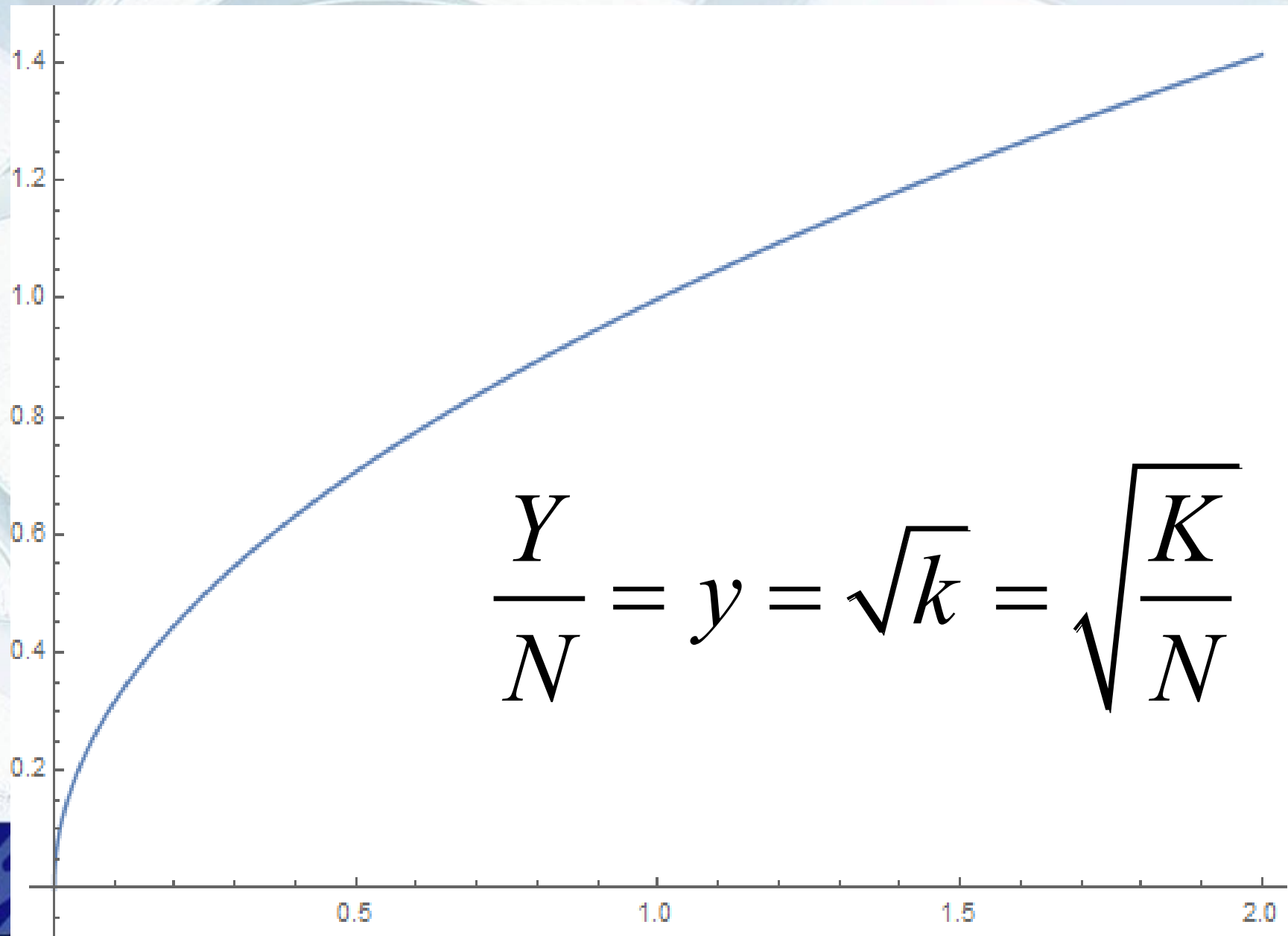


Capitolo XI

Risparmio, accumulazione di capitale e produzione

4.1. La funzione di produzione aggregata



Calcoliamo lo stato stazionario

$$k_{t+1} - k_t = s\sqrt{k_t} - \delta k_t = 0$$

$$s\sqrt{k^*} = \delta k^*$$

Ipotizziamo $s = \delta = 10\%$

$$\sqrt{k^*} = k^*$$

2.1. La dinamica del capitale e della produzione

Calcoliamo lo stato stazionario

$$(k^*)^{\frac{1}{2}} = k^*$$

$$(k^*)^{\frac{1}{2}-1} = 1$$

$$(k^*)^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{k^*}} = 1$$

2.1. La dinamica del capitale e della produzione

Calcoliamo lo stato stazionario

$$\frac{1}{\sqrt{k^*}} = 1$$

$$\sqrt{k^*} = 1$$

$$\left(\sqrt{k^*}\right)^2 = 1^2$$

$$k^* = 1 \quad y^* = 1$$

3.1. Gli effetti del tasso di risparmio sul prodotto di stato stazionario

In equilibrio con questa funzione di produzione:

$$s\sqrt{k}^* = \delta k^*$$

ovvero

$$\sqrt{k}^* = y^* = \frac{s}{\delta}$$

3.1. Gli effetti del tasso di risparmio sul prodotto di stato stazionario

Il prodotto per lavoratore di stato stazionario è uguale al rapporto tra il tasso di risparmio e il tasso di deprezzamento:

$$\frac{Y^*}{N} = \sqrt{\frac{K^*}{N}} = \frac{s}{\delta}$$

Un tasso di risparmio maggiore e un tasso di deprezzamento minore portano entrambi a un maggiore capitale per lavoratore di stato stazionario e a un maggior prodotto per lavoratore di stato stazionario.

