
IL CONTATTO RUOTA-VIA

Indice

1	Il contatto ruota-via	3
1.1	Modello di Coulomb	3
1.1.1	Applicazione del modello di Coulomb al contatto ruota-via	4
1.1.2	Limiti del modello di Coulomb	6
2	Contatto pneumatico strada: forza longitudinale	7
2.1	Pseudoslittamento longitudinale.....	7
2.2	Forza di contatto longitudinale in funzione dello pseudoslittamento	9
2.3	Brush model per scorrimento semplice.....	10
2.3.1	Velocità all'interno dell'impronta di contatto	11
2.3.2	Deformazioni del battistrada in aderenza	12
2.3.3	Forze tangenziali nell'impronta di contatto	14
2.3.4	Legame tra pseudoslittamento e forza di contatto	17
2.3.5	Riepilogo	18
3	Contatto pneumatico-strada: forza laterale	20
3.1	Angolo di deriva.....	20
3.2	Brush model per deriva semplice	22
3.2.1	Velocità all'interno dell'impronta di contatto	24
3.2.2	Forze tangenziali nell'impronta di contatto	26
3.2.3	Calcolo della forza tangenziale in funzione dell'angolo di deriva	27
3.2.4	Rigidità di deriva	28
3.2.5	Momento di auto-allineamento	29
4	Contatto pneumatico-strada: forze combinate	31
4.1	Modello per il contatto in combinato.....	31
4.2	Forze tangenziali in condizioni di scorrimento combinato	32
4.2.1	Curve F_x - e_x e F_y - a in condizioni di scorrimento combinato	33
4.2.2	Coefficienti di aderenza generalizzati	34
4.3	Effetto del carico normale	35
4.3.1	Dipendenza del coefficiente di attrito dal carico normale	36
4.4	Angolo di camber	38
4.4.1	Combinazione di camber e deriva	38
5	Modelli non fisici dello pneumatico.....	40
5.1.1	Magic Formulae	41
6	Contatto ruota-rotaiia	43
6.1	Geometria dei corpi a contatto	43
6.2	Pseudoslittamenti	44
6.3	Forze di contatto tangenziali in funzione degli pseudoslittamenti	45
6.3.1	Effetto di auto-sterzata.....	46
6.4	Calcolo delle forze di contatto (cenni)	48
6.4.1	Analisi geometrica del contatto	48
6.4.2	Risoluzione del problema normale.....	50
6.4.3	Risoluzione del problema tangenziale	51

1 Il contatto ruota-via

Le forze di contatto tra ruota e via di corsa consentono di controllare il moto di un veicolo terrestre, generando le accelerazioni necessarie per cambiare il modulo della velocità e/o la sua direzione. In pratica se venisse a mancare il contatto tra ruota e via di corsa, non sarebbe possibile controllare il moto di un veicolo terrestre.

Le forze di contatto presentano due componenti: una normale alla superficie ed una tangenziale alla stessa; quest'ultima è legata alla forza di attrito che si sviluppa all'interfaccia tra i due corpi a contatto. Mentre nel contatto pneumatico strada la velocità del veicolo può essere controllata a partire dalla generazione delle forze tangenziali, nei veicoli ferroviari, per la particolare geometria di ruota e rotaia, è possibile controllare il moto in curva del veicolo anche attraverso delle forze normali alla superficie di contatto.

Nel seguito inizieremo a descrivere modello di contatto più semplice, quello di Coulomb, richiamandone gli aspetti fondamentali ed evidenziandone i limiti e mostrando la necessità di avere a disposizione modelli più complessi per analizzare la dinamica di marcia dei veicoli terrestri.

1.1 Modello di Coulomb

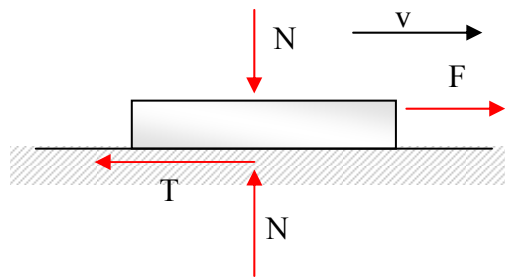


Figura 1-1: azioni di contatto su un corpo premuto contro una superficie.

Il modello di Coulomb rappresenta lo strumento più semplice per descrivere il contatto ruota via di corsa. Riferendosi alla Figura 1-1, secondo questo modello se si considera un corpo fermo, premuto contro una superficie con una forza N normale alla superficie stessa e si prova a muovere il corpo applicando una forza F tangente alla superficie, si verifica il seguente comportamento:

- il corpo non si muove ($v=0$) fino a quando F non supera un valore limite proporzionale al carico N applicato e pari a $f_s N$; f_s rappresenta il coefficiente di attrito statico. In altri termini la forza tangenziale T che il vincolo è in grado di generare per equilibrare l'azione F (e quindi mantenere fermo il corpo) può aumentare fino $f_s N$.
- Superato il valore limite il corpo si mette in moto ($v \neq 0$) ed al contatto si genera una forza tangenziale $T = f_d N$; f_d rappresenta il coefficiente di attrito dinamico (o radente) e, in prima approssimazione, si può considerare indipendente dalla velocità. Se il corpo è in movimento rispetto al piano accelera, decelera o si muove a velocità costante a seconda che F sia rispettivamente maggiore, minore o uguale T . L'azione T è sempre opposta alla velocità relativa tra corpo e superficie e quindi dissipa potenza.

Secondo quanto affermato, il modulo dell'azione di contatto tangenziale sviluppata dal vincolo tra corpo e superficie vale

$$\begin{cases} |T| \leq f_s N & v = 0 \\ |T| = f_d N & v \neq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

La direzione dell'azione di contatto è opposta ad F nel caso statico, in quanto l'azione nasce per tenere in equilibrio statico il corpo, mentre è opposta alla velocità relativa tra corpo e superficie nel caso di attrito dinamico; in caso di strisciamento, quindi, la forza di attrito è dissipativa, ovvero assorbe potenza.

1.1.1 Applicazione del modello di Coulomb al contatto ruota-via

Vediamo ora come il modello di Coulomb possa essere utilizzato per descrivere il contatto ruota-via. Si consideri la Figura 1-2: viene rappresentata una ruota rigida in un piano verticale, sulla quale è applicata una coppia C ; per includere l'effetto di resistenza al rotolamento, si assume che la reazione normale N sia spostata in avanti rispetto al punto di contatto P di una quantità pari a $f_v R$ dove f_v è il coefficiente di resistenza al rotolamento.

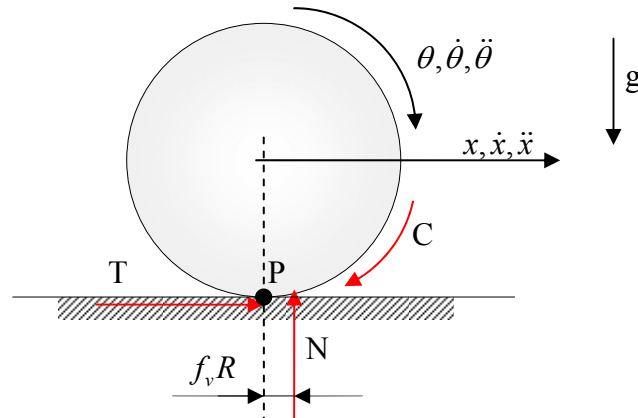


Figura 1-2: forze e coppie agenti su una ruota.

Si possono scrivere 3 equazioni di equilibrio dinamico, due di traslazione del baricentro della ruota ed una di rotazione.

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} + TR + Nf_v R = C \\ m\ddot{x} = T \\ mg = N \end{cases} \quad (1.2)$$

La prima equazione mostra come la coppia venga “impiegata” per produrre un’accelerazione angolare della ruota, per generare una forza tangenziale T al contatto e per vincere la resistenza al rotolamento. La seconda equazione mostra come la forza T generata al contatto sia in grado di produrre l’accelerazione del baricentro della ruota. La terza equazione semplicemente consente di calcolare la reazione di contatto normale che risulta pari alla forza peso.

Se si suppone che esista una relazione di rotolamento senza strisciamento, ovvero $\dot{x} = \dot{\theta}R$, si ottiene:

$$J \frac{\ddot{x}}{R} + m\ddot{x}R + mgf_v R = C; \Rightarrow \left(\frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{x} = \frac{C}{R} - mgf_v \quad (1.3)$$

La (1.3) è un'equazione pura di moto che consente di esprimere l'accelerazione della ruota noto l'andamento temporale della coppia applicata.

