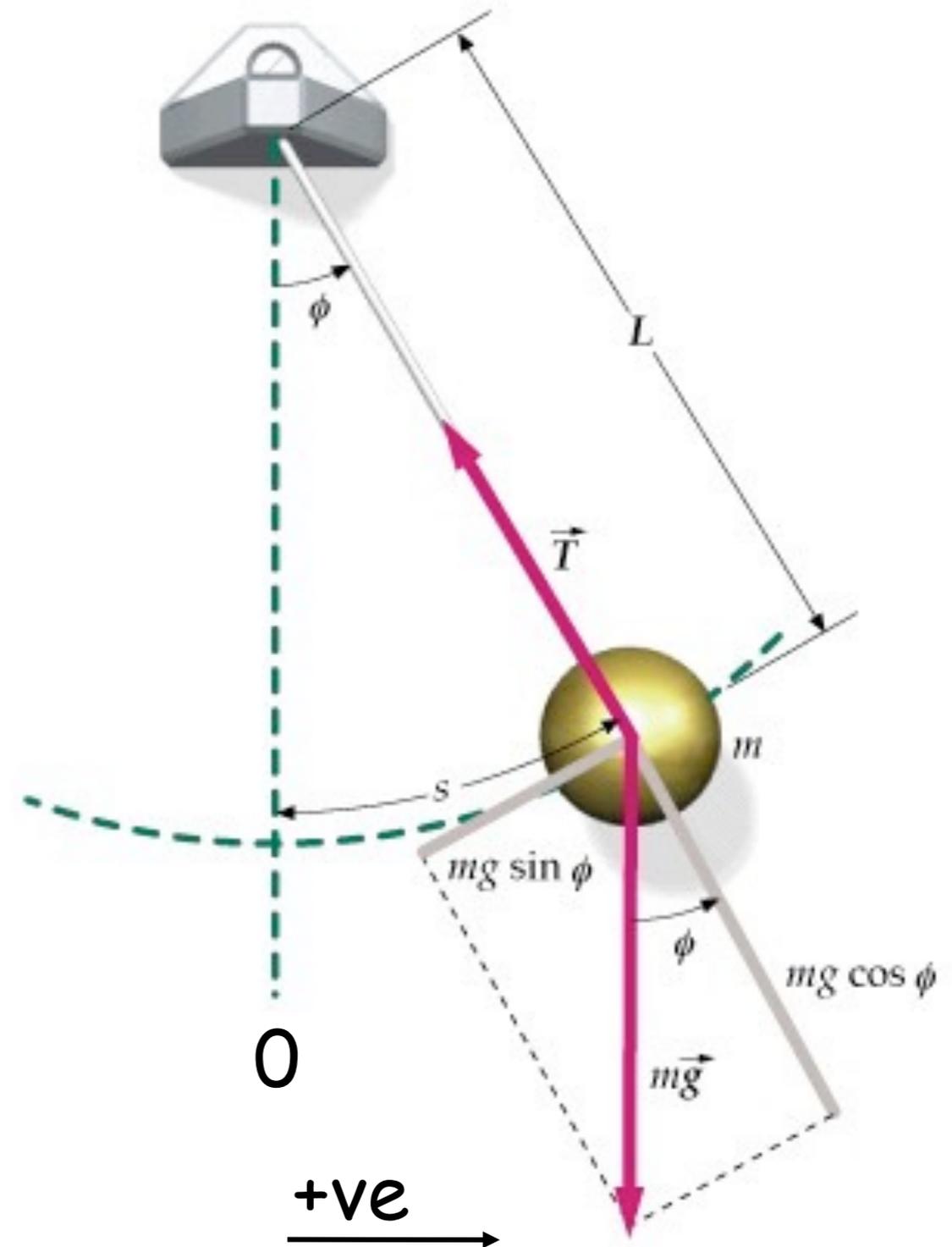
Quando la massa è ad un angolo  $\phi$  rispetto alla verticale, vanno considerate queste forze:

Tangenzialmente:

peso =  $mg \sin \phi$  (verso 0)