2.1. La dinamica del capitale e della produzione

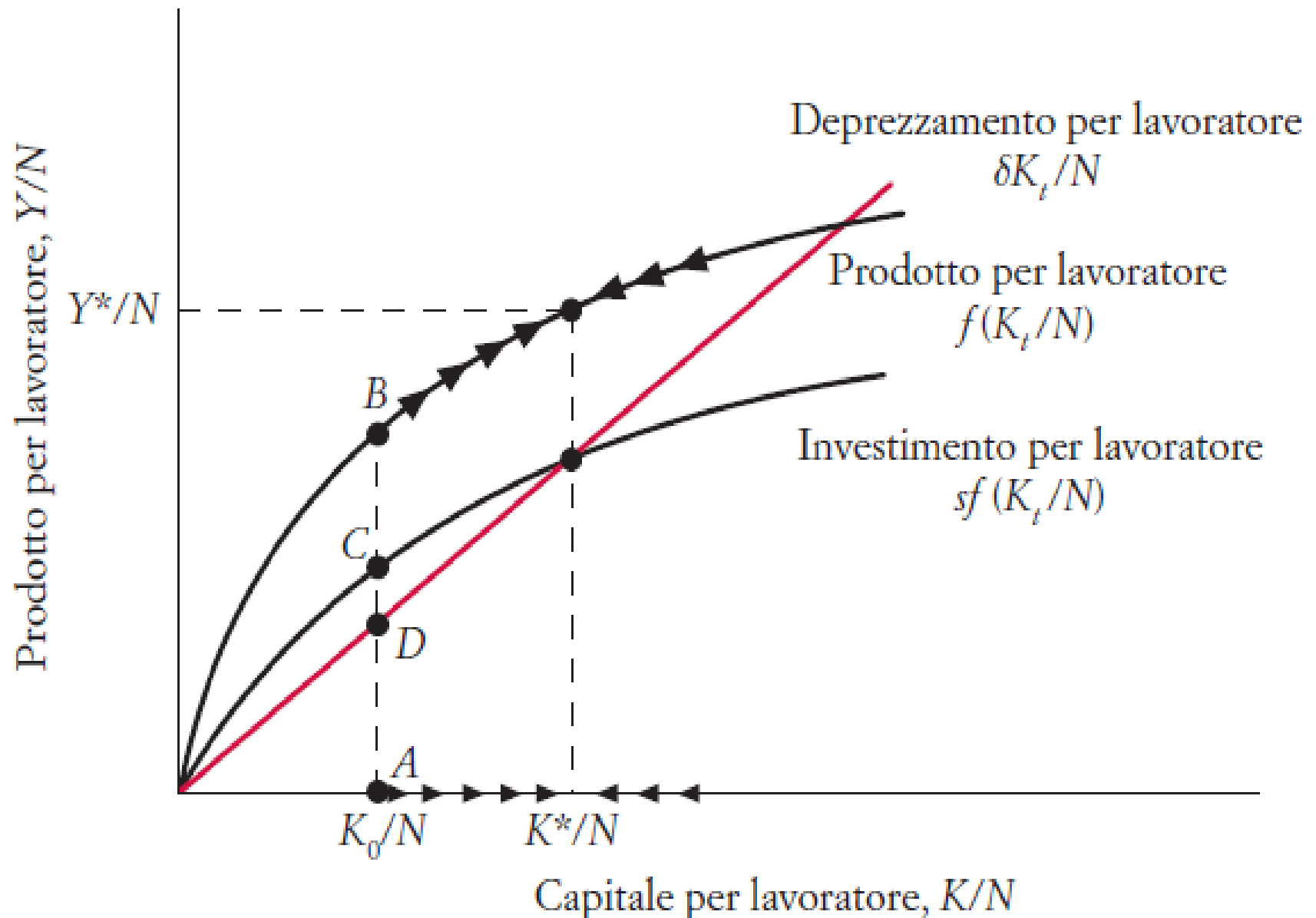
Ipotizziamo $k_0=0.5$ quant'è k_2 ?

$$k_{t+1} - k_t = 0.1\sqrt{k_t} - 0.1k_t$$

$$k_1 = (1 - 0.1)k_0 + 0.1\sqrt{k_0} = 0.521$$

$$k_2 = (0.9)k_1 + 0.1\sqrt{k_1} = 0.541$$

2.1. La dinamica del capitale e della produzione



dopo quanti periodi ho praticamente raggiunto lo stato stazionario?

$$k_{100} = 0.996$$

2.1. La dinamica del capitale e della produzione

Ipotizziamo $s_1=0.2$ quant'è k^* e y^* ?

$$s\sqrt{k^*} = \delta k^*$$

$$y^* = \sqrt{k^*} = 2 = \frac{s}{\delta}$$

$$k^* = 4 \quad y^* = 2$$

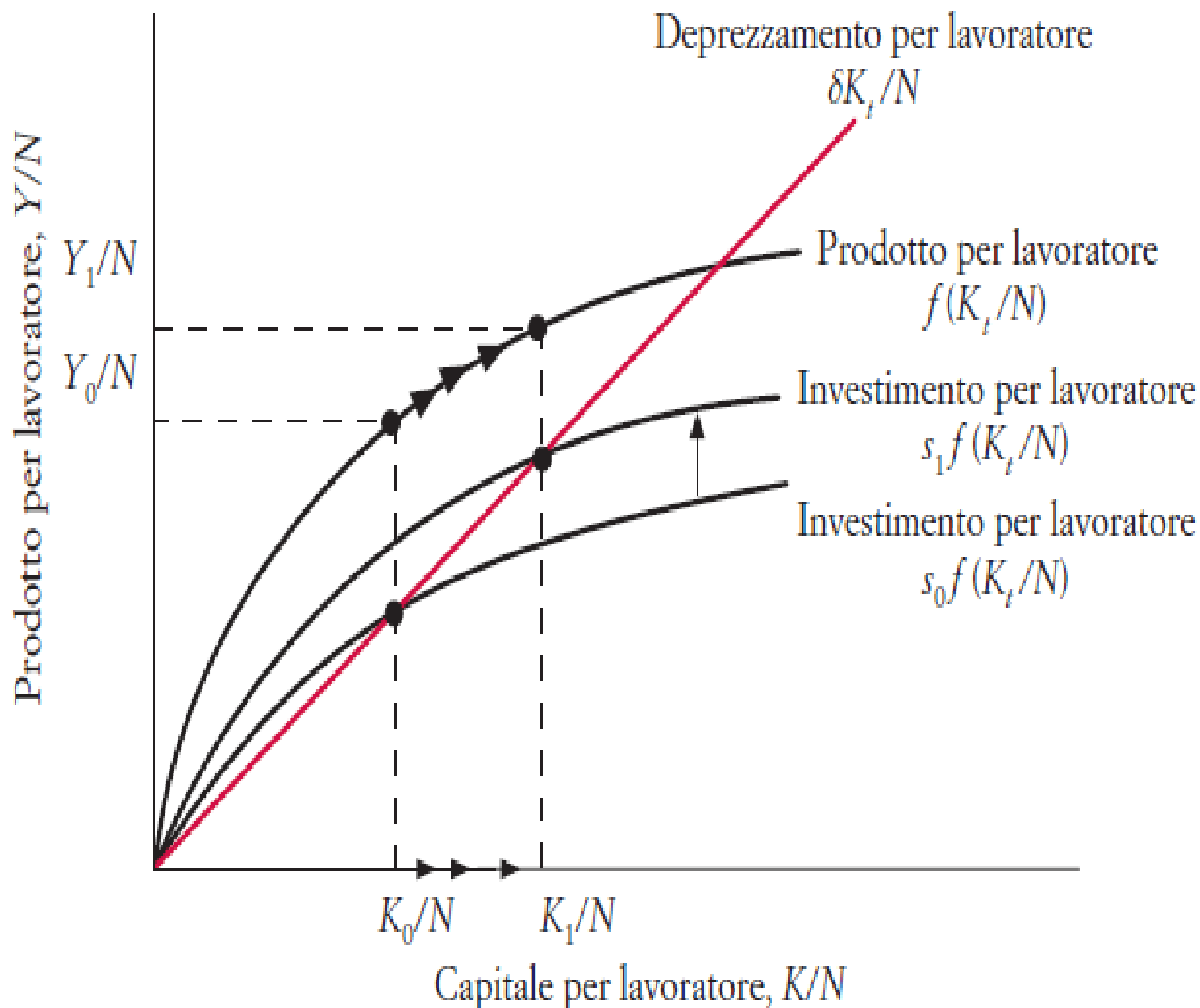
2.1. La dinamica del capitale e della produzione