L'ipotesi di rotolamento senza strisciamento prevede che il punto di contatto P abbia una velocità relativa nulla rispetto al terreno e quindi che sia fermo. Dato che T è una forza prodotta dall'attrito tra disco e superficie di contatto, secondo il modello di Coulomb la condizione di assenza di strisciamento si ha se T non supera il limite di attrito statico, quindi se:

$$\left| \frac{T}{N} \right| \leq f_s \quad (1.4)$$

Nel caso in esame, considerando la (1.2), la condizione è verificata se:

$$\left| \frac{m\ddot{x}}{mg} \right| \leq f_s; \Rightarrow |\ddot{x}| \leq f_s g; \quad (1.5)$$

Ovvero la condizione di rotolamento senza strisciamento pone un limite alla massima accelerazione ottenibile che dipende dal coefficiente di attrito statico tra ruota e strada.

Nel caso in cui la (1.5) non fosse verificata la condizione di rotolamento senza strisciamento (in conseguenza di un valore di coppia eccessivo), si avrebbe che $\dot{x} \neq \dot{\theta}R$ e quindi il sistema avrebbe due gradi di libertà indipendenti. In particolare il punto P assume una velocità pari a:

$$v_p = \dot{x} - R\dot{\theta} \quad (1.6)$$

In questo caso si possono sempre scrivere le equazioni di equilibrio dinamico (1.2) alle quali si affianca la relazione:

$$|T| = f_d N \quad (1.7)$$

Se si suppone che C sia positiva (coppia motrice) un superamento del limite di aderenza porterà la ruota a ruotare su se stessa ottenendo una condizione in cui

$$v_p = \dot{x} - R\dot{\theta} < 0 \quad (1.8)$$

In altre parole il punto P non sarà fermo ma slitterà all'indietro rispetto alla superficie di contatto; T sarà quindi rivolta in avanti e dunque positiva secondo le convenzioni adottate sinora. Si ottiene pertanto:

$$T = f_d mg \quad (1.9)$$

Il valore della forza di contatto risulta quindi indipendente dalla coppia applicata alla ruota. Combinando la (1.2) e la (1.9) le due equazioni di moto sui gradi di libertà del sistema divengono quindi:

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} = C - mgf_d R - mgf_v R \\ m\ddot{x} = mgf_d \end{cases} \quad (1.10)$$

In caso di slittamento l'accelerazione longitudinale pertanto non dipende dal valore di coppia applicata; si noti che anche se la ruota slitta l'accelerazione del baricentro non è comunque nulla perché la forza di attrito non è nulla. Nel caso di perdita di aderenza l'applicazione di una coppia produce un'accelerazione angolare della ruota che non si traduce in una corrispondente accelerazione longitudinale.

1.1.2 Limiti del modello di Coulomb

Il modello di forza di attrito di Coulomb consente di descrivere in prima approssimazione la dinamica del contatto ruota-via, sia per veicoli stradali che ferroviari nel piano longitudinale. Il modello proposto presenta comunque dei limiti piuttosto rilevanti.

- Innanzitutto la capacità di descrivere la dinamica di contatto nel piano longitudinale è limitata per lo più alle condizioni in cui si è lontani dalla perdita di aderenza (indicativamente quando T è inferiore al 10÷20% del valore limite) e quando si è in completo slittamento. In prossimità del limite di aderenza le previsioni ottenute con il modello di Coulomb si scostano sensibilmente dai rilievi sperimentali. Di fatto il modello prevede un passaggio immediato dalla completa aderenza al completo slittamento, mentre nella realtà, come si vedrà meglio nel seguito, il rotolamento senza strisciamento di fatto è una condizione puramente "ideale" ed esistono gradi differenti di slittamento.
- Il modello non è in grado di descrivere il contatto al di fuori del piano longitudinale. In pratica non è possibile impiegare il modello di Coulomb per analizzare la dinamica di una vettura in curva.
- Similmente il modello non consente di descrivere la dinamica del contatto ruota-rotaia in curva dove la geometria dei corpi a contatto riveste un ruolo fondamentale.

Per queste ragioni risulta necessario impiegare modelli più complessi che consentano di analizzare in modo più preciso la dinamica dei veicoli terrestri. Nel seguito si approfondiranno innanzitutto gli aspetti del contatto pneumatico-strada per i quali il problema può essere affrontato, almeno qualitativamente, con modelli matematici piuttosto semplici. Per il contatto ruota-rotaia si rimanda invece all'ultima parte del capitolo.

2 Contatto pneumatico strada: forza longitudinale

2.1 Pseudoslittamento longitudinale

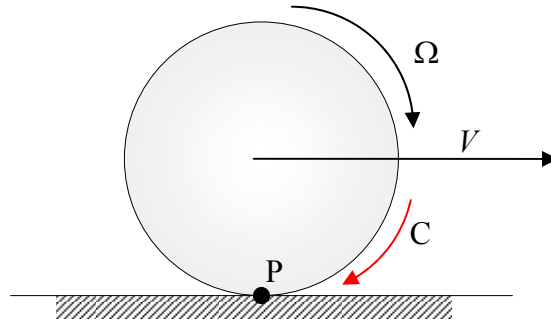


Figura 2-1: ruota appoggiata ad una superficie piana cui è applicata una coppia motrice.

Come anticipato nelle osservazioni sui limiti al modello di Coulomb, esistono differenti “gradi” di slittamento, ossia nella realtà non si passa istantaneamente dalla condizione di aderenza alla condizione di macro-slittamento in cui la ruota inizia a girare su se stessa (coppia motrice) o avanza rimanendo bloccata (coppia frenante). Consideriamo una ruota appoggiata ad una superficie piana alla quale viene applicata una coppia C (Figura 2-1), positiva se motrice (concorde con il verso di velocità angolare); supponiamo di misurare la velocità del centro ruota (ad esempio con un sensore ottico) e la velocità angolare della ruota (ad esempio tramite un encoder). Se si applica una coppia C positiva si rileva che:

$$\Omega R > V \quad \text{se } C > 0 \quad (2.1)$$

L’applicazione di una coppia motrice comporta quindi una differenza tra ΩR e V , in particolare ΩR risulta maggiore di V ; la differenza può essere molto piccola, tale da non risultare osservabile a livello macroscopico (ad occhio nudo l’impressione potrebbe essere di rotolamento senza strisciamento). La Figura 2-2 mostra lo stesso risultato in termini di spostamento: quando si applica una coppia motrice alla ruota ad una rotazione completa della stessa non corrisponde un avanzamento del centro ruota pari a $2\pi R$.

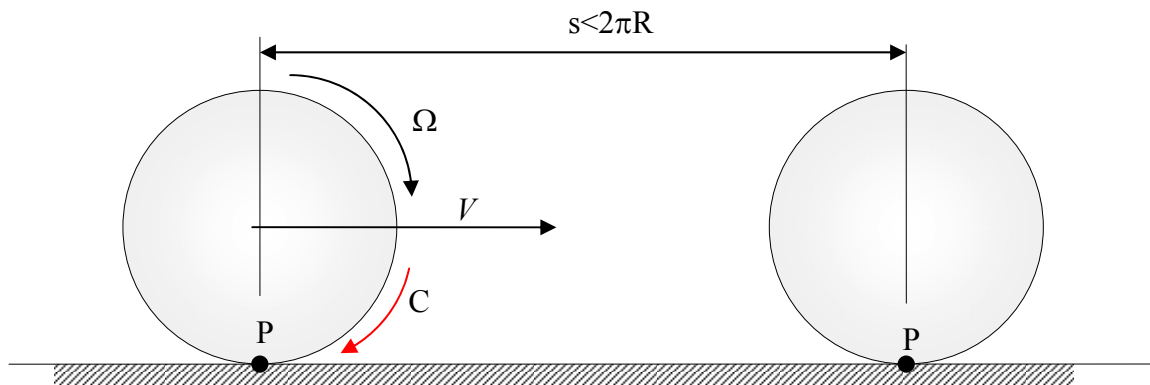


Figura 2-2: avanzamento del centro ruota nel caso di applicazione di una coppia motrice.

Sperimentalmente dunque, l'applicazione di una coppia motrice fa sì che non tutta la rotazione della ruota si traduca in un corrispondente avanzamento del suo centro. Nel caso in cui venga applicata una coppia frenante, opposta quindi alla velocità angolare, si rileva un comportamento opposto: ancora una volta esiste una differenza tra ΩR e V ma in questo caso ΩR risulta minore di V . In termini di spostamento si rileva quanto mostrato in Figura 2-3.

