Polinomi

$$f = 1 - x^2 + 3x + \frac{1}{4} x^3$$

termine noto

coefficiente direttore

x indeterminata

$\cancel{x^{-3}}$ $\cancel{x^{\frac{1}{2}}}$

x^k $k \in \mathbb{N}$

grado 0

$g = -7$ polinomio costante

$h = 0$ ← grado $-\infty$

$\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x]}$

$R[x]$ = insieme dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x

Def Un polinomio a coefficienti reali nell'indeterminata x è una espressione formale del tipo $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ con $a_i \in \mathbb{R}$,

Se $a_n \neq 0$
$n :=$ grado di p

$$(3x+2x^2-x^3)+(2x-x^2)=5x+x^2-x^3$$

deg p = grado di p

degree

$$(x-x^2)(x^3+1)=x^4+x-x^5-x^2$$

Teorema (divisione Euclidea). Dati $f, g \in \mathbb{R}[x]$, $g \neq 0$, esistono e sono unici due polinomi $q, r \in \mathbb{R}[x]$, con $\deg r < \deg g$, t.c.

$$\boxed{f = gq + r}$$

Dim 1) $f = 0 \rightsquigarrow q = 0,\ r = f \qquad \deg r = -\infty < \deg g$ ✓

2) $\deg f \geq 0$. Se $\deg f < \deg g$: $q = 0,\ r = f$ ✓

Se $\deg f \geq \deg g$: $h := f - f_n g_m^{-1} x^{n-m} g \qquad \deg h < \deg f$

$f_n, g_m \neq 0$

$n \geq m$

$f = f_0 + f_1 x + \dots + f_n x^n$

$g = g_0 + g_1 x + \dots + g_m x^m$

- $f = \underbrace{f_n f_m^{-1} x^{n-m}}_{u} \cdot g + h = u g + \underbrace{q' g + r}_{h} = (u+q') g + r$

$\deg h < \deg f$

$q = u + q', \quad r = r'$

$\deg r < \deg h < \deg f$

$h = q' g + r'$

Es

$$\underbrace{3x^3}_{f_n,\ n=3} - 2x^2 + x + 1 \;\; (f) \qquad \Big| \quad \underbrace{x^2}_{f_m = 1,\ m=2} - 1 = g$$

$$\to -3x^3 \qquad + 3x \qquad\qquad 3x - 2 = q$$

$$h = -2x^2 + 4x + 1$$

$$f_n \quad 2x^2 \qquad -2$$

$$4x - 1 = r$$

$$3x^3 - 2x^2 + x + 1 = (x^2 - 1)\cdot(3x - 2) + 4x - 1$$

Dividere f per $\underline{g = x - c}$, $c \in \mathbb{R}$

$$\deg g = 1 \implies \deg r = \begin{cases} -\infty \\ 0 \end{cases} \implies r = \text{cost}$$

$$f = (x - c)\, q + r \quad , \; r \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f(c) = 0 \cdot q(c) + r = r}$$

Teorema di Ruffini

$$f = f_0 + f_1 x + \dots + f_n x^n$$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad f(a) = f_0 + f_1 \cdot a + \dots + f_n a^n \in \mathbb{R}$

Valutazione di f su a

Es. (metodo di Ruffini)

$$3x^3 - 2x^2 + x + 1 \quad \Big| \; x - 2$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & & 6 & 8 & 18 \\ \hline & 3 & 4 & 9 & 19 \end{array} = r$$

$$q = 3x^2 + 4x + 9$$

$$f = 3x^3 - 2x^2 + x + 1 = (x-2)(3x^2+4x+9) + 19$$

$$f(2) = 24 - 8 + 2 + 1 = 19$$

$f = f_0 + f_1 X + \dots + f_n X^n$, $n \geq 1$, $f_n \neq 0$

$\deg f = n > 0$

$\exists\, x \in \mathbb{R}$ t.c. $\boxed{f(x) = 0}$?

Equazione polinomiale

Es $2 + 3x = 0$

$\boxed{x = -\frac{2}{3}}$

$n = 1$, $n = 2$

$n = 1$

$f_0 + f_1 x = 0$ $\quad f_1 \neq 0$

$f_1 x = -f_0$

$\boxed{x = -\frac{f_0}{f_1}}$ Soluzione dell'equazione o anche radice (o zero) di f

$\sqrt{3} - x = 0$

$\boxed{x = \sqrt{3}}$

$n = 2$

$$a x^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \rightsquigarrow$$

Possiamo supporre $a = 1$

$$\rightarrow x^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4c}{4}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ **Discriminante**

Es

$$x^2+2x+1=0$$

$$(x+1)^2=0$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

$$x=-1\pm\sqrt{1-1}=-1$$

$$ax^2+2bx+c=0$$

$$\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\frac{-\cancel{2}b\pm\cancel{2}\sqrt{b^2-ac}}{\cancel{2}a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

(formula ridotta)

$$x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{9+1} = 3 \pm \sqrt{10} = \begin{cases} 3 + \sqrt{10} > 0 \\ 3 - \sqrt{10} < 0 \end{cases}$$

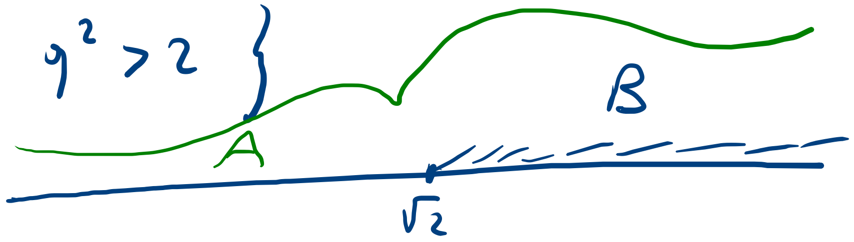
$$x^2 + x + 2 = 0$$ non ci sono soluzioni reali.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$ ops! (numeri complessi)

Sez. di Dedekind di $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$

$\sqrt{2} : (A, B)$ $\qquad B = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q > 0,\ q^2 > 2 \}$

$A = \mathbb{Q} - B$



$\sqrt[3]{2} : (C, D)$ $\qquad D = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q^3 > 2 \}$

$C = \mathbb{Q} - D$

$\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} : (A + C,\ B + D)$