Ipotizziamo $k_0=1$ quant'è k_2 ?

$$k_1 = (1 - 0.1)k_0 + 0.2\sqrt{k_0} = 1.1$$

$$k_2 = (0.9)k_1 + 0.2\sqrt{k_1} = 1.2$$

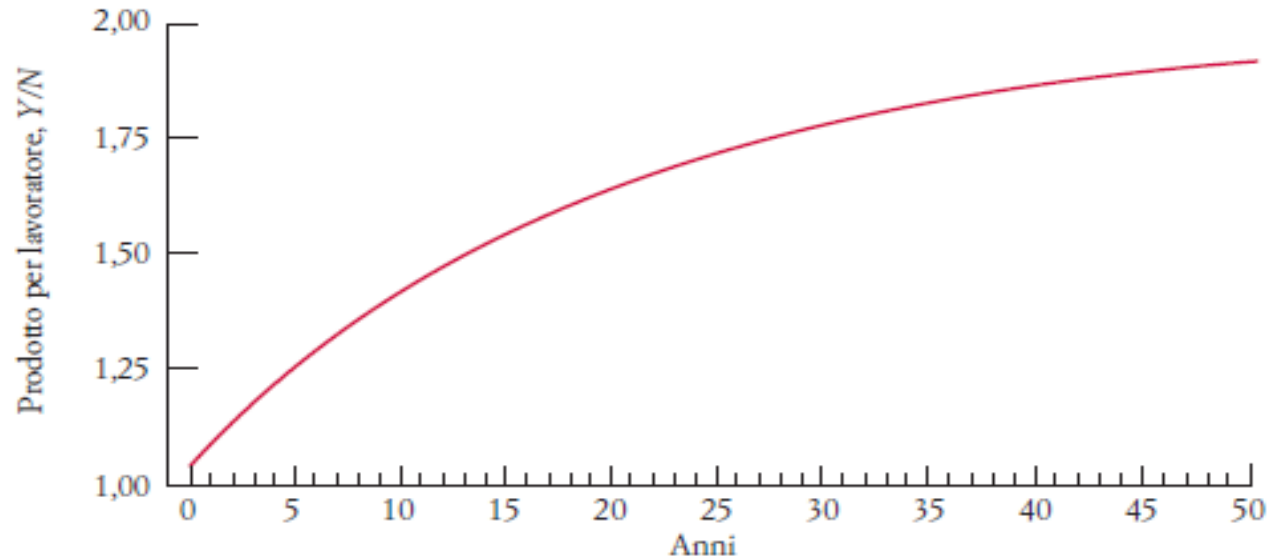
$$k_{100} = 3.975$$



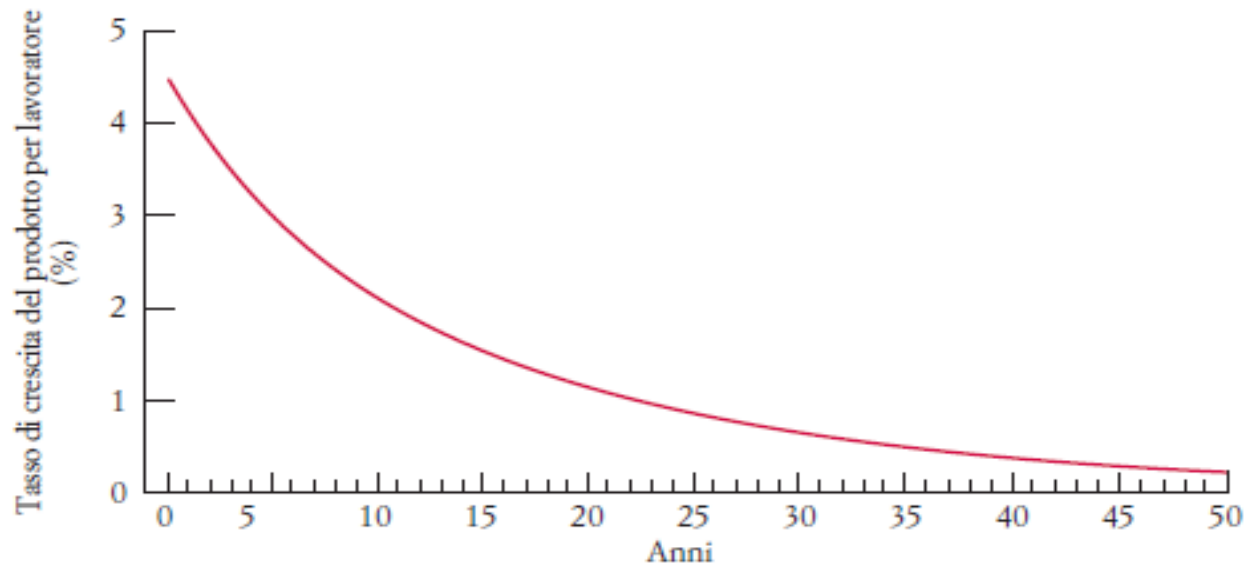
3.2. Gli effetti dinamici di un aumento del tasso di risparmio

FIG. 11.7. Effetti dinamici di un aumento del tasso di risparmio dal 10 al 20% sul livello e sul tasso di crescita del prodotto per lavoratore.

Dopo un aumento del tasso di risparmio, l'aggiustamento della produzione al suo nuovo livello richiede un lungo periodo di tempo. In altre parole, un aumento del tasso di risparmio comporta un lungo periodo di crescita più elevata.