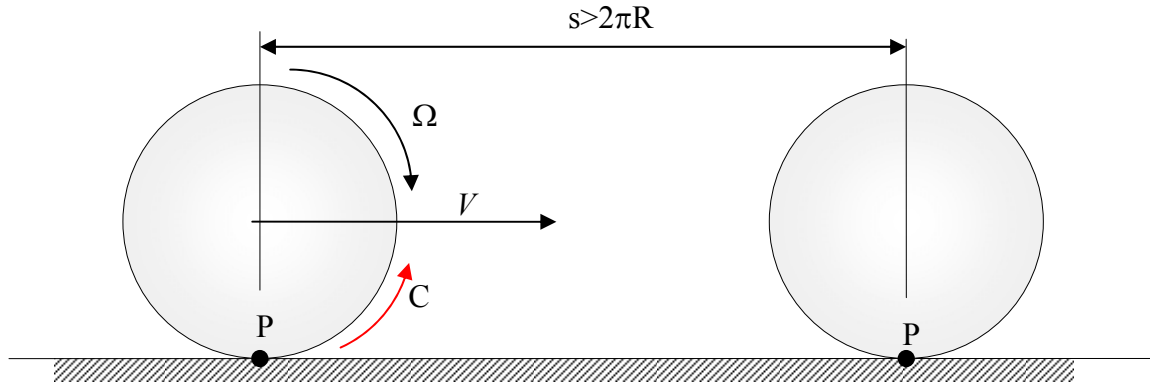


Figura 2-3: avanzamento del centro ruota nel caso di applicazione di una coppia frenante.

L'evidenza sperimentale indica che la condizione di rotolamento senza strisciamento sussiste solo se la coppia applicata è nulla (di fatto verificata solo con una certa approssimazione su ruote non motrici, dato che una resistenza al rotolamento è sempre presente). Se la coppia applicata è motrice non tutto il moto di rotazione della ruota si traduce in un corrispondente avanzamento del baricentro, ovvero la ruota in parte slitta, non necessariamente in modo macroscopico, ruotando attorno al suo asse senza avanzare. Se la coppia è frenante, parte della rotazione della ruota viene "persa", ossia anche in questo caso si produce una rotazione attorno al centro della ruota associata ad uno slittamento del punto di contatto.

Per descrivere questo comportamento viene introdotta una quantità nota come *pseudoslittamento longitudinale* e definita come:

$$\varepsilon_x = \frac{V - \Omega R}{V} = \frac{V_s}{V} \quad (2.2)$$

Lo pseudoslittamento longitudinale (nella pratica detto anche *scorrimento longitudinale* o, semplicemente, *scorrimento*) è una quantità adimensionale data dal rapporto tra la velocità di scorrimento V_s del punto di contatto e la velocità di avanzamento del centro ruota. Confrontando la con la (2.2) con la (1.6) si osserva come V_s coincida con la velocità del punto di contatto; quando viene applicata una coppia motrice $\Omega R > V$ e quindi la velocità del punto di contatto è opposta rispetto al verso di avanzamento, ossia la velocità di scorrimento è negativa. Se viene applicata una coppia frenante la velocità di scorrimento è positiva, quindi il punto di contatto si muove in avanti rispetto al terreno. Per quanto detto lo pseudoslittamento longitudinale risulta positivo in presenza di coppie frenanti e negativo in presenza di coppie motrici.

L'entità della velocità di scorrimento dipende dall'intensità della coppia applicata; in presenza di piccole coppie motrici lo pseudoslittamento è debolmente negativo, mentre diviene sempre più negativo se si aumenta l'entità della coppia. Questo chiarisce il concetto di "grado di slittamento" cui si accennava: una ruota può slittare in modo più o meno marcato rispetto alla via di corsa in funzione dell'entità della coppia applicata. Se la coppia motrice è molto intensa

lo pseudoslittamento tende a $-\infty$, ossia la ruota gira su se stessa producendo una velocità di avanzamento molto piccola rispetto al prodotto ΩR .

Se si applica una coppia frenante di modesta entità, lo pseudoslittamento sarà debolmente positivo; se la coppia frenante è sufficientemente intensa la ruota può arrivare al bloccaggio, condizione in cui lo pseudoslittamento è pari a 1.

2.2 Forza di contatto longitudinale in funzione dello pseudoslittamento

A livello intuitivo, il legame tra pseudoslittamento e forza longitudinale può essere visto in questo modo: l'applicazione di una coppia motrice genera una velocità di scorrimento negativa, ovvero il punto di contatto si muove all'indietro rispetto alla via di corsa; al contatto nasce dunque una forza tangenziale dovuta all'attrito radente positiva (opposta alla velocità di scorrimento), cioè diretta nel verso di avanzamento. L'opposto accade invece nel caso sia applicata una coppia frenante.

Questa spiegazione, che in parte riprende il modello di Coulomb, è utile per ricordare il legame tra il segno dello pseudoslittamento e quello della forza di contatto (di fatto uno scorrimento positivo corrisponde ad una forza negativa e viceversa) ma non spiega perché la forza longitudinale sia in realtà funzione dello pseudoslittamento come mostrato nel grafico (qualitativo) di Figura 2-4:

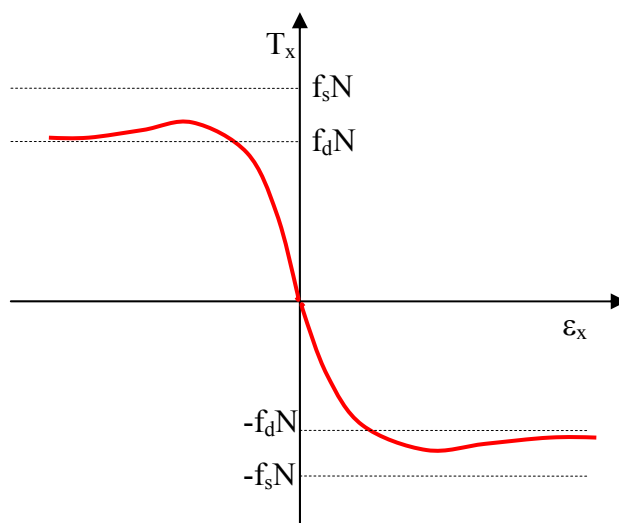


Figura 2-4: andamento qualitativo della forza longitudinale in funzione dello pseudoslittamento longitudinale.

La forza longitudinale varia con il livello di scorrimento, in particolare:

- per scorrimento nullo la forza è nulla, ossia uno pneumatico deve “scorrere” per generare una forza di contatto. La condizione di rotolamento senza strisciamento non può essere verificata se lo pneumatico sta scaricando a terra forze longitudinali;
- il modulo della forza longitudinale cresce fino ad un valore massimo che si trova un po' al di sotto del coefficiente di attrito statico moltiplicato per il carico normale agente sulla ruota (N);
- per pseudoslittamenti elevati (positivi o negativi) il modulo della forza tende al coefficiente di attrito radente per il carico normale applicato.

Per spiegare il legame tra pseudoslittamento e forza longitudinale è necessario introdurre un modello di contatto più complesso di quello di Coulomb che tenga conto della deformabilità dello pneumatico.

2.3 Brush model per scorrimento semplice

Il *brush model* (letteralmente: “modello spazzola”) è un modello che consente di descrivere la dinamica del battistrada in contatto con la via di corsa; di fatto permette di stimare sia il moto del battistrada che le forze che questo scambia con la strada. Esistono differenti formulazioni per questo modello con diversi gradi di complessità; in questo caso impiegheremo una formulazione semplificata monodimensionale che, nonostante i limiti, consente di avere risultati qualitativamente in accordo con la sperimentazione e di spiegare il legame tra forza longitudinale e scorrimento.

Le ipotesi del modello sono elencate nel seguito

1. Si suppone che il baricentro dello pneumatico stia traslando con velocità V e che lo pneumatico rotoli con velocità angolare Ω , entrambe costanti.
2. Si assume che, per effetto del carico normale N applicato nel baricentro dello pneumatico, si generi un'impronta di contatto di lunghezza finita pari a $2a$ (Figura 2-5).
3. Si definisce un asse di riferimento longitudinale ξ con origine all'inizio dell'impronta di contatto e rivolto verso la parte posteriore dell'impronta (Figura 2-5).