tensione =  $T \cos 90 = 0$

$$\sum F_{\text{tang}} = -mg \sin \phi$$



Per  $\frac{\phi(\text{rads})}{2\pi} = \frac{s}{2\pi L}$

si trova  $s = L\phi$

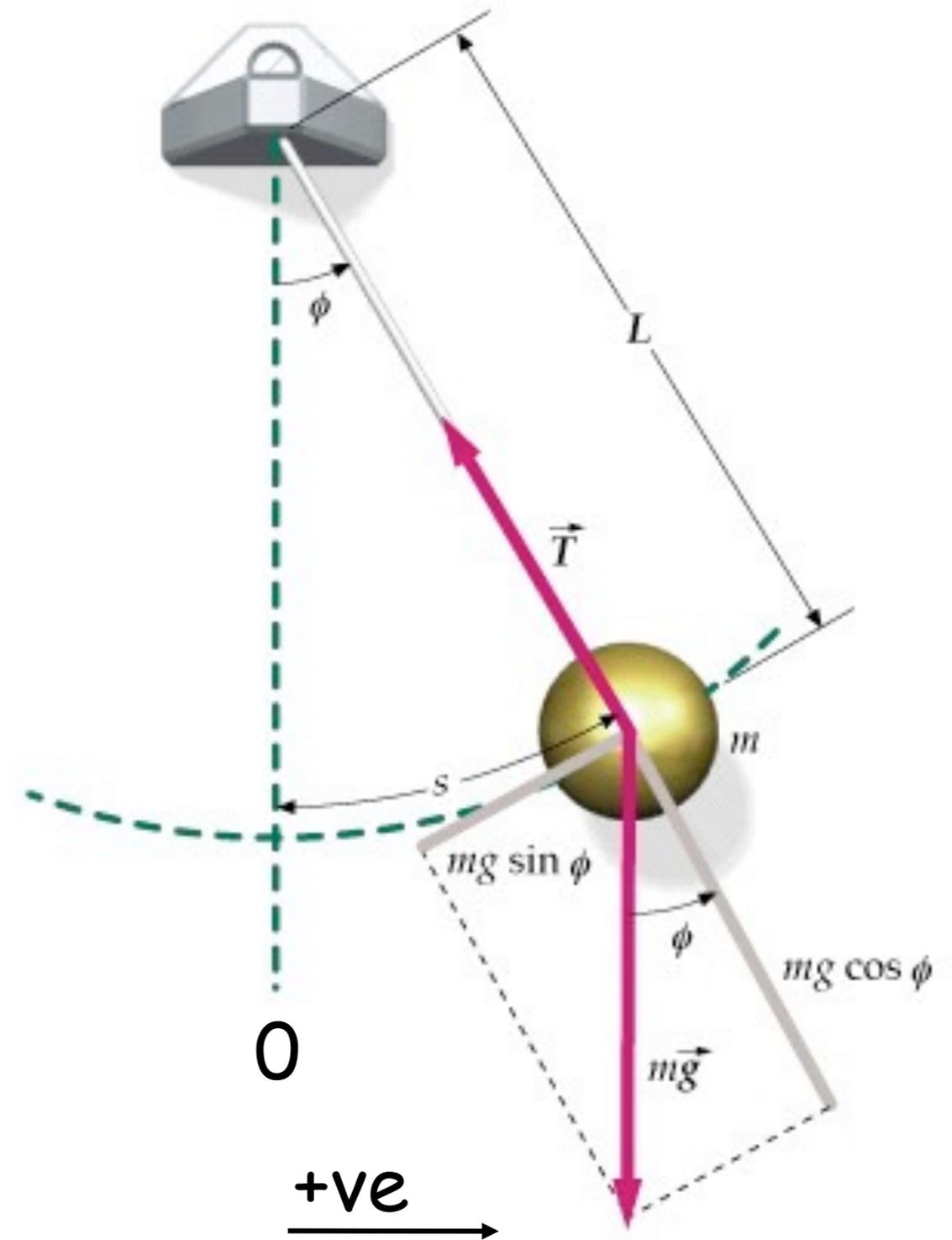
Dalla 2a legge di Newton (N2)

$$\Sigma F_{\text{tang}} = -mg \sin \phi$$

$$= ma$$

$$= m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$= mL \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$