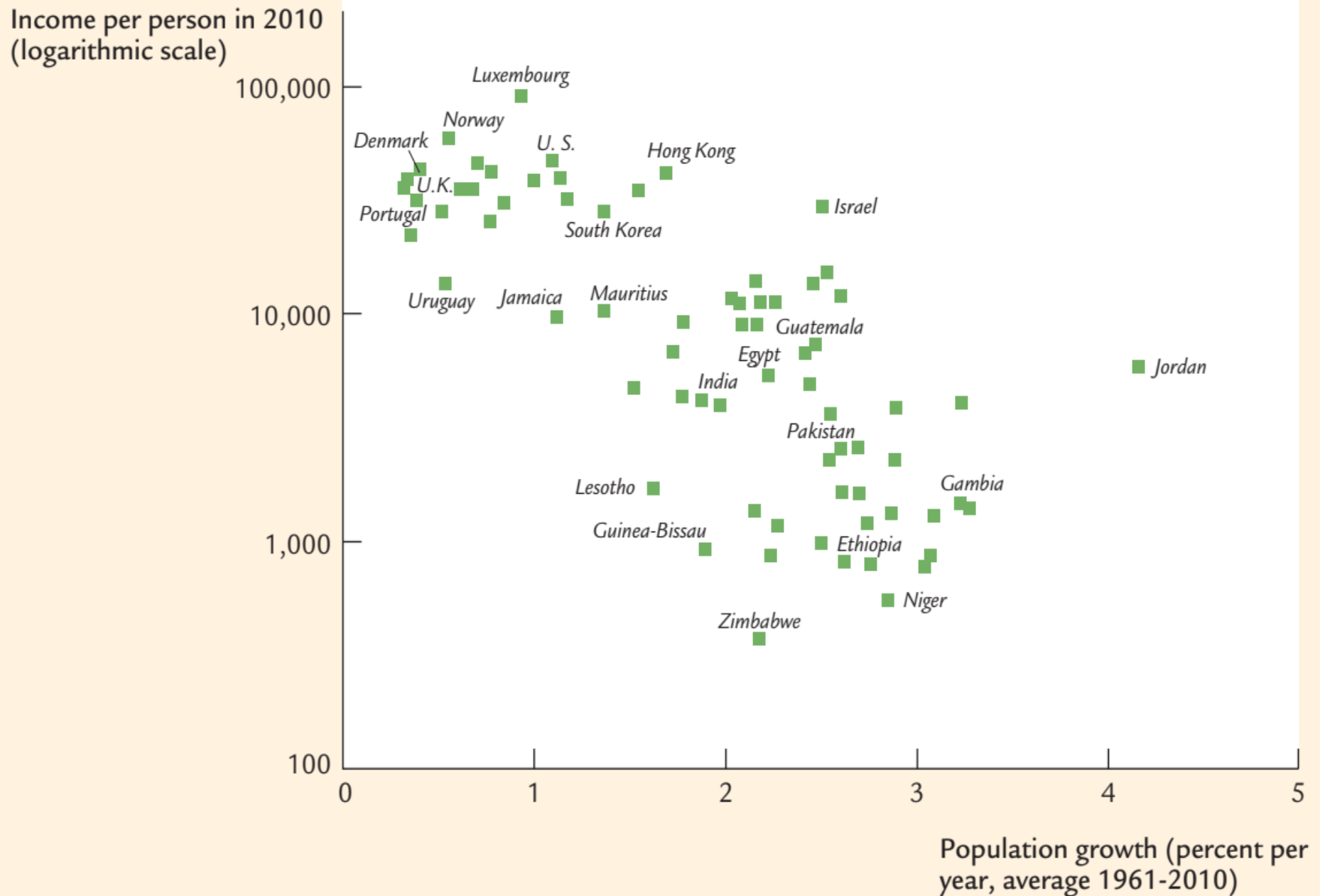


(a) Effetto sul livello di prodotto per lavoratore

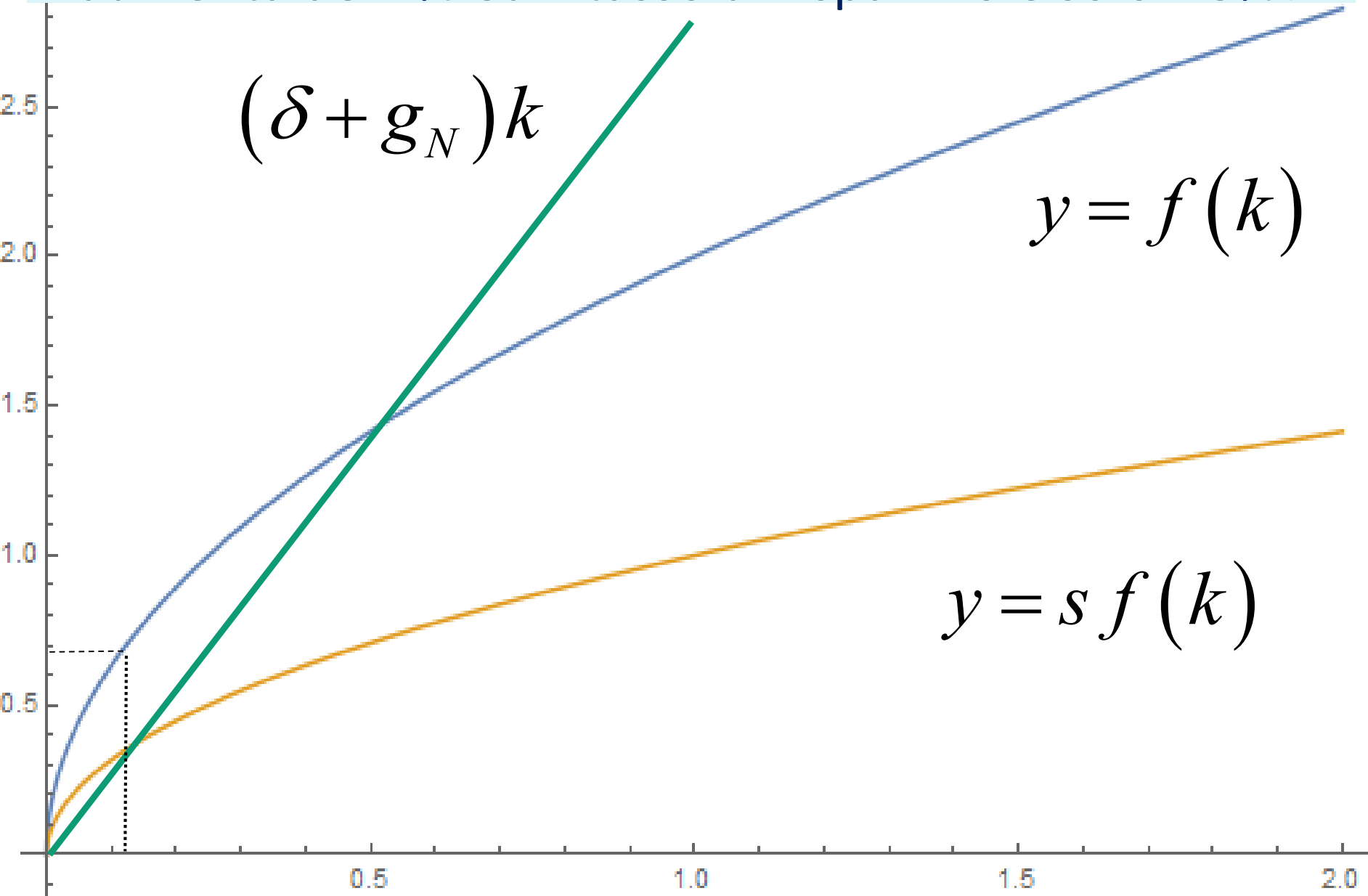


(b) Effetto sulla crescita della produzione per lavoratore

Gli effetti dinamici di un aumento della popolazione



Che succede in un'economia in cui la popolazione aumenta del 2% ed il tasso di risparmio è solo il 5%?



2.1. La dinamica del capitale e della produzione

$$k_{t+1} - k_t = sf(k_t) - (\delta + g_N)k_t$$

Se l'investimento per lavoratore eccede il deprezzamento per lavoratore e permette di compensare l'aumento della popolazione allora la variazione del capitale per lavoratore è positiva: il capitale per lavoratore aumenta.