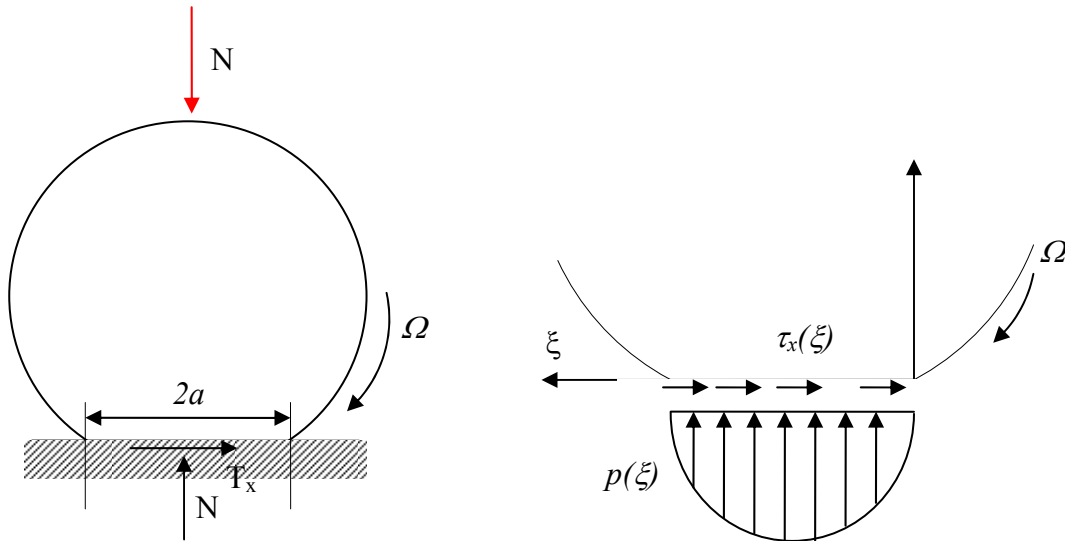


Figura 2-5: deformazione dell'impronta di contatto e distribuzione di forze normali e tangenziali per unità di lunghezza nella stessa.

4. Nell'impronta di contatto si genera una distribuzione di forze per unità di lunghezza $p(\xi)$, normali al contatto ed una distribuzione di forze per unità di lunghezza $\tau_x(\xi)$, tangenti al contatto. Le distribuzioni di forze sono tali che:

$$\int_0^{2a} p(\xi) d\xi = N$$

$$\int_0^{2a} \tau_x(\xi) d\xi = T_x \tag{2.3}$$

La distribuzione delle forze normali può essere in prima approssimazione considerata parabolica in funzione della coordinata ξ .

5. Il battistrada è modellizzato attraverso una serie di setole o spazzole con caratteristiche uniformi che possono deformarsi in direzione longitudinale rispetto alle cinture. Riferendosi alla Figura 2-6, ogni setola ha un estremo superiore solidale alle cinture ed

un estremo inferiore in contatto con la strada. L'estremo inferiore può subire uno spostamento $u(\xi)$ rispetto a quello superiore, funzione della posizione occupata dalla setola lungo l'impronta di contatto.

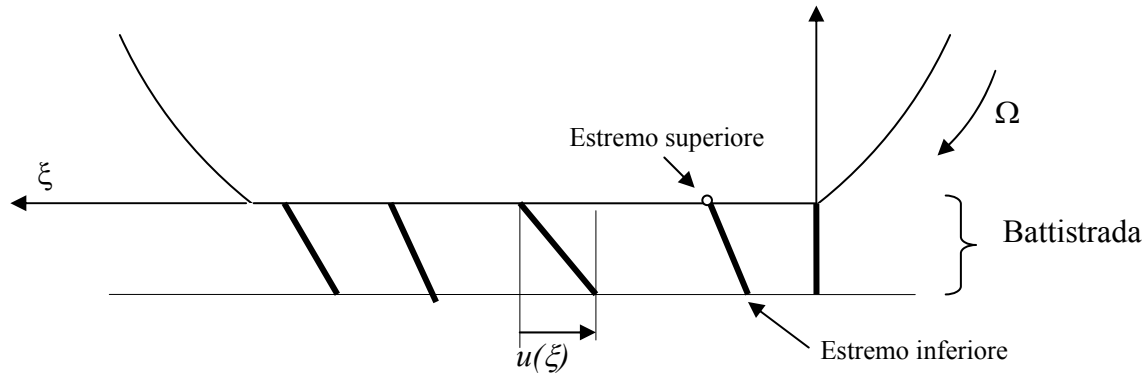


Figura 2-6: spostamento longitudinale delle setole di battistrada.

- Gli spostamenti delle setole avvengono come conseguenza delle forze tangenziali di attrito distribuite; in prima approssimazione si assume che il legame tra forza per unità di lunghezza e spostamento della setola sia lineare

$$\tau_x(\xi) = C_{kx} u(\xi) \quad (2.4)$$

Nella (2.4) il termine C_{kx} rappresenta la rigidezza longitudinale per unità di lunghezza del battistrada.

- La velocità dell'estremo superiore delle setole (solidale alle cinture) può essere calcolata in prima approssimazione come la velocità di scorrimento V_s richiamata nel seguito.

$$V_s = V - \Omega R \quad (2.5)$$

Sotto queste ipotesi proviamo a valutare quali condizioni devono sussistere affinché il battistrada sia in aderenza (non slitti) rispetto alla via di corsa; per questo è necessario calcolare la velocità dell'estremo inferiore delle setole e imporre che questa sia nulla, ossia abbia la stessa velocità della via di corsa.

2.3.1 Velocità all'interno dell'impronta di contatto

La velocità dell'estremo inferiore di una setola a distanza ξ dal riferimento vale:

$$v_x(\xi) = V - \Omega R + \frac{du(\xi)}{dt} \quad (2.6)$$

Quindi la velocità di un punto del battistrada a contatto con la strada è data da una componente di trascinamento pari a $V - \Omega R$ che rappresenta la velocità dell'estremo superiore

della setola, più una componente relativa data dalla deformabilità delle setole stesse. La (2.6) si può scrivere anche come:

$$v_x(\xi) = V - \Omega R + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (2.7)$$

Per valutare il termine $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ si esamini la Figura 2-7 e si consideri la posizione di un punto P nell'impronta di contatto ad un generico istante t e si indichi con ξ la sua coordinata. Dopo un tempo dt , il sistema di riferimento, che parte sempre dal bordo di ingresso dell'impronta di contatto, si sarà spostato nel verso di avanzamento di una quantità $d\xi$ pari Vdt . La coordinata di P sarà dunque cambiata e varrà $\xi+d\xi$ ossia $\xi+Vdt$.

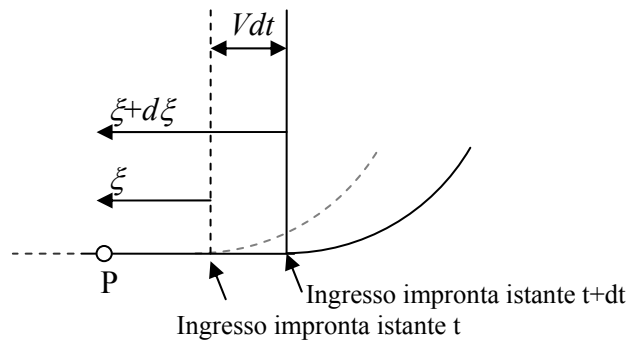


Figura 2-7: spostamento del sistema di riferimento dovuto all'avanzamento dello pneumatico.

La coordinata con cui viene identificata la posizione di un punto lungo l'impronta di contatto quindi cambia perché il riferimento non è fisso ma si muove con lo pneumatico; dato che il sistema di riferimento si muove con velocità V , la variazione di coordinata rispetto al tempo coincide con V , quindi:

$$v_x(\xi) = V - \Omega R + \frac{\partial u}{\partial \xi} V \quad (2.8)$$

Ricordando la definizione di pseudoslittamento longitudinale, questa relazione può anche essere scritta come:

$$v_x(\xi) = V \cdot \left[\frac{V - \Omega R}{V} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] = V \cdot \left[\varepsilon_x + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] \quad (2.9)$$

2.3.2 Deformazioni del battistrada in aderenza

Per determinare le condizioni sotto le quali la setola non slitta rispetto al terreno, si impone che la velocità della (2.9) sia nulla.

$$v_x(\xi) = 0; \Rightarrow V \cdot \left[\varepsilon_x + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (2.10)$$

A parte la soluzione banale $V=0$ (se lo pneumatico è fermo tutta l'impronta non slitta rispetto al terreno), la (2.10) è verificata se:

$$\varepsilon_x + \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0; \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\varepsilon_x; \Rightarrow \partial u = -\varepsilon_x \partial \xi \quad (2.11)$$

L'equazione differenziale può essere risolta facilmente:

$$\int \partial u = \int -\varepsilon_x \partial \xi + C; \Rightarrow u(\xi) = -\varepsilon_x \xi + C \quad (2.12)$$

Se si suppone che al momento dell'ingresso nell'impronta di contatto la setola sia indeformata, si può imporre:

$$u(0) = 0; \Rightarrow 0 = -\varepsilon_x \cdot 0 + C; \Rightarrow C = 0 \quad (2.13)$$

E quindi, affinché ci sia aderenza tra battistrada e via di corsa, lo spostamento longitudinale del battistrada rispetto alla cintura deve crescere linearmente dall'ingresso impronta verso l'uscita della stessa, secondo l'espressione:

$$u(\xi) = -\varepsilon_x \xi \quad (2.14)$$

Vediamo di capire questo risultato: supponiamo che lo pseudoslittamento longitudinale sia negativo (conseguenza dell'applicazione di una coppia motrice). In questo caso, secondo la (2.14) gli spostamenti saranno positivi, ovvero diretti nella direzione del moto. Consideriamo ora la Figura 2-8: gli estremi superiori delle setole, solidali alle cinture, si muovono con una velocità pari a quella di scorrimento; se lo scorrimento è negativo la velocità è diretta verso l'uscita impronta (contraria alla direzione del moto) e varrà in modulo $\Omega R - V$.

