UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Corso di Laurea in Fisica

Corso di Laurea in Matematica

**Programma del corso di GEOMETRIA I** (cognomi I-Z)

a.a. 2019/20

Prof. Emilia Mezzetti

Gruppi, gruppi abeliani. Esempi di gruppi: gruppi numerici, gruppi di funzioni, $Z_n$. Relazioni d'equivalenza, insieme quoziente. Relazione di congruenza modulo n. Campi. I campi $Z_p$, p primo.

Spazi vettoriali su un campo K. Sottospazi vettoriali. Esempi: $K^n$, matrici m×n a coefficienti in K: M(m×n,K), spazio dei vettori liberi del piano, C come R-spazio vettoriale, K[t] e suoi sottospazi. Intersezione e unione di sottospazi. Combinazioni lineari di vettori; sottospazio generato da un sottinsieme. Famiglie di vettori linearmente dipendenti e linearmente indipendenti. Vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno è combinazione lineare dei rimanenti. Sistemi di generatori. Spazi vettoriali finitamente generati. Basi di uno spazio vettoriale come sistemi di generatori linearmente indipendenti. Base canonica di $K^n$. Coordinate di un vettore rispetto a una base. Lemma dello scambio. Teorema di completamento a una base. Due basi finite hanno lo stesso numero di elementi. Dimensione di uno spazio vettoriale. Da ogni sistema di generatori si può estrarre una base. Esistenza di una base per ogni spazio vettoriale (senza dim. nel caso infinito). Dimensione di un sottospazio. Sottospazio somma. Relazione di Grassmann. Somma diretta. Sottospazi supplementari. Esistenza di un supplementare di un sottospazio.

Matrici, spazio delle righe e spazio delle colonne. Matrici quadrate triangolari superiori e inferiori, matrici diagonali. Prodotto righe per colonne. Rango per righe e per colonne. Sistemi lineari di equazioni. Matrice dei coefficienti e matrice completa di un sistema lineare. Sistemi lineari equivalenti. Combinazioni lineari di equazioni. Spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Trasformazioni elementari di matrici. Matrici a gradini. Algoritmo di Gauss per trasformare una matrice m×n in una matrice a gradini. Applicazione alla risoluzione dei sistemi lineari. Sottospazi affini, giacitura. Teorema di Rouché - Capelli. Struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare compatibile. Variabili libere e variabili dipendenti. Equazioni cartesiane ed equazioni parametriche di sottospazi vettoriali e affini.

Applicazioni lineari. Applicazione lineare L(A) associata a una matrice A. Immagine e controimmagine di un sottospazio in un'applicazione lineare. Sottospazio immagine. Nucleo. Teorema della dimensione. Applicazioni lineari tra spazi vettoriali della stessa dimensione finita. Endomorfismi. Spazio vettoriale quoziente e sua dimensione. Epimorfismo canonico. Rango per righe e rango per colonne coincidono. Inversa di un'applicazione lineare biiettiva. Isomorfismi. Spazi vettoriali isomorfi. Teorema di determinazione di un'applicazione lineare. Ogni K-spazio vettoriale di dimensione n è isomorfo a $K^n$, spazi vettoriali della stessa dimensione sono isomorfi. Isomorfismo fra C e $R^2$.

Struttura di spazio vettoriale sull'insieme Hom(V,W) delle applicazioni lineari di V in W, spazio vettoriale duale, base duale. Matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi fissate. Esistenza di una base rispetto a cui la matrice ha forma canonica. Isomorfismo fra Hom(V,W) e M(n×m,K). Per ogni scelta di base la matrice che rappresenta f ha rango uguale al rango di f. Composta di applicazioni lineari è lineare. Matrice di una composta di applicazioni lineari. Struttura di K-algebra sullo spazio degli endomorfismi di V e su quello delle matrici n×n, sono isomorfi come K-algebre fissata una base di V.

Matrici invertibili. Caratterizzazione come matrici associate a isomorfismi, e come matrici quadrate di rango massimo. Il gruppo lineare $GL_n(K)$. Se esiste B tale che AB è la matrice identica, allora A è invertibile. Algoritmo per il calcolo dell'inversa.

Matrice di passaggio da una base B a una base B': come opera, come si costruisce. Matrice del cambiamento di base inverso è la matrice inversa. Relazione fra matrici che rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a coppie di basi diverse. Matrici simili, relazione di similitudine è una relazione d'equivalenza. Matrici che differiscono per una matrice invertibile hanno lo stesso rango.