$$-mg \sin \phi = mL \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

$$\text{o} \quad \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \phi$$

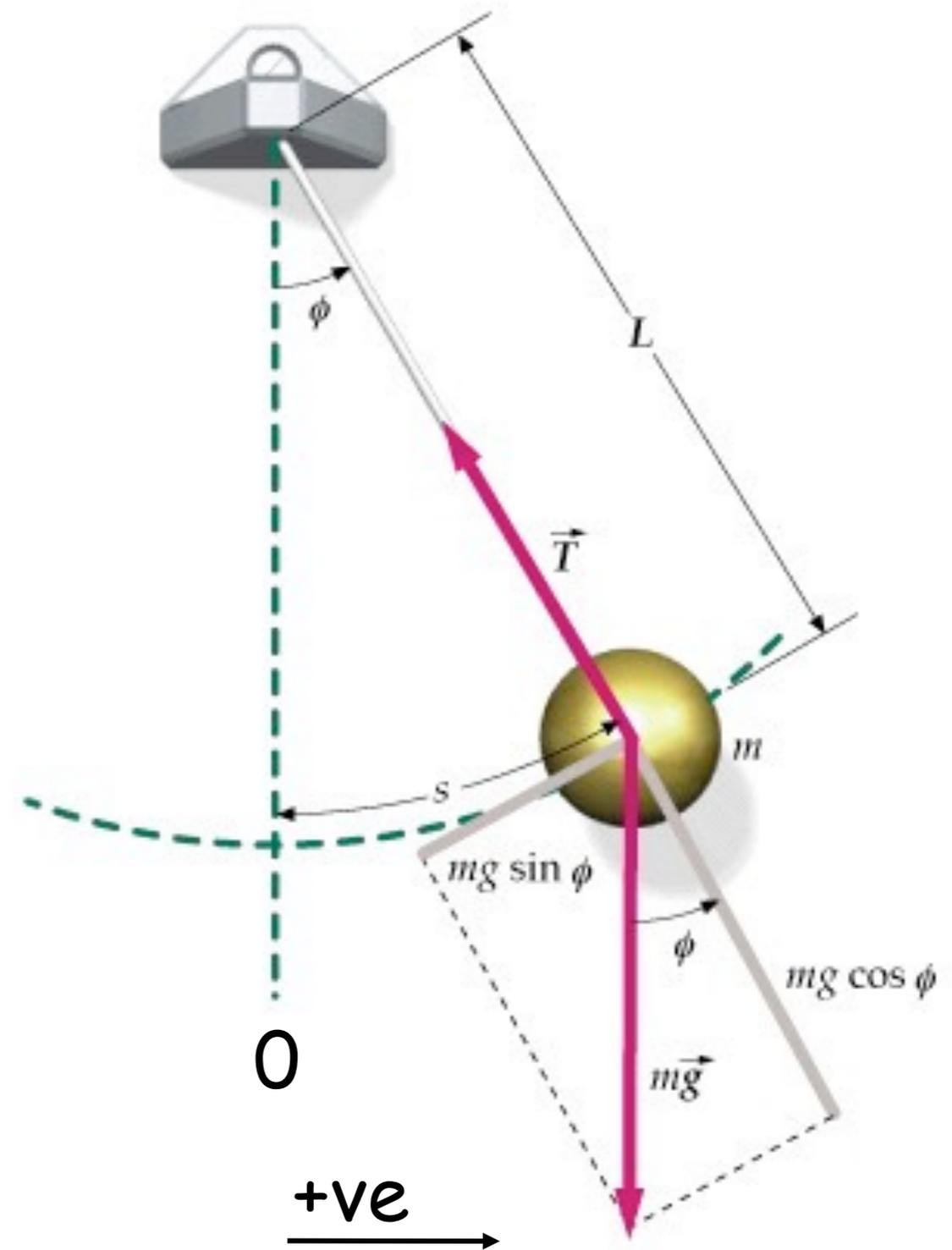
Per piccoli  $\phi$   $\sin \phi \sim \phi$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{L} \phi$$

i.e. SHM con  $\omega^2 = \frac{g}{L}$

che ha soluzione

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

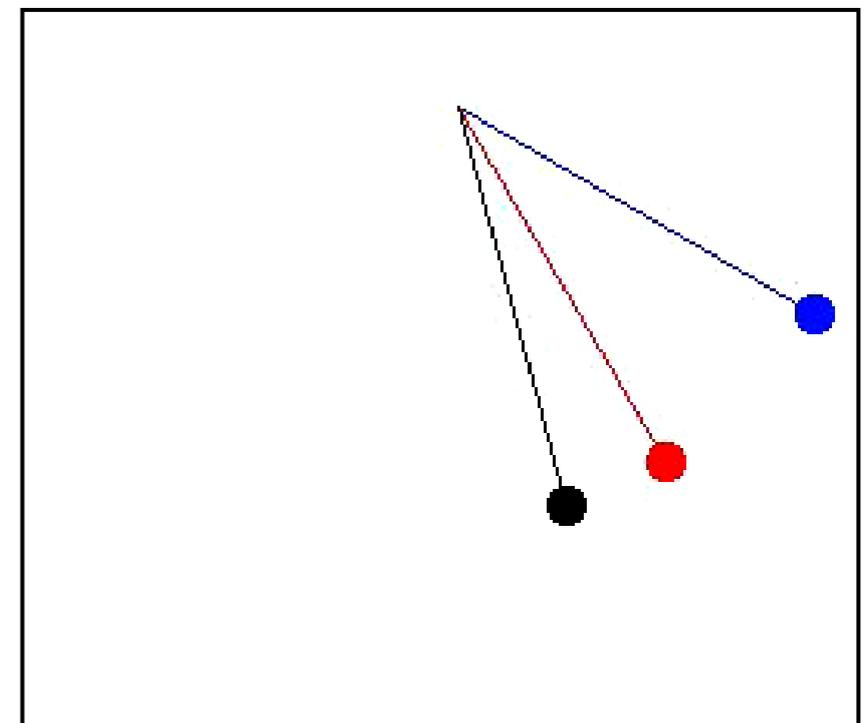
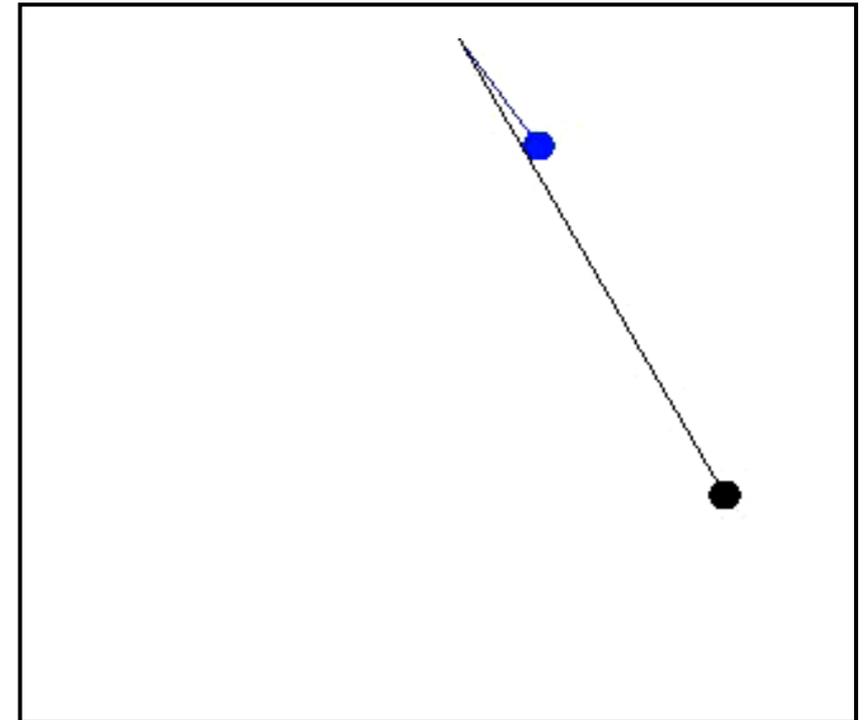