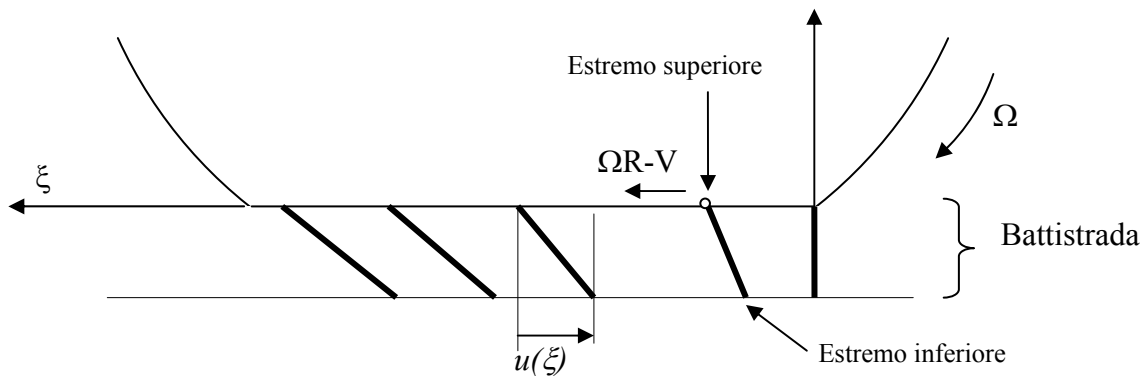


Figura 2-8: generazione della deformazione delle setole con $\varepsilon_x < 0$.

Se il battistrada aderisce alla superficie di contatto, gli estremi inferiori delle setole sono invece fermi; gli estremi superiori delle setole si muoveranno dunque all'indietro rispetto a quelli inferiori generando una deformazione che continuerà ad accumularsi fino alla fine

dell'impronta di contatto. Se la velocità di scorrimento è costante, alla fine dell'impronta lo spostamento dell'estremo inferiore rispetto a quello superiore sarà:

$$u(2a) = (\Omega R - V) \cdot \Delta t = (\Omega R - V) \frac{2a}{V} = \frac{\Omega R - V}{V} 2a = -\varepsilon_x 2a \quad (2.15)$$

Δt rappresenta il tempo che impiega l'estremo superiore della setola ad attraversare l'impronta di contatto ed è pari alla lunghezza impronta ($2a$) divisa per la velocità di avanzamento. Il risultato della (2.15) è lo stesso che si ricava dalla (2.14) con $\xi=2a$.

Secondo la (2.14) per avere aderenza tra battistrada e via di corsa, il battistrada stesso deve subire una deformazione: in particolare la parte di battistrada a contatto con il terreno deve spostarsi in avanti (se lo scorrimento è negativo) o indietro (se lo scorrimento è positivo) rispetto alla parte di battistrada solidale alle cinture.

2.3.3 Forze tangenziali nell'impronta di contatto

Finora abbiamo considerato solo le deformazioni all'interno della fascia battistrada prescindendo dalle forze richieste per produrle. Come accennato nelle ipotesi del modello, gli spostamenti nella zona di contatto sono prodotti da azioni tangenziali di attrito distribuite (forze per unità di lunghezza). In prima approssimazione si può ritenere lineare il legame tra forza per unità di lunghezza e spostamento. Sostituendo la (2.4) nella (2.14) si ottiene:

$$\tau_x(\xi) = -C_{kx} \varepsilon_x \xi \quad (2.16)$$

Quindi per avere il battistrada in aderenza è necessario che all'interfaccia pneumatico strada si generino delle forze tangenziali per unità di lunghezza crescenti linearmente dall'ingresso all'uscita impronta. Consideriamo ancora il caso di scorrimento positivo: come mostrato nella Figura 2-9 affinché gli estremi inferiori delle setole possano stare "ancorati" al terreno, è necessario che si sviluppino nella zona di contatto delle forze distribuite dirette nel senso di moto. Se non nascessero queste forze gli estremi inferiori delle setole seguirebbero semplicemente il movimento di quelli superiori, muovendosi all'indietro senza deformarsi e strisciando rispetto al terreno.

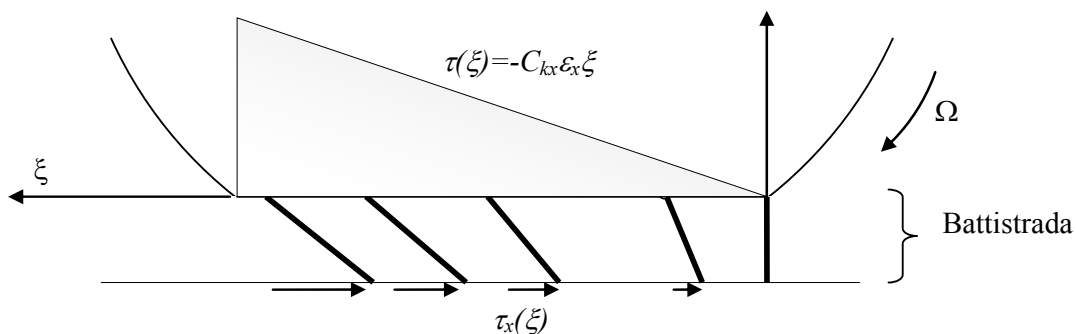


Figura 2-9: distribuzione delle forze di contatto tangenziali richiesta per mantenere l'impronta in aderenza con scorrimenti positivi.

La condizione di aderenza tra battistrada e via di corsa è dunque subordinata alla capacità del vincolo di generare le forze tangenziali richieste per tenere fermi gli estremi inferiori del battistrada. Dato che le forze tangenziali sono legate al coefficiente di attrito tra mescola battistrada e manto stradale, la condizione di aderenza dipende appunto da questo coefficiente.

Torniamo all'esempio di scorrimento positivo e consideriamo questa volta non solo la distribuzione di forze tangenziali ma anche di quelle normali al contatto moltiplicate per il coefficiente di attrito. Supponiamo per semplicità che i coefficienti di attrito statico e dinamico coincidano, quindi $f_s=f_d=f$. Il prodotto tra forza normale e coefficiente di attrito rappresenta la massima forza (locale) che si può sviluppare all'interfaccia.

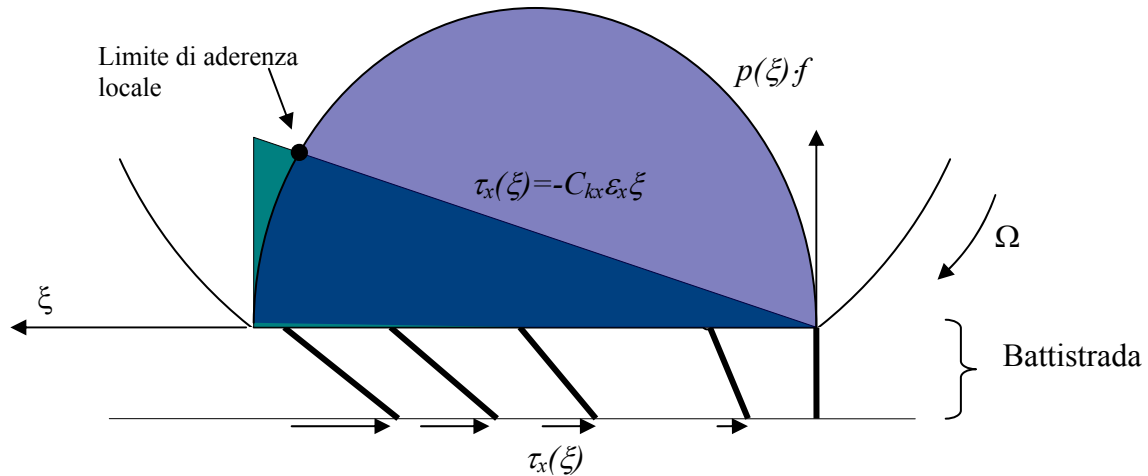


Figura 2-10: confronto tra forze tangenziali richiesti e forze tangenziali massime sviluppabili dal vincolo di attrito.