2.1. La dinamica del capitale e della produzione

$$k_{t+1} - k_t = 0.05\sqrt{k_t} - (0.1 + 0.02)k_t$$

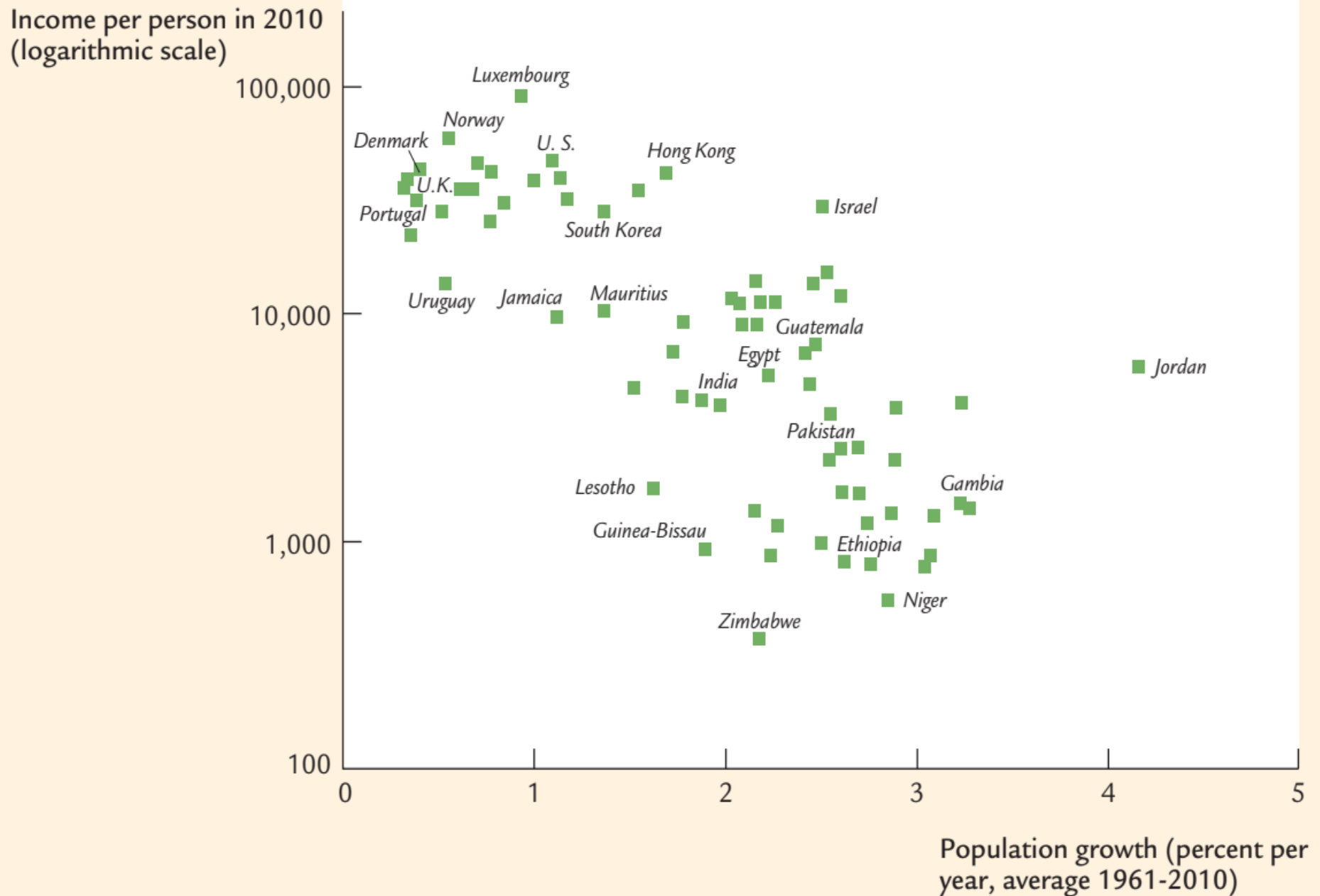
Che succede in un economia in la popolazione aumenta del 2% ed il tasso di risparmio è solo il 5% con deprezzamento ancora al 10%?

$$0.05\sqrt{k_t} = 0.12k_t$$

$$y^* = \sqrt{k^*} = \frac{s}{\delta + g_N} = \frac{0.05}{0.12} = 0.416$$

$$k^* = 0.174$$

Gli effetti dinamici di un aumento della popolazione



Prodotto pro capite vs PIL

Il prodotto pro capite rimane costante

$$y^* = 0.416$$

ma il PIL cresce: $Y^* \equiv y^* N$

$$\frac{dY^*/dt}{Y^*} = \frac{dN/dt}{N} = 0.02$$

Prodotto pro capite vs PIL

$$Y^* \equiv y^* N$$

$$\frac{dY^*}{dt} = y^* \frac{dN}{dt}$$

$$\frac{dY^*}{dt} = \frac{Y^*}{N} \frac{dN}{dt}$$

Se aumenta il tasso di risparmio si cresce di più

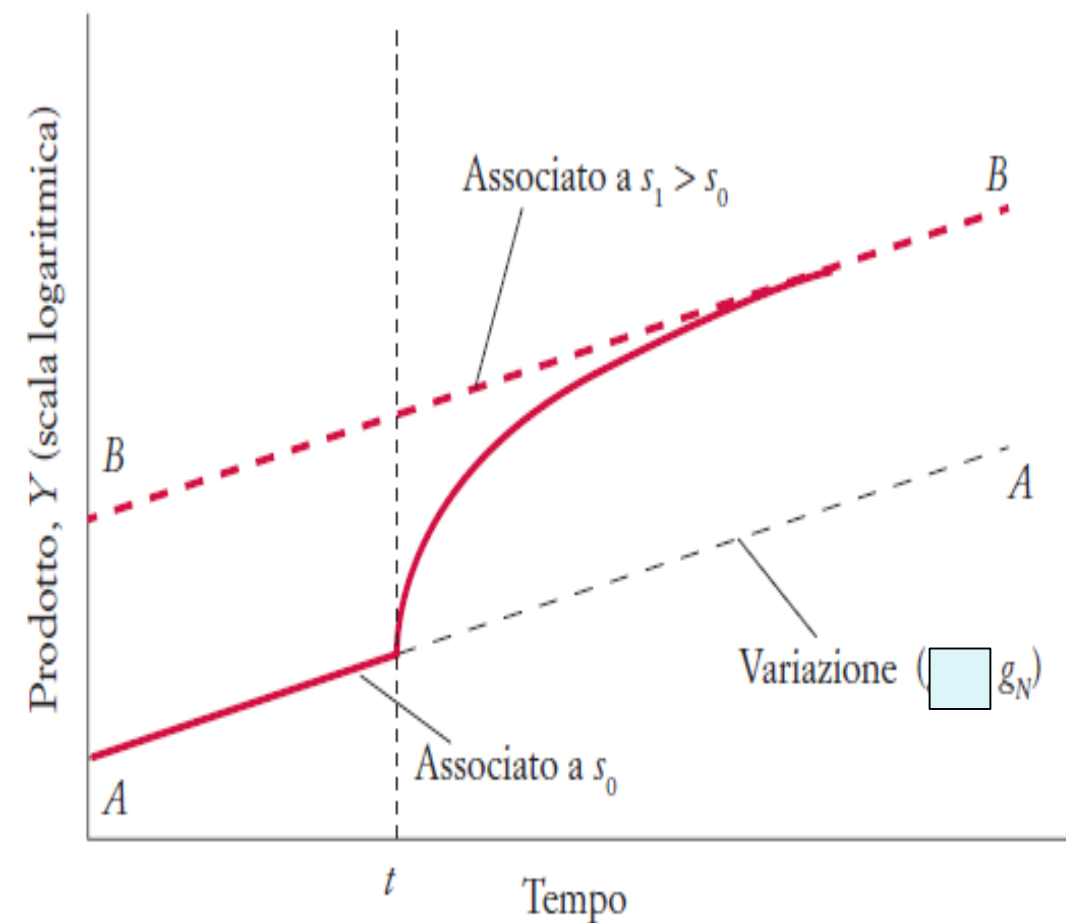


FIG. 11.5. Gli effetti di un aumento del tasso di risparmio sul prodotto per lavoratore in un'economia con progresso tecnologico.