## Periodo del moto

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

i.e. più lungo è il pendolo  
maggiore è il suo periodo

Nota: T **non** dipende  
dall'ampiezza di oscillazione,  
anche se un orologio a pendolo  
cambia ampiezza con il tempo  
(smorzamento)



---

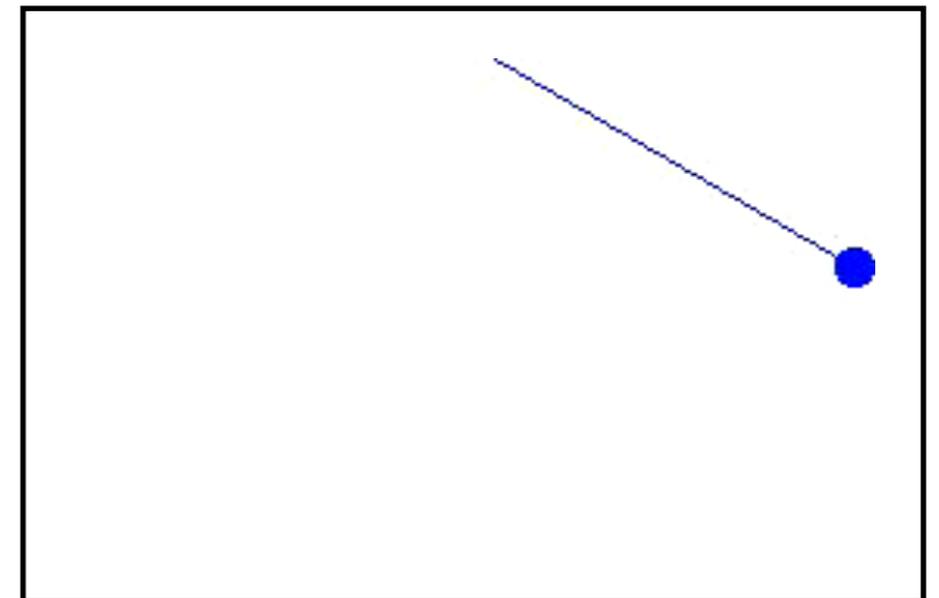
Se lo spostamento angolare iniziale è grande l'approssimazione lineare, per piccoli angoli, non è più valida

L'errore tra il moto armonico semplice e la soluzione vera appare immediatamente e cresce con il tempo .