Come si osserva nella Figura 2-10, nella parte anteriore dell'impronta il livello di forze tangenziali richiesti per mantenere fermi i tasselli è relativamente "piccolo" rispetto al prodotto $p f$; in questa regione quindi è possibile avere aderenza tra pneumatico e strada. Spostandosi verso la parte posteriore dell'impronta, il margine tra forza tangenziale richiesta per mantenere l'aderenza e forza massima disponibile si riduce, dato che la distribuzione di forze normali (assunta parabolica) decresce. All'intersezione delle curve ci si trova al limite locale di aderenza; oltre questo punto la condizione di aderenza richiederebbe delle forze tangenziali che il vincolo non è in grado di generare e quindi si ha in realtà slittamento. La situazione che si genera viene illustrata in Figura 2-11. La condizione di aderenza può essere verificata solo nella parte anteriore dell'impronta di contatto: qui le forze tangenziali per unità di lunghezza crescono linearmente¹ e, se lo scorrimento è negativo (coppia motrice), sono dirette nella direzione del moto. Nell'area in aderenza le setole accumulano progressivamente una deformazione immagazzinando energia potenziale elastica. Oltrepastato il limite di aderenza, il vincolo non è più in grado di mantenere la deformazione delle setole e l'energia elastica viene rilasciata producendo uno slittamento dell'estremo inferiore delle setole verso la parte posteriore dell'impronta. Nella parte dell'impronta in slittamento la forza di contatto vale $p f_d$, in analogia a quanto previsto dal modello di Coulomb: la forza per unità di lunghezza è pari alla forza normale per unità di lunghezza moltiplicata per il coefficiente di attrito dinamico. Dato che le setole scattano indietro, la forza di attrito è diretta nella direzione di avanzamento e quindi anche la porzione di impronta in slittamento concorre a generare forza utile per la trazione.

Se si eccettua il caso in cui lo scorrimento sia nullo, l'impronta di contatto è dunque divisa in due aree: una frontale dove la miscela è in aderenza ed una in cui si hanno invece degli slittamenti. La divisione dell'impronta di contatto nelle due zone rende conto del fatto che si

¹ Ricordiamo che questo dipende dall'ipotesi di legame lineari tra forza e spostamento; in generale la miscela battistrada si comporta in modo lineare solo in prima approssimazione.

possa avere una differenza tra V e ΩR anche senza produrre macro-scorrimenti: non tutta la rotazione si può tradurre in un avanzamento del baricentro dello pneumatico.

Volendo rendere il modello un po' più aderente alla realtà, è possibile considerare una differenza tra i coefficienti di attrito statico e dinamico; il coefficiente di attrito statico risulta in genere un po' più alto di quello dinamico. Nella vengono mostrate le curve $p f_s$ e $p f_d$ insieme alla distribuzione delle forze tangenziali al contatto: in questo caso una volta superata la condizione limite di attrito statico, le forze tangenziali seguono l'andamento della curva $p f_d$

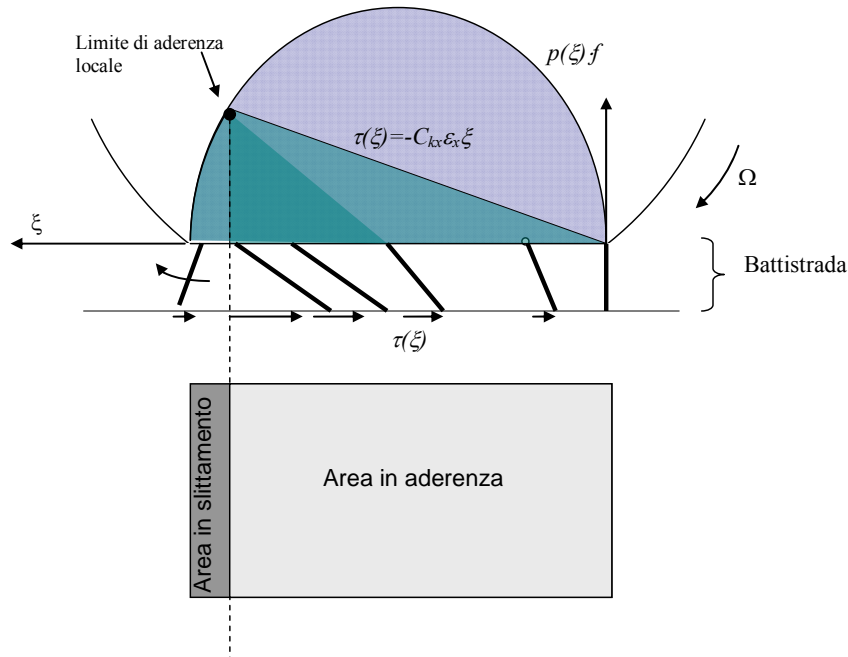


Figura 2-11: distribuzione delle forze tangenziali nell'impronta di contatto (scorrimento negativo).

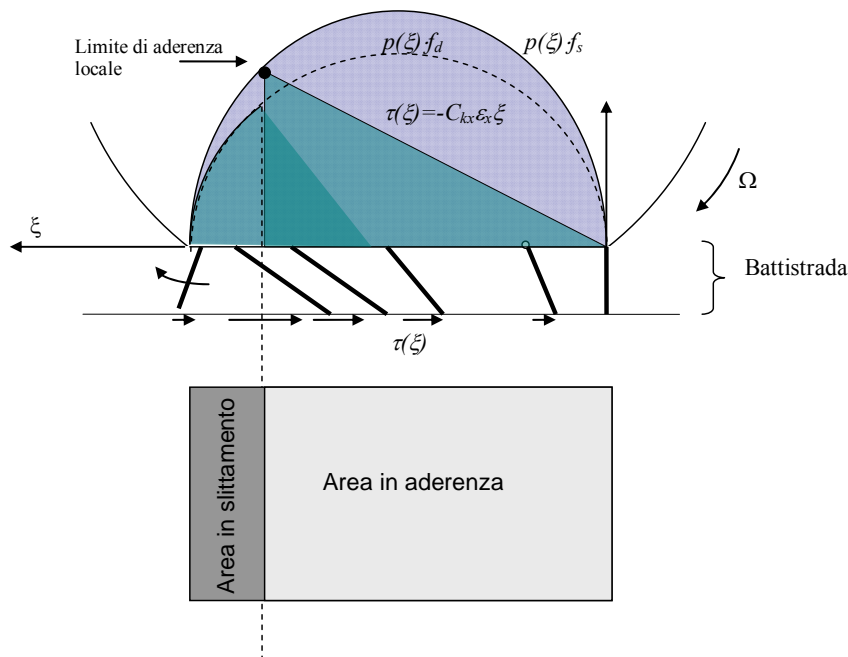


Figura 2-12: distribuzione delle forze tangenziali nell'impronta di contatto (scorrimento negativo).

Nel caso in cui lo pseudoslittamento longitudinale sia positivo (coppia frenante) si ha una situazione formalmente analoga alla precedente ma con un'inversione del segno delle forze tangenziali (e quindi delle deformazioni). Come mostrato in Figura 2-13 le setole vengono deformate all'indietro: dato che la velocità di scorrimento è positiva, gli estremi superiori delle setole tendono infatti a muoversi in avanti rispetto agli estremi inferiori in aderenza. All'interfaccia si generano quindi forze tangenziali opposte rispetto alla direzione di moto. Raggiunto il limite di aderenza, l'energia elastica accumulata viene rilasciata e le setole scattano in avanti. Considerato il segno della velocità relativa tra battistrada e via di corsa nella zona in slittamento, si ha che le forze di attrito radente sono dirette verso la parte posteriore dell'impronta e quindi opposte al moto.