Un aumento del tasso di risparmio determina un periodo di maggiore crescita fino a che la produzione raggiunge un sentiero più elevato.

2.3. Tasso di risparmio e consumo

Il governo può utilizzare vari strumenti per influenzare il tasso di risparmio.

Ma a quale tasso di risparmio dovrebbe ambire?

Spostiamo l'attenzione dal risparmio al consumo. Non necessariamente un aumento del risparmio provoca un aumento del consumo nel lungo periodo. Il consumo può diminuire nel breve e anche nel lungo.

2.3. Tasso di risparmio e consumo

Un'economia nella quale il tasso di risparmio sia uguale a zero è un'economia in cui il capitale è uguale a zero e quindi il consumo nullo nel lungo periodo.

Se il tasso di risparmio è uguale a 1, il livello di capitale e di produzione sarà molto alto. Ma poiché gli individui risparmiano tutto, il consumo sarà nullo.

2.3. Tasso di risparmio e consumo

Il livello di capitale associato a un valore del tasso di risparmio che massimizza il consumo per lavoratore è chiamato **livello di capitale di regola aurea**.

Aumenti di capitale oltre il livello di regola aurea non fanno altro che ridurre il consumo.

2.3. Tasso di risparmio e consumo

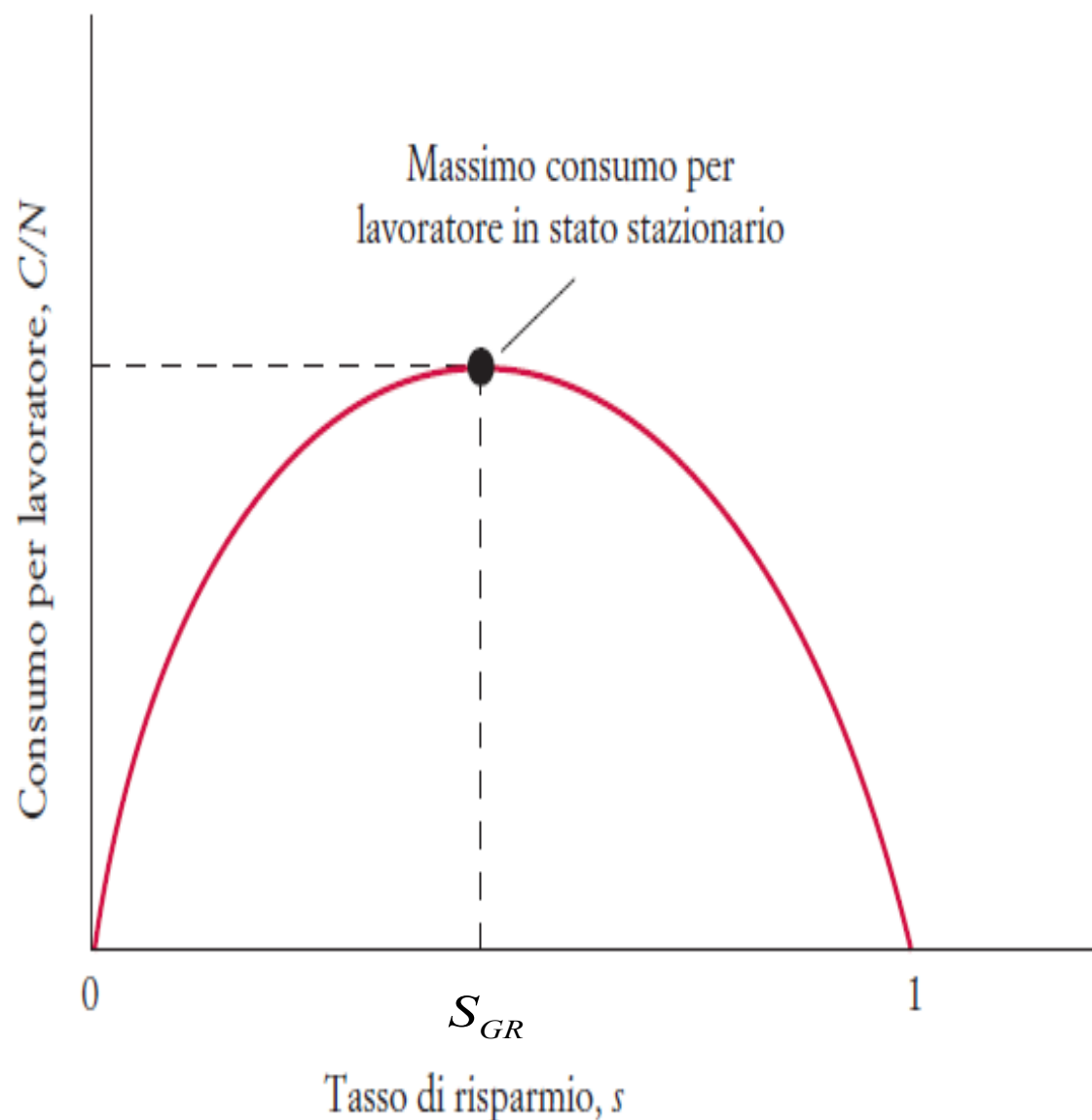


FIG. 11.6. Gli effetti del tasso di risparmio sul consumo per lavoratore in stato stazionario.

Un aumento del tasso di risparmio comporta inizialmente un incremento e poi un calo del consumo per lavoratore in stato stazionario.