Pendolo blu scuro rappresenta

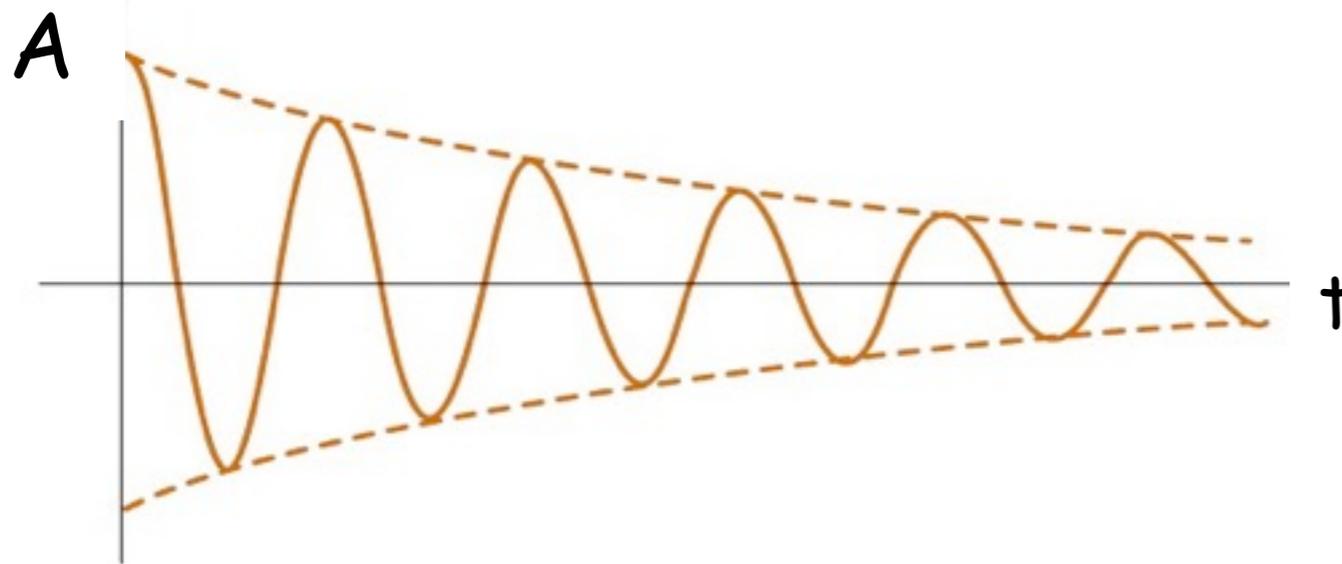
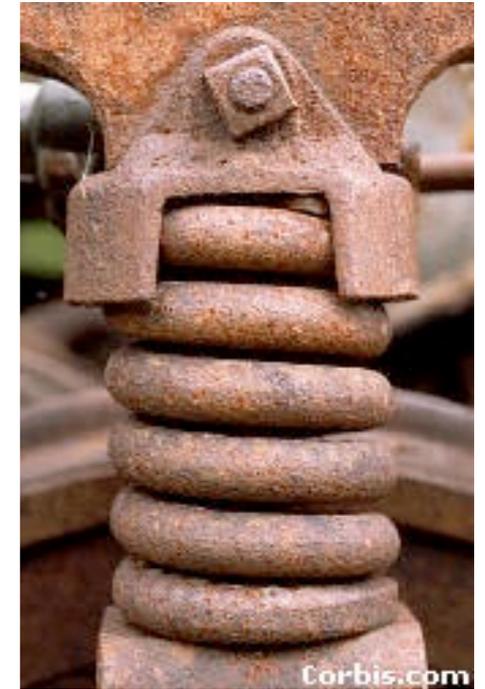
l'approssimazione:  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

quello azzurro mostra la soluzione numerica dell'equazione differenziale non lineare.



# Oscillatori smorzati

Tutte le oscillazioni reali sono soggette a forze di frizione o dissipative. Esse rimuovono energia dal sistema riducendo l'ampiezza



Si consideri una massa  $m$  appesa ad una molla con costante elastica  $k$

Forza di richiamo =  $kx$  quando  $m$  è a distanza  $x$  dall'equilibrio

forza viscosa  $\propto dx/dt$

$$F = ma$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{dove } \gamma = b/m \text{ e } \omega_0 = (k/m)^{1/2}$$



Le costanti vanno determinate imponendo le condizioni al contorno, ad esempio  $x(0)=x_0$  e  $v(0)=0$ .

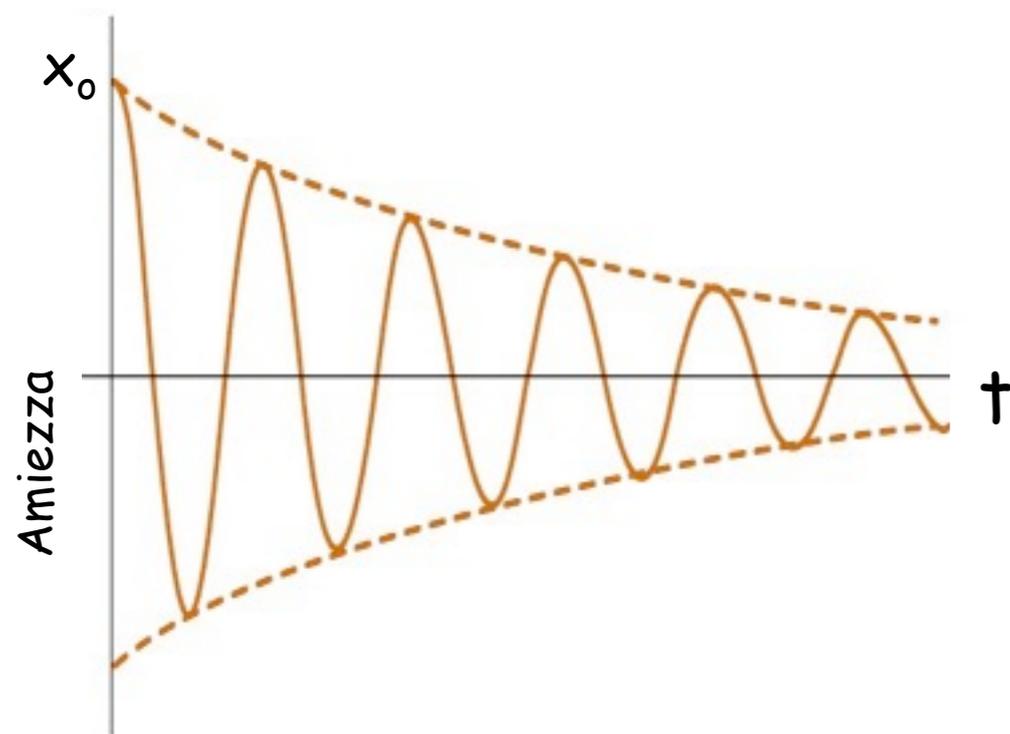
1) $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ \left( \frac{x_0}{2} - \frac{\gamma x_0}{4\omega} \right) e^{-\omega t} + \left( \frac{x_0}{2} + \frac{\gamma x_0}{4\omega} \right) e^{+\omega t} \right]$	<b>sovrasmorzato</b>
2) $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ x_0 + \frac{\gamma x_0}{2} t \right]$	<b>critico</b>
3) $x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ (x_0) \cos \omega t + \left( \frac{\gamma x_0}{2\omega} \right) \sin \omega t \right]$	<b>sottosmorzato</b>

