

1. Esercizio

1. Utilizzare i valori di porosità iniziale (ϕ_0) per calcolare la conduttività termica con le due equazioni sottostanti (geometric mean e square root mean) in ciascuno strato di una stratigrafia così composta:

Sand: 1300 m (depth), 35% (ϕ_0), 1.79 W/mK (conductivity)

Siltstone: 3500 m (depth) 30% (ϕ_0), 1.58 W/mK (conductivity)

Clay: 4800 m (depth) 25% (ϕ_0), 1.43 W/mK (conductivity)

Marl: 7200 m (depth) 15% (ϕ_0), 1.68 W/mK (conductivity)

Limestone: 10000 m (depth) 25% (ϕ_0), 2.37 W/mK (conductivity)

Factor b is 0.180 and 0.396 km^{-1} in carbonate rocks, 0.298 and 0.461 km^{-1} in marls and silty marls, 0.284 and 0.216 km^{-1} in sandstones and calcarenites, and 0.293 and 0.379 km^{-1} in shales and siltstones.

$$k_{in} = k_m^{(1-\phi)} k_w^\phi \quad \phi = \phi_0 e^{-bz} \quad (\text{per la stima della porosità } z \text{ è in km se } b \text{ è in km})$$

$$\lambda(z) = \lambda_m^{1-\phi(z)} \lambda_f^{\phi(z)} \quad \lambda(z) = [(1 - \phi(z)) \times \lambda_m^{1/2} + \phi(z) \times \lambda_f^{1/2}]^2$$

(geometric mean)

(square root mean)

$$K_w = 0.6 \text{ W/mK}$$

2. Fare un plot dei valori di conduttività termica ottenuti in funzione della profondità.
3. Calcolare il valore medio di conduttività termica di ciascuno strato (media aritmetica) e della formazione sedimentaria applicando una media armonica (usata nel caso di una stratificazione orizzontale).

Esercizio 2

1. Costruire una geoterma nei primi 10 km usando un gradiente che varia da 30°C/km (a 0 km) a 21°C/km (a 10 km). Ripetere il primo esercizio considerando la dipendenza della conduttività dalla temperatura usando le equazioni sottostanti per la conduttività termica della matrice e dell'acqua presente nei pori.

Condizione iniziale: T_0 (0 km) = 0; T_1 (1 km) = 30°C

$$k_m = 1.8418 + (k_0 - 1.8418) \left(\frac{1}{0.002732 T + 0.7463} - 0.2485 \right)$$

$$k_w = 0.5648 + 1.878 \times 10^{-3} T - 7.231 \times 10^{-6} T^2 \quad \text{for } T \leq 137^\circ\text{C}$$

$$K_w = 0.6020 + 1.309 \times 10^{-3} T - 5.140 \times 10^{-6} T^2 \quad \text{for } T > 137^\circ\text{C}$$

2. Fare un plot dei valori di conduttività termica ottenuti in funzione della profondità.
3. Calcolare il valore medio di conduttività termica della formazione sedimentaria, applicando una media armonica (usata nel caso di una stratificazione orizzontale).

Esercizio 3

1. Calcolare la conduttività termica reticolare e radiativa (e la loro somma) con le equazioni di Hasterock e Chapman (2011), usando la geoterma in Tab. 4 e la pressione in Tab. 3, per una olivina contenente il 90% di forsterite e il 10% di fayalite (fare la media geometrica).
2. Fare un plot dei valori di conduttività termica ottenuti in funzione della temperatura.

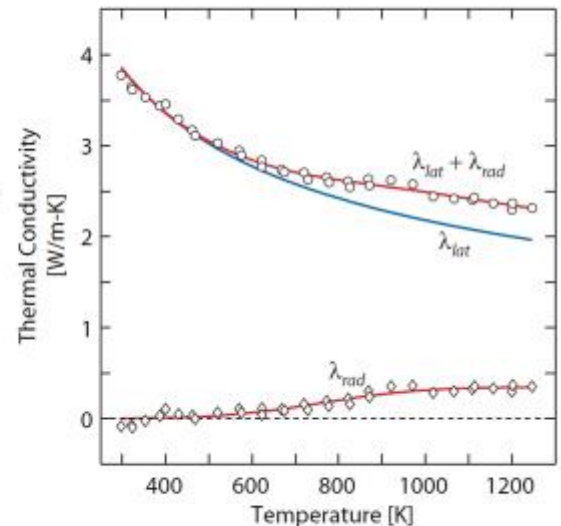
Thermal Conductivity (Lattice+Radiative Conductivity)

$$\lambda_L(P, T) = \lambda^* \left(\frac{298}{T} \right)^n \left(1 + \frac{K'_T}{K_T} P \right)$$

λ_0 = conductivity at 0 GPa and 298 K
 K_T and K'_T = isothermal bulk modulus and its first pressure derivative
 n = an empirically derived fitting constant.

$$\lambda_R(T) = \frac{1}{2} \lambda_{Rmax} \left[1 + \exp\left(-\frac{T - T_R}{\omega}\right) \right]$$