In generale:

il consumo per lavoratore è uguale al prodotto per lavoratore meno il risparmio per lavoratore.

$$\frac{C}{N} = \frac{Y}{N} - s \frac{Y}{N}$$

Quest'ultimo è pure l'investimento LORDO per lavoratore

3.3. Il tasso di risparmio e la regola aurea

In stato stazionario, il capitale pro capite non varia, per cui l'investimento NETTO è nullo mentre quello LORDO è pari all'ammortamento :

$$\frac{C}{N} = \frac{Y}{N} - \delta \frac{K}{N}$$

$$c = y - \delta k$$

3.3. Il tasso di risparmio e la regola aurea

Sappiamo che in stato stazionario con $y = \sqrt{k}$

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta} \right)^2$$

$$y^* = \frac{s}{\delta}$$

poichè

$$c = y - \delta k$$

Troveremo che il consumo per lavoratore in stato stazionario è dato da:

$$c^* = \frac{s}{\delta} - \delta \left(\frac{s}{\delta} \right)^2$$

$$c^* = \frac{s - s^2}{\delta} = \frac{s(1 - s)}{\delta}$$

Un aumento del tasso di deprezzamento riduce il consumo pro capite

Il consumo di stato stazionario è una quadratica nel tasso di risparmio

2.3. Tasso di risparmio e consumo

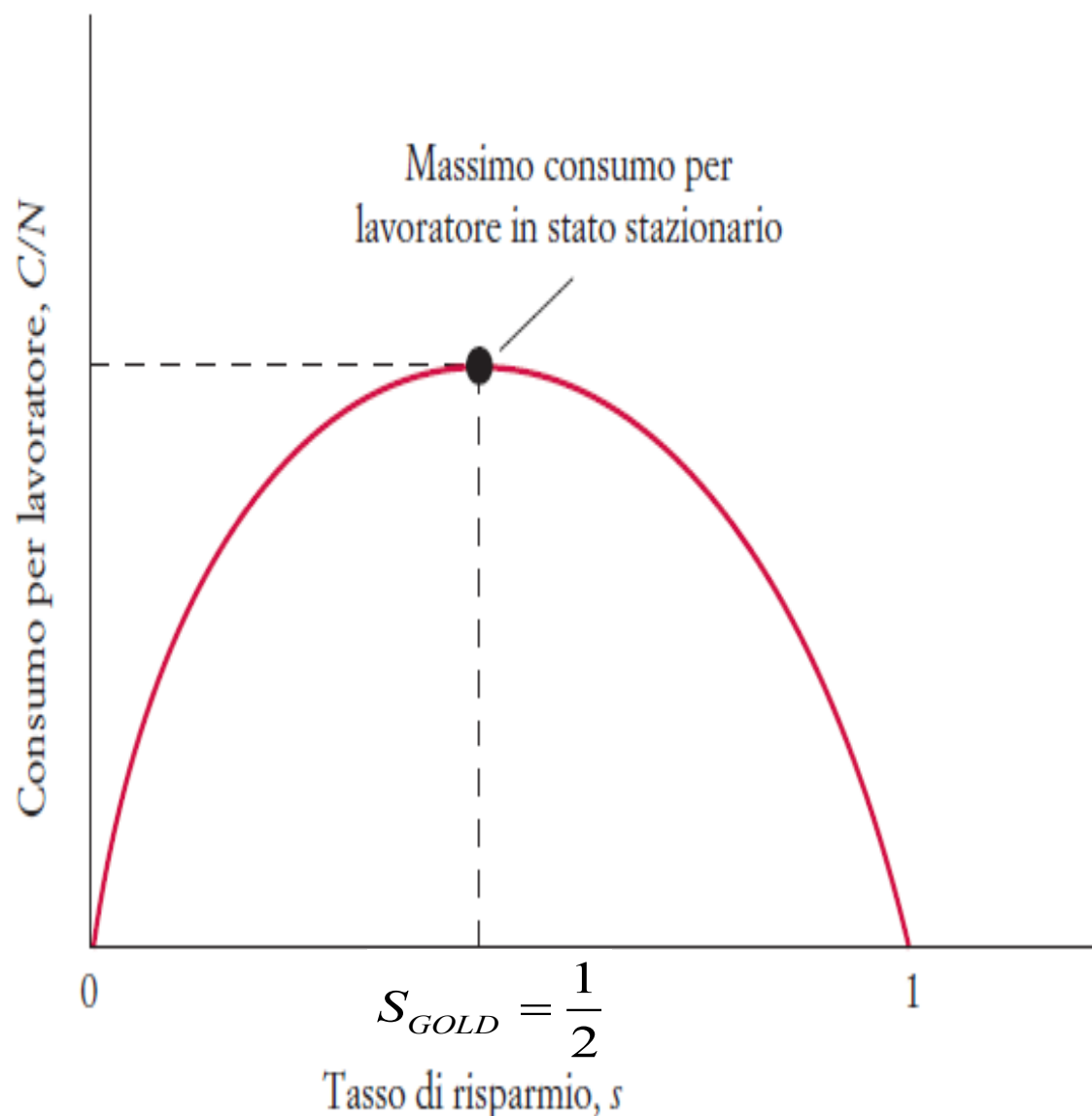
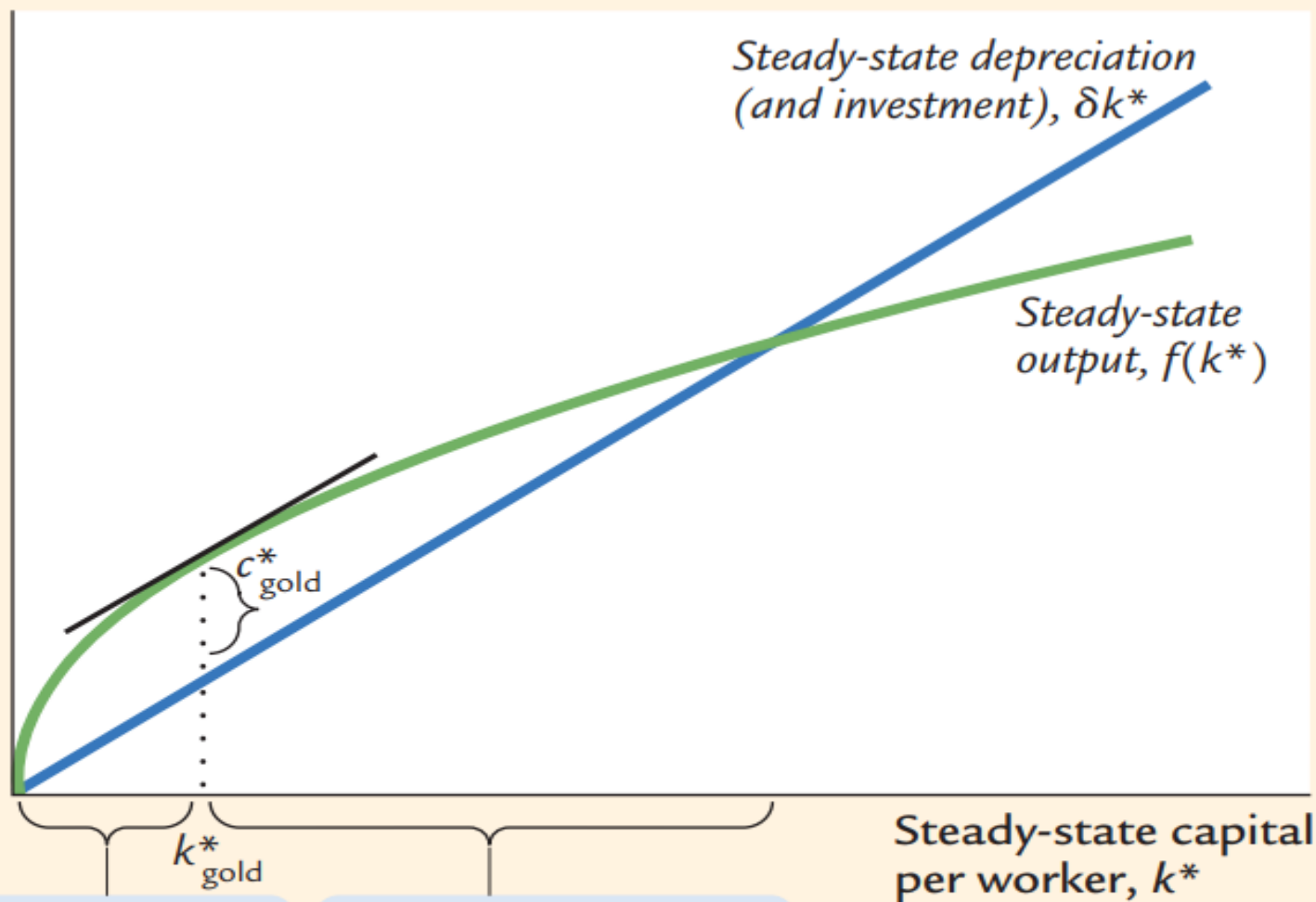