$$\text{con } \omega = \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

# Energia di un oscillatore smorzato

Generalmente  $E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$       energia  $E \propto$  ampiezza  $A^2$

se l'ampiezza decade esponenzialmente lo farà anche l'energia



$$x(t) = x_0 e^{\frac{-\gamma t}{2}} \cos(\omega t)$$

max spostamento quando  $\cos=1$

$$x(t) = x_0 e^{\frac{-\gamma t}{2}}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2} m \omega^2 (x_0 e^{\frac{-\gamma t}{2}})^2$$

# Fattore di qualità - Q

Un oscillatore smorzato è spesso descritto dal suo fattore di qualità o **Q-factor**

$$Q = \frac{\omega_0 m}{b} = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

che è legato alla perdita frazionaria di energia in un ciclo, infatti:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \omega^2 (x_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}})^2 \\ &= E_0 e^{-\gamma t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dE &= -\gamma E_0 e^{-\gamma t} dt \\ &= -\gamma E dt \end{aligned}$$

# Q

In un sistema debolmente smorzato l'energia persa per ciclo è piccola

$$\Delta E = -\gamma E T$$

$$dE = \Delta E \quad e \quad dt = T$$

$$\frac{|\Delta E|}{E} = \gamma T$$

$$\frac{|\Delta E|}{E} = \frac{\gamma 2\pi}{\omega_0}$$

$$\text{ma } Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad \text{ie } \gamma = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\frac{|\Delta E|}{E} = \frac{2\pi}{Q}$$

# Esempio

---

Quando la nota C intermedia sul piano ( $f=262\text{Hz}$ ) viene suonata, perde metà della sua energia dopo 4s.

(a) qual'è il decadimento temporale ?

(b) qual'è il fattore Q per questa corda ?

(c) qual'è la perdita frazionaria di energia/ciclo?

(a) qual'è il decadimento temporale ?

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 (x_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}})^2$$

$$= E_0 e^{-\gamma t}$$

tempo di decadimento

$$\tau = 1/\gamma$$

$$\therefore E = E_0 e^{-t/\tau}$$

Quando  $t=4s$ ,  $E = 1/2E_0$

$$\frac{1}{2} E_0 = E_0 e^{-4/\tau}$$

$$2 = e^{4/\tau}$$

$$\ln 2 = \frac{4}{\tau}$$

$$\tau = 5.77$$

tempo di decadimento = 5.77s

---

(b) qual'è il fattore Q per questa corda ?

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad e \quad \tau = 1/\gamma$$

$$Q = \omega_0 \tau$$

$$= 2\pi f \tau$$

$$= 2 \pi 262 \times 5.77$$

$$= 9.5 \times 10^3$$

Fattore Q per la corda del piano =  $9.5 \times 10^3$  (numero puro)

Q è piuttosto grande, come per i cristalli ed il vetro

(c) qual'è la perdita frazionaria di energia/ciclo?

$$\frac{|\Delta E|}{E} = \gamma T$$

$$\frac{|\Delta E|}{E} = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{f\tau}$$