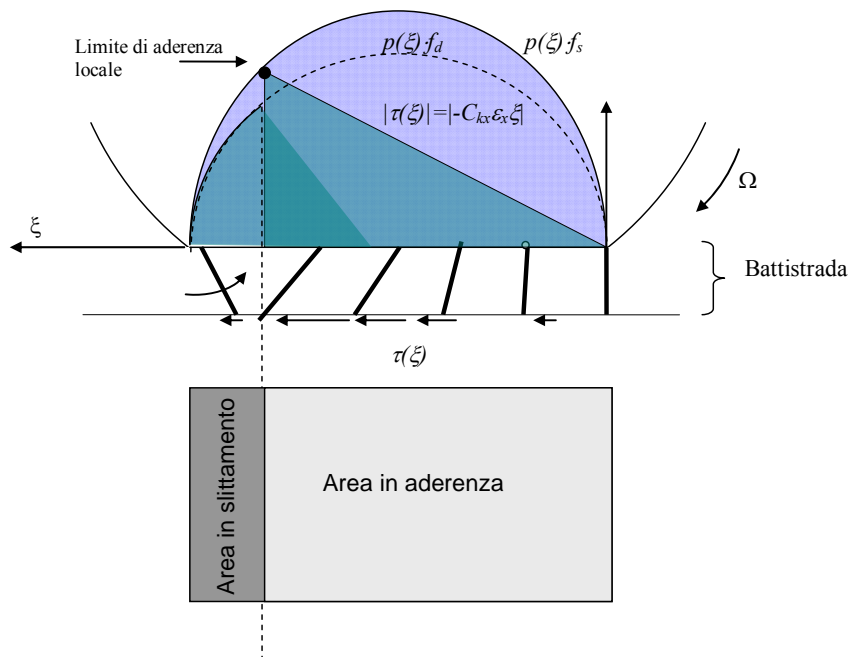


Figura 2-13: distribuzione delle forze tangenziali nell'impronta di contatto (scorrimento positivo).

2.3.4 Legame tra pseudoslittamento e forza di contatto

Il brush model consente di stimare la forza longitudinale prodotta dallo pneumatico dato il carico N applicato e lo pseudoslittamento imposto; come visto nelle ipotesi del modello, la forza longitudinale complessiva si può calcolare come integrale delle azioni tangenziali per unità di lunghezza.

Cambiando il valore di scorrimento si cambia la pendenza del tratto lineare delle azioni tangenziali; in particolare aumentando il modulo dello scorrimento la pendenza aumenta e l'intersezione con la curva di limite di aderenza avviene prima. Aumentando lo pseudoslittamento (in modulo) si riduce quindi la parte di impronta in aderenza e si cambia la distribuzione delle forze tangenziali al contatto. Eseguendo l'integrale per diversi valori di scorrimento è possibile ricostruire per punti la curva che lega la forza longitudinale sviluppata al valore di scorrimento.

La Figura 2-14 mostra sinteticamente la procedura di calcolo per scorrimenti positivi (che portano a sviluppare forze frenanti per le convenzioni utilizzate). Per bassi livelli di scorrimento, il legame tra forza e scorrimento è pressoché lineare; in questa regione, dato che la zona di aderenza è molto estesa, la forza tangenziale è strettamente legata alla deformazione della mescola battistrada e quindi alla sua elasticità (C_{kx}).

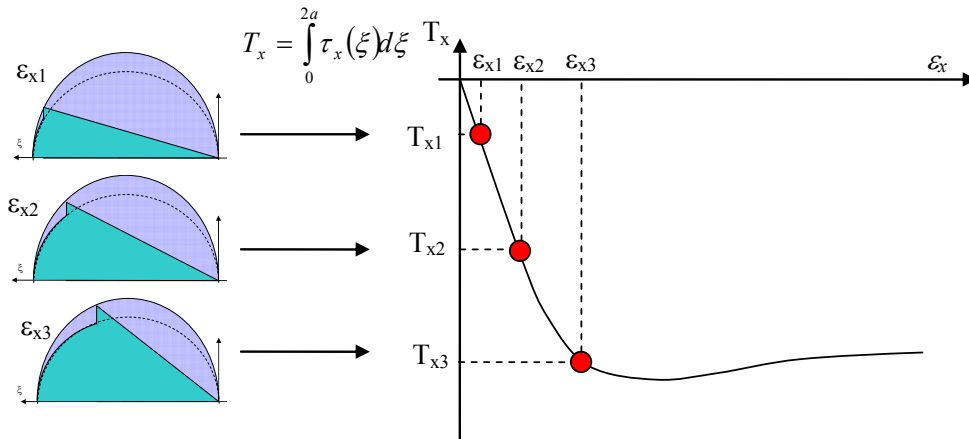


Figura 2-14: calcolo della forza longitudinale in funzione dello scorrimento.

Per alti scorrimenti, la pendenza del tratto lineare della distribuzione di forze tangenziali è talmente elevata che quasi tutta l'impronta è sede di scorrimenti; in questa condizione la forza sviluppata al contatto coincide con il prodotto tra il carico normale ed il coefficiente di attrito dinamico. Infatti si ha che:

$$T_x = \int_0^{2a} \tau_x(\xi) d\xi \approx \int_0^{2a} f_d p(\xi) d\xi = f_d N \quad (2.17)$$

Per valori di scorrimento intermedi la forza sviluppata al contatto è una combinazione degli effetti di deformazione e di strisciamento; il valore massimo (in modulo) della forza si ottiene per una combinazione ottimale di questi fattori. Il valore massimo di forza longitudinale è sicuramente più basso (in modulo) del prodotto $f_s \cdot N$ in quanto una parte dell'impronta di contatto è in scorrimento e quindi non è possibile che la distribuzione delle forze tangenziali coincida con la curva $p \cdot f_s$. Per uno pneumatico montato su vetture di serie il massimo di forza longitudinale avviene per scorrimenti attorno al 10%.

2.3.5 Riepilogo

Attraverso il modello brush è possibile, sotto opportune ipotesi, calcolare la velocità di un punto del battistrada a contatto con il manto stradale.

- Imponendo l'annullamento della velocità si può stimare la deformazione che dovrebbe subire il battistrada per mantenersi in aderenza con la superficie stradale.
- Ipotizzando un legame tra la deformazione del battistrada e la forza necessaria per generarla, è possibile stimare la distribuzione di forze che dovrebbe svilupparsi all'interfaccia per mantenere il battistrada in aderenza.
- Confrontando questa distribuzione con le forze effettivamente sviluppabili dal vincolo di attrito si nota come sia impossibile avere l'intera impronta di contatto in aderenza; la parte finale dell'impronta, in presenza di uno pseudoslittamento non nullo, è in slittamento.
- La presenza di uno slittamento di una parte dell'impronta spiega come sia possibile generare uno pseudoslittamento longitudinale anche senza uno slittamento macroscopico. È la deformabilità del battistrada che consente di avere questo effetto e spiega come mai non tutto il moto di rotazione possa produrre una corrispondente traslazione della ruota.

- Diversi pseudoslittamenti portano a diverse distribuzioni delle azioni tangenziali e quindi a diversi valori di forza in funzione dello pseudoslittamento.

Rispetto al modello di Coulomb, il brush model consente quindi di ottenere una migliore comprensione dei meccanismi di generazione di forze di contatto longitudinali tra pneumatico e strada. È possibile inoltre descrivere in un modo più corretto il transitorio di accelerazione/frenata di un veicolo quando lo pneumatico viene portato vicino alla massima forza tangenziale sviluppabile. Per questo si consideri la Figura 2-15 dove vengono mostrate le forze tangenziali previste dal modello di Coulomb e dal brush model; come si nota esistono due zone in cui i due modelli predicono valori di forza simili: per bassi scorrimenti (e dunque per valori di forza lontani da quella massima) e per macro-scorrimenti in cui tutta l'impronta di contatto slitta. Nella zona di massima forza sviluppabile, il modello di Coulomb si discosta sensibilmente dal comportamento effettivo: la transizione da aderenza a slittamento avviene istantaneamente con un gradino di forza che scende dal valore massimo (peraltro maggiore di quello effettivamente sviluppato dallo pneumatico) a quello corrispondente all'attrito dinamico. Nella realtà, per generare una forza longitudinale lo pneumatico deve presentare uno pseudoslittamento diverso da zero e la forza cresce gradualmente con questo parametro fino a raggiungere un massimo (per pneumatici ordinari attorno al 10% di scorrimento) per poi portarsi al valore di attrito dinamico.