Gruppo simmetrico $S_n$. Cicli, trasposizioni, inversioni, ogni permutazione è prodotto di cicli disgiunti, è prodotto di trasposizioni, segno di una permutazione. Gruppo alternante. Il segno di un prodotto di permutazioni è il prodotto dei segni (senza dim.). Forme multilineari alternanti. Proprietà di antisimmetria. Funzioni determinante su uno spazio vettoriale. Formula di Leibniz. Esistenza e unicità di una funzione determinante che vale 1 su una base fissata. Determinante di una matrice quadrata. Come varia il determinante per trasformazioni elementari. Determinante di una matrice triangolare o triangolare a blocchi. Teorema di Binet. Gruppo SL(n,K). Determinante della matrice inversa. Determinante di un endomorfismo. Matrice aggiunta, espressione della matrice inversa. Minore complementare e complemento algebrico di un elemento di una matrice. Sviluppo di Laplace di un determinante. Teorema di Cramer per la risoluzione di un sistema lineare quadrato. Rango di una matrice come massimo ordine di un minore invertibile. Interpretazione del determinante come volume (cenni).

Autovettori e autovalori di un endomorfismo e di una matrice quadrata. Autospazi. Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Endomorfismi e matrici diagonalizzabili. Un endomorfismo è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di autovettori. Polinomio caratteristico. Radici di un polinomio e loro moltepicità. Il caso complesso. Teorema fondamentale dell'algebra (solo enunciato).
Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore; quella algebrica è sempre maggiore o uguale a quella geometrica. Un endomorfismo su K è diagonalizzabile se e solo se il polinomio caratteristico ha tutte le radici in K, e per ogni autovalore le due molteplicità sono uguali. Endomorfismi e matrici quadrate triangolarizzabili. Condizione necessaria e sufficiente per la triangolarizzabilità.
Potenze di un endomorfismo, autospazi generalizzati. Se f è triangolarizzabile, V è somma diretta degli autospazi generalizzati. Blocchi di Jordan. Teorema di Jordan sulla forma normale di una matrice (senza dimostrazioni). Basi di Jordan. Metodo algoritmico per calcolare la forma normale di Jordan e una base di Jordan di una matrice trangolarizzabile.

Forme bilineari simmetriche su spazi vettoriali reali, e sesquilineari hermitiane su spazi vettoriali complessi. Prodotti scalari, spazi euclidei e unitari. Matrici simmetriche e hermitiane. Matrici associate alle forme bilineari simmetriche o sesquilineari hermitiane. Norme. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Norma associata a un prodotto scalare. Formula di polarizzazione. Angolo convesso di due vettori non nulli in uno spazio vettoriale euclideo. Ortogonalità tra vettori e sottospazi. Complemento ortogonale di un sottospazio. Basi ortonormali. Esistenza di basi ortonormali: algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Somma ortogonale di sottospazi.

Endomorfismi ortogonali e unitari. Proprietà degli autovalori e autovettori degli endomorfismi ortogonali e unitari. Matrici ortogonali e unitarie. Matrice associata a un automorfismo ortogonale o unitario rispetto a una base ortonormale. Gruppo ortogonale e gruppo unitario. Forma normale per endomorfismi unitari. Diagonalizzabilità di matrici unitarie. Forma normale per endomorfismi e matrici ortogonali. Rotazioni e riflessioni nel piano. Classificazione delle matrici ortogonali 2x2 e 3x3.
Endomorfismi autoaggiunti. Proprietà degli autovalori e autovettori degli endomorfismi autoaggiunti. Matrice associata a un automorfismo autoaggiunto rispetto a una base ortonormale. Forma normale per endomorfismi autoaggiunti (teorema spettrale). Diagonalizzabilità di matrici simmetriche e hermitiane. Prodotto vettoriale di due vettori in $R^3$. Forma quadratica associata a una forma bilineare simmetrica reale; assi principali.
Matrici congruenti. Ogni matrice simmetrica reale è congruente a una matrice diagonale. Segno degli autovalori di una matrice simmetrica reale e segnatura. Teorema di Sylvester (senza dim.). Regola dei segni di Cartesio (senza dim.).

**Testi consigliati**

M. Abate, Geometria, McGraw Hill
C. Ciliberto, Algebra Lineare, Bollati Boringhieri, 1994
E. Sernesi, Geometria 1, Bollati Boringhieri, 1989
P. Ellia, Appunti di Geometria 1, Pitagora Editrice, Bologna, 1997
G. Fischer, Lineare Algebra, Vieweg Studium, 1995
S. Lang, Linear Algebra. Addison-Wesley, 1966
F. Bottacin, Algebra lineare e geometria, Esculapio Bologna, 2016

Appunti delle lezioni della prof.ssa Mezzetti, testi di esercizi e temi d'esame sono disponibili sulla piattaforma Moodle:
https://moodle2.units.it/