$$= \frac{1}{262 \times 5.77}$$

$$= 6.61 \times 10^{-4}$$

$$\frac{|\Delta E|}{E} = \frac{2\pi}{Q}$$

$$= \frac{2\pi}{9.5 \times 10^3}$$

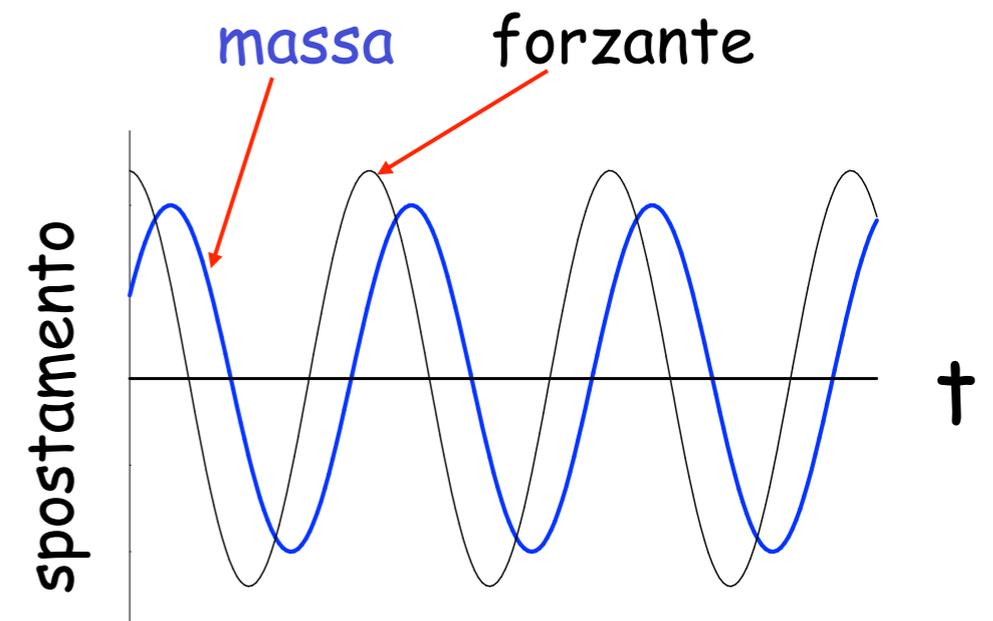
$$= 6.61 \times 10^{-4}$$

# Oscillazioni forzate

Si consideri lo stato stazionario di una massa oscillante su di una molla sotto l'influenza di una forzante.

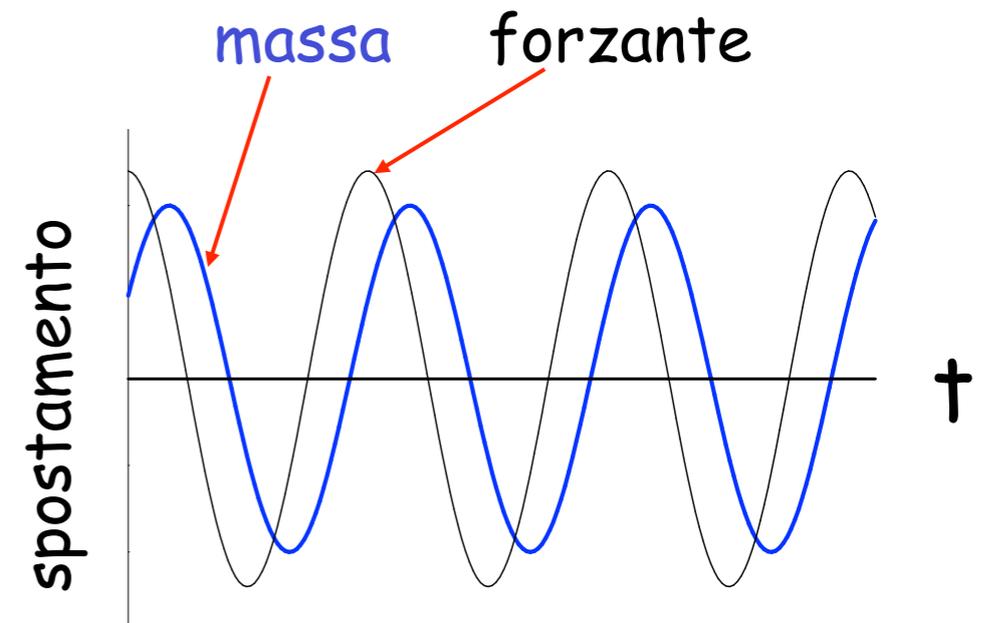
La massa oscilla alla stessa frequenza della forzante con ampiezza costante  $x_0$ .

Le oscillazioni sono sfasate, cioè lo spostamento segue la forza.



Forza =  $F_0 \cos(\omega t)$  ha picchi +ve a  $t = 0, 2\pi/\omega, 4\pi/\omega, \dots$

picchi +ve dello spostamento avvengono a  $t = \Delta t, (2\pi/\omega) + \Delta t, (4\pi/\omega) + \Delta t, \dots$



$\therefore$  lo spostamento  $x = x_0 \cos(\omega t - \phi)$  dove  $\phi = \omega \Delta t = \frac{2\pi \Delta t}{T}$

che descrive lo spostamento con la stessa frequenza della forzante, ampiezza costante ed uno sfasamento  $\phi$ .