λ_{Rmax} = maximum radiative conductivity,
 ω = scaling factor
 T_R = temperature at $0.5\lambda_{Rmax}$



Hasterock and Chapman, 2011, EPSL, 307

Empirical constants for estimating conductivity.

mineral	λ_0 W/m-K	λ_1 W/m-K	λ_2 W/m-K	n	λ_{Rmax} W/m-K	ω K	T_R K	Notes
a-quartz	8.79			1.48	1.62	153	558	1,2
b-quartz	0.99			-1.00	1.62	153	558	1,2
orthoclase	1.79			-0.27	0.390	264	864	2
plagioclase (an)	2.2	-2.18	1.9	-0.21	0			3,4,5,6
biotite	2.27			1.54	0.233	364	520	7,8
hornblende	2.65			0.5	0.345	256	762	5,9,10,11,12
clinopyroxene	4.25			0.54	0.345	256	762	5,13,12,14
orthopyroxene	3.37			0.3	0.345	256	762	5,13,12
olivine (fo)	3.09	-1.17	3.35	0.49	0.345	256	762	5,9,13,12
spinel (sp)	11.94	5.47	8.71	1.24	0			15,16
garnet (py)	4.97	-7.42	8.45	0.37	0			16,17,18

Lattice conductivity is computed as, $\lambda^0 = \lambda_0 + \lambda_1\chi + \lambda_2\chi^2$, where χ is the mole fraction of the end-member (an) anorthite, (fo) forsterite, (sp) spinel, and (py) pyrope.

Physical properties and empirical constants for mineral end-members										
Mineral	w g mol ⁻¹	ρ_{298} kg m ⁻³	$a_0 \times 10^5$ K ⁻¹	$a_1 \times 10^8$ K ⁻²	a_2 K	K_T GPa	K'_T	γ_{th}	δT	Notes
alpha-quartz	60.08	2648	1.4170	9.6581	-1.6973	37.1	5.99	0.7	8.42	1,2
beta-quartz	60.08	2530	-0.4400			57	4	0.1	4.11	1,2
orthoclase	278.34	2555	3.4000			58.3	4	0.4	4.44	1,2
albite	262.22	2620	1.9801	1.0065	-0.9760	53.8	6	0.6	6.57	1,2,8
anorthite	278.21	2760	1.2491	-0.0162	0.0161	82.5	3.2	0.6	3.47	1,2,8
phlogopite	417.29	2788	5.8000			54	7.8	0.6	4.55	1,2,3,4
hornblende	864.70	3248	2.0750	1.0270		94	4	1.1	5.1	1,2,3
diopside	216.56	3272	3.3300			113	4.8	1	6.04	1,2
hedenbergite	248.10	3651	2.9800			119	4	1.5	5.21	1,2,3
enstatite	100.40	3206	2.9720	0.5711		105.8	8.5	1.01	9.39	1,5,9
ferrosillite	131.93	4003	2.8750			100	8.8	0.88	9.05	1,6,10
forsterite	140.71	3222	2.8540	1.0080	-0.3842	128	4.2	0.99	5.19	1,2,11
fayalite	203.78	4400	2.3860	1.1530	-0.0518	135	4.2	1.06	5.26	1,2,11
spinel	142.27	3575	1.9600	1.6400		205	4.1	1.73	6.5	1,7
pyrope	403.15	3565	2.3110	0.5956	-0.4538	173	5	1.29	5.3	1,2
almandine	497.75	4324	1.7760	1.2140	-0.5071	174	6	1.29	5.52	1,2

Depth (km)	Pressure (GPa)
0	0
3.5	0.1
35	1
50	1.45
75	2.285
100	3.115
125	3.945
150	4.78

Tab. 3 Pressure vs Depth

Depth (km)	T (°C)
0	0
0.5	7.25
1	14.5
1.5	21.75
2	29
2.5	36.25
3	43.5
3.5	50.75
4	58
4.5	65.25
5	72.5
5.5	79.75
6	87
6.5	94.25
7	101.5
7.5	108.75
8	116
8.5	123.25
9	130.5
9.5	137.75
10	145
10.5	151.5
11	158

11.5	164.5
12	171
12.5	177.5
13	184
13.5	190.5
14	197
14.5	203.5
15	210
15.5	216.5
16	223
16.5	229.5
17	236
17.5	242.5
18	249
18.5	255.5
19	262
19.5	268.5
20	275
20.5	280.75
21	286.5
21.5	292.25
22	298
22.5	303.75
23	309.5
23.5	315.25
24	321
24.5	326.75
25	332.5
25.5	338.25
26	344
26.5	349.75
27	355.5
27.5	361.25
28	367
28.5	372.75
29	378.5
29.5	384.25
30	390
30.5	395.75
31	401.5
31.5	407.25
32	413
32.5	416
33	420
33.5	424
34	428
34.5	432
35	436
35.5	440
36	444