FIG. 11.6. Gli effetti del tasso di risparmio sul consumo per lavoratore in stato stazionario.

Un aumento del tasso di risparmio comporta inizialmente un incremento e poi un calo del consumo per lavoratore in stato stazionario.

Golden Rule at work

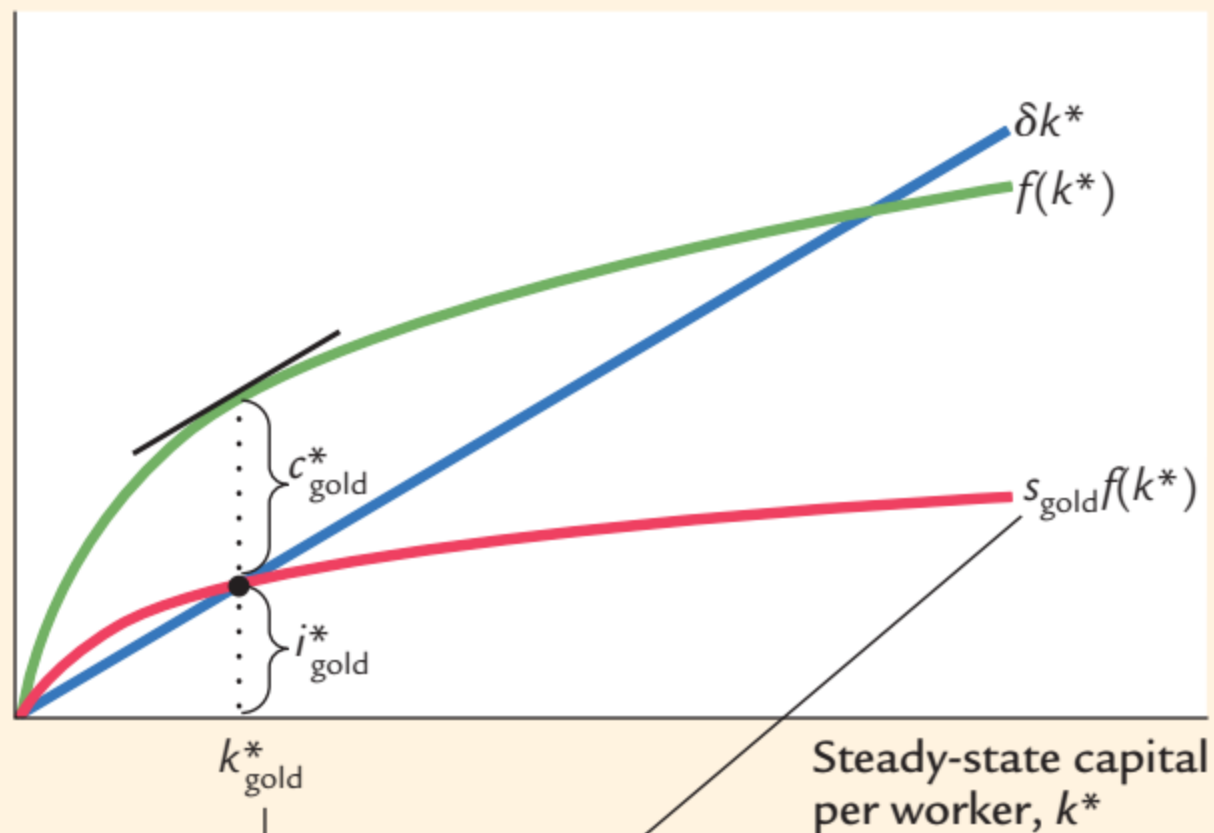
Steady-state
output and
depreciation



Below the Golden Rule steady state, increases in steady-state capital raise steady-state consumption.

Above the Golden Rule steady state, increases in steady-state capital reduce steady-state consumption.

Steady-state output,
depreciation, and
investment per worker



1. To reach the
Golden Rule
steady state ...

2. ...the economy
needs the right
saving rate.

The Saving Rate and the Golden Rule There is only one saving rate that produces the Golden Rule level of capital k^*_{gold} . Any change in the saving rate would shift the $sf(k)$ curve and would move the economy to a steady state with a lower level of consumption.

Cobb Douglas con Rendimenti Costanti

$$Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}$$

$$\frac{Y}{N} = K^{\alpha} N^{-\alpha} = \left(\frac{K}{N} \right)^{\alpha}$$

α = quota prodotto al fattore capitale

3.3. Il tasso di risparmio e la regola aurea

Senza crescita della popolazione l'investimento netto è nullo in corrispondenza di:

$$s(k^*)^\alpha = \delta k^* \qquad (k^*)^{1-\alpha} = \frac{s}{\delta}$$

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad y^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

3.3. Il tasso di risparmio e la regola aurea

$$1) s = \delta \text{ e } \alpha = 30\%$$

$$k^* = 1 \qquad y^* = 1$$

$$2) s = 11\%, \delta = 10\%, \alpha = 30\%$$

$$k^* = (1.1)^{\frac{1}{0.7}} = 1.146 \qquad y^* = 1.042$$

3.3. Il tasso di risparmio e la regola aurea

Consumo pro capite in stato stazionario:

$$c^* = y^* - \delta k^*$$

$$c^* = \left(\frac{s}{\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta \left(\frac{s}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Massimo consumo

$$c^* = \left(\frac{s}{\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta \left(\frac{s}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$c^* = x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \delta x^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\frac{dc^*}{dx} = \frac{\alpha}{1-\alpha} x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} - \delta \frac{1}{1-\alpha} x^{\frac{1}{1-\alpha}-1} = 0$$

$$\alpha x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} = \delta x^{\frac{1}{1-\alpha}-1}$$

$$\alpha x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} = \delta x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\frac{\alpha}{\delta} = x^{\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}}$$

$$\frac{\alpha}{\delta} = x^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\frac{\alpha}{\delta} = x = \frac{s}{\delta}$$

$$s = \alpha$$