## Equazione del moto per un oscillatore forzato

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad \text{dove } \gamma = b/m \text{ e } \omega_0^2 = k/m$$

Soluzione dell'equazione  $x = x_0 \cos(\omega t - \phi)$

per determinare  $x_0$  e  $\phi$ , bisogna sostituire

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin(\omega t - \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t - \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$-\omega^2 x_0 \cos(\omega t - \phi) - \gamma \omega x_0 \sin(\omega t - \phi) + \omega_0^2 x_0 \cos(\omega t - \phi) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) x_0 \cos(\omega t - \phi) - \gamma \omega x_0 \sin(\omega t - \phi) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

che deve essere vera ad ogni tempo

Per risolvere per  $x_0$  e  $\phi$  bisogna considerare 2 situazioni:

1.  $(\omega t - \phi) = 0 \quad \therefore \sin(\omega t - \phi) = 0 \quad \text{e} \quad \cos(\omega t) = \cos \phi$

2.  $(\omega t - \phi) = \pi/2 \quad \therefore \cos(\omega t - \phi) = 0 \quad \text{e} \quad \cos(\omega t) = \cos(\pi/2 + \phi)$

che porta a due equazioni:

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 &= \frac{F_0}{m} \cos(\phi) \\ -\gamma\omega x_0 &= \frac{F_0}{m} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)\end{aligned}$$

ricordando  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = -\sin\phi$  e  $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

Le soluzioni sono:

$$x_0 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}} \qquad \tan \phi = \frac{\omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

# Risonanza

---

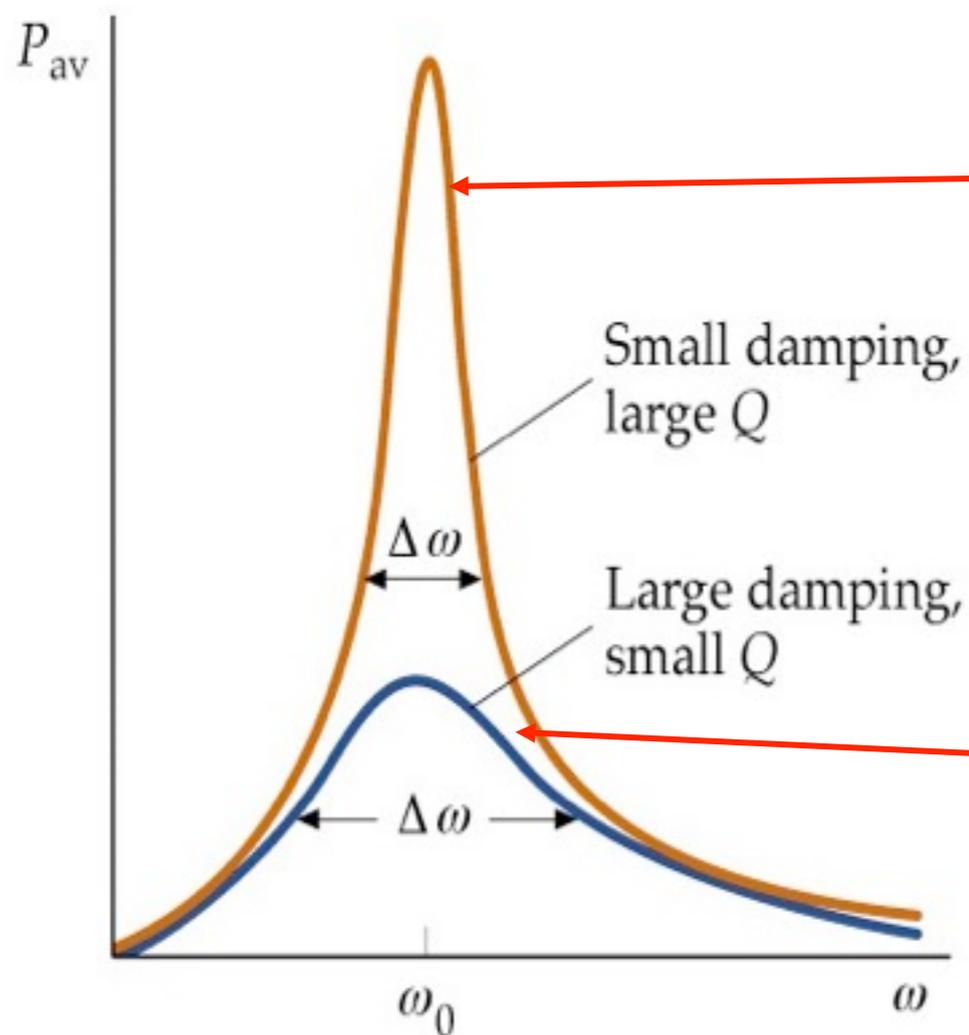
L'ampiezza e l'energia di un sistema in uno stato stazionario dipende dall'ampiezza e dalla frequenza della forzante.

In assenza di forzante (a con le condizioni iniziali) il sistema oscilla alla sua **frequenza naturale**  $\omega_0$ .

Se la frequenza della forzante è circa  $\omega_0$  l'energia assorbita dall'oscillatore è massima e si possono avere grandi ampiezze.

Ciò è noto come **risonanza** e la frequenza dell'oscillatore è nota come **frequenza di risonanza**

Il tasso medio di assorbimento di energia  $T$  è uguale alla potenza media fornita dalla forzante



Quando lo smorzamento è debole l'oscillatore assorbe più energia dalla forzante.

Il picco di risonanza è più stretto

Smorzamento grande, picco più largo

Smorzamento debole

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q}$$