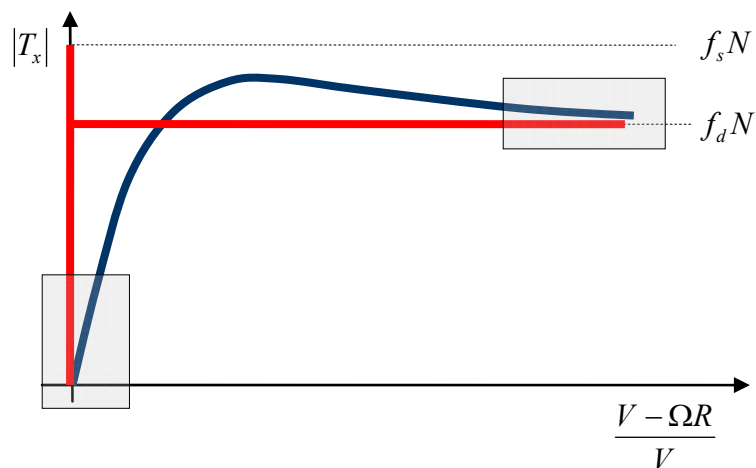


Figura 2-15: forza longitudinale in funzione dello scorrimento: confronto tra modello di Coulomb (linea rossa) e modello brush (linea blu).

3 Contatto pneumatico-strada: forza laterale

Lo studio della dinamica laterale di un veicolo stradale è fondamentale per prevedere il comportamento in curva, sia in termini di massima accelerazione laterale raggiungibile che di stabilità e di capacità di inserimento in curva. Per questo è indispensabile disporre di un modello in grado di descrivere la dinamica del contatto pneumatico-strada quando vengono sviluppate forze laterali, ossia forze dirette al di fuori del piano di rotolamento. In questo capitolo ci occuperemo quindi della dinamica del contatto “fuori piano”, riferendoci al caso detto di “deriva semplice”, nel quale non viene contemplata la presenza di pseudoslittamenti longitudinali e quindi di forze longitudinali sviluppate insieme a quelle laterali. Anche in questo caso è necessario ci appoggeremo al brush model per capire come sia possibile generare forze laterali e quali deformazioni subisca lo pneumatico in curva.

3.1 Angolo di deriva

In primo luogo introduciamo il concetto di *angolo di deriva*; quando un veicolo percorre una traiettoria curvilinea, il vettore velocità dei centri ruota non giace nel piano di rotolamento delle ruote stesse, ma presenta una componente laterale, diretta quindi fuori dal piano di rotolamento.

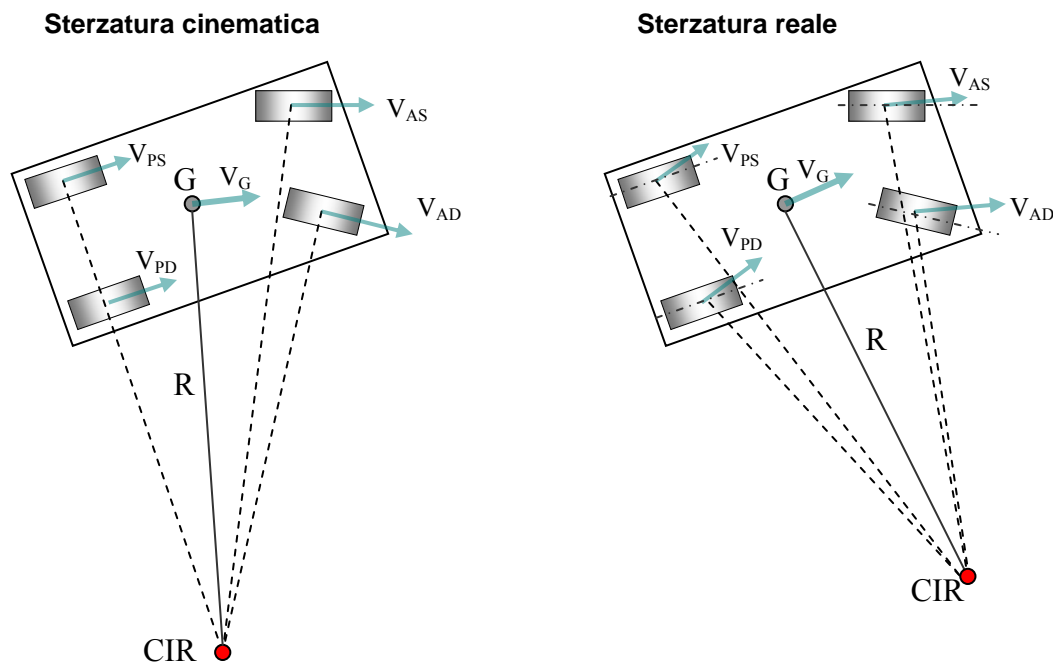


Figura 3-1: confronto tra sterzata cinematica e sterzata reale: nella sterzata reale esiste una componente di velocità del centro ruota che non giace nel piano di rotolamento.

La Figura 3-1 mostra un veicolo visto dall’alto durante la percorrenza di una traiettoria curvilinea di raggio R ; la situazione a sinistra viene detta anche *sterzata cinematica* e rappresenta una condizione del tutto ideale nella quale il vettore velocità di ogni ruota giace nel piano di rotolamento. Sebbene i cinematismi di sterzo vengano spesso realizzati per

ottenere o approssimare questa situazione², quanto si verifica nella realtà è mostrato nel lato destro della figura (*sterzata reale*): il vettore velocità dei centri ruota presenta una componente fuori dal piano di rotolamento diretta verso l'esterno curva e il centro di istantanea rotazione non giace lungo il prolungamento dell'asse posteriore. L'angolo compreso tra il vettore velocità del centro ruota ed il piano di rotolamento dello pneumatico viene definito angolo di deriva α , come mostrato in Figura 3-2.

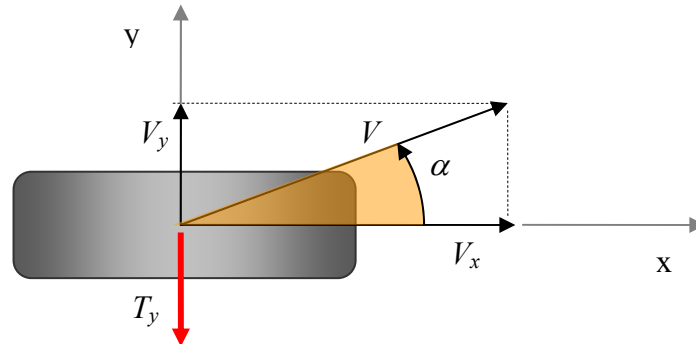


Figura 3-2: angolo di deriva di uno pneumatico.

In termini analitici l'angolo di deriva si definisce come:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right) \approx \frac{V_y}{V_x} \quad (3.1)$$

Analogamente a quanto visto per lo pseudoslittamento longitudinale, questo fenomeno in generale non è molto marcato: considerando un'autovettura di serie ed uno stile di guida ordinario, gli angoli di deriva non superano in genere i 2° e, di conseguenza, non è possibile apprezzarli se non misurando la componente laterale di velocità del centro ruota ad esempio con uno strumento ottico. Per questo è spesso possibile approssimare il calcolo dell'angolo di deriva come mostrato nella (3.1), ossia si può considerare il solo argomento della funzione arcotangente.

Lo sviluppo di un angolo di deriva è strettamente associato alla generazione di forza laterale: la presenza di un angolo di deriva diretto verso l'esterno curva implica che il centro ruota stia "scivolando" lateralmente in quella direzione; come conseguenza nasce una forza T_y opposta alla direzione di scivolamento. Il legame tra angolo di deriva e forza laterale, in assenza di pseudoslittamento longitudinale e angoli di camber³, è mostrato in Figura 2-4: considerando il sistema di riferimento di Figura 3-2, per un angolo di deriva positivo la forza laterale sviluppata è negativa. Come si osserva la curva è qualitativamente molto simile a quella che lega lo scorrimento alla forza longitudinale;

- per angoli di deriva nulli la forza è nulla; la condizione di *sterzata cinematica* di fatto non si realizza perché per percorrere una traiettoria curvilinea gli pneumatici devono generare forze laterali e dunque devono essere presenti angoli di deriva. La condizione di sterzata cinematica si può approssimare solo se le accelerazioni laterali (e quindi le forze laterali richieste) cui è soggetto il veicolo sono molto basse, indicativamente minori di 0.1 g.

² In particolare la ruota interna deve sterzare più di quella esterna in modo da portare il CIR sul prolungamento dell'asse posteriore

³ Uno pneumatico può sviluppare forze laterali come conseguenza di angoli di deriva e/o angoli di camber; quest'ultimo argomento verrà discusso più avanti.

- il modulo della forza laterale cresce fino ad un valore massimo che si trova un po' al di sotto del coefficiente di attrito statico moltiplicato per il carico normale agente sulla ruota