36.5	448
37	452
37.5	456
38	460
38.5	464
39	468
39.5	472
40	476
40.5	480
41	484
41.5	488
42	492
42.5	496
43	500
43.5	504
44	508
44.5	512
45	516
45.5	520
46	524
46.5	528
47	532
47.5	536
48	540
48.5	544
49	548
49.5	552
50	556
50.5	560
51	564
51.5	568
52	572
52.5	576
53	580
53.5	584
54	588
54.5	592
55	596
55.5	600
56	604
56.5	608
57	612
57.5	616
58	620
58.5	624
59	628
59.5	632
60	636
60.5	640
61	644

61.5	648
62	652
62.5	656
63	660
63.5	664
64	668
64.5	672
65	676
65.5	680
66	684
66.5	688
67	692
67.5	696
68	700
68.5	704
69	708
69.5	712
70	716
70.5	720
71	724
71.5	728
72	732
72.5	736
73	740
73.5	744
74	748
74.5	752
75	756
75.5	760
76	764
76.5	768
77	772
77.5	776
78	780
78.5	784
79	788
79.5	792
80	796
80.5	800
81	804
81.5	808
82	812
82.5	816
83	820
83.5	824
84	828
84.5	832
85	836
85.5	840
86	844

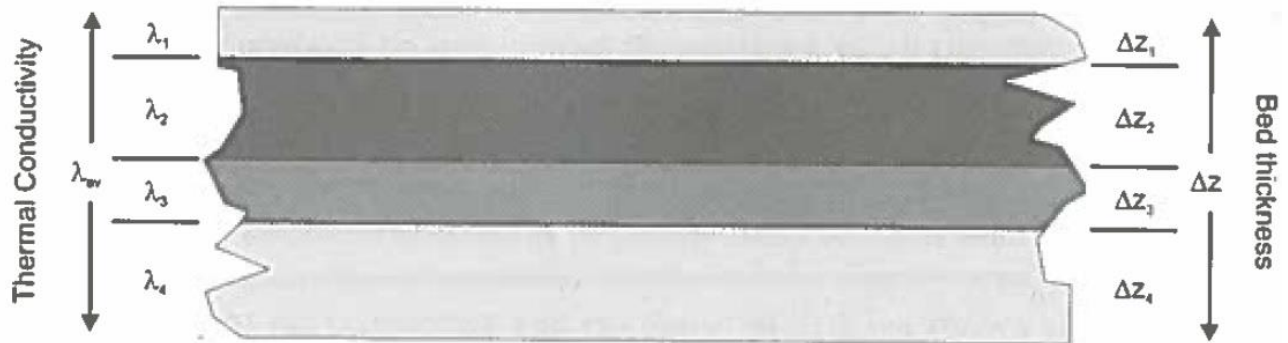
86.5	848
87	852
87.5	856
88	860
88.5	864
89	868
89.5	872
90	876
90.5	880
91	884
91.5	888
92	892
92.5	896
93	900
93.5	904
94	908
94.5	912
95	916
95.5	920
96	924
96.5	928
97	932
97.5	936
98	940
98.5	944
99	948
99.5	952
100	956
100.5	960
101	964
101.5	968
102	972
102.5	976
103	980
103.5	984
104	988
104.5	992
105	996
105.5	1000
106	1004
106.5	1008
107	1012
107.5	1016
108	1020
108.5	1024
109	1028
109.5	1032
110	1036
110.5	1040
111	1044

111.5	1048
112	1052
112.5	1056
113	1060
113.5	1064
114	1068
114.5	1072
115	1076
115.5	1080
116	1084
116.5	1088
117	1092
117.5	1096
118	1100
118.5	1104
119	1108
119.5	1112
120	1116
120.5	1120
121	1124
121.5	1128
122	1132
122.5	1136
123	1140
123.5	1144
124	1148
124.5	1152
125	1156
125.5	1160
126	1164
126.5	1168
127	1172
127.5	1176
128	1180
128.5	1184
129	1188
129.5	1192
130	1196
130.5	1200
131	1204
131.5	1208
132	1212
132.5	1216
133	1220
133.5	1224
134	1228
134.5	1232
135	1236
135.5	1240
136	1244

136.5	1248
137	1252
137.5	1256
138	1260
138.5	1264
139	1268
139.5	1272
140	1276
140.5	1280
141	1284
141.5	1288
142	1292
142.5	1296
143	1300
143.5	1304
144	1308
144.5	1312
145	1316
145.5	1320
146	1324
146.5	1328
147	1332
147.5	1336
148	1340
148.5	1344
149	1348
149.5	1352
150	1356

Tab.4 Temperature vs Depth

Appendix: Harmonic Mean



$$\lambda_{av} = \Delta Z / [\Delta z_1/\lambda_1 + \Delta z_2/\lambda_2 + \Delta z_3/\lambda_3 + \Delta z_4/\lambda_4]$$

λ_i = thermal conductivity of i th bed

ϕ_i = fractional proportion

z_i = thickness of the i th bed

Z = total thickness of sequence

$$\frac{1}{\lambda_B} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i}{\lambda_i}$$

$$\frac{1}{\lambda_B} = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\lambda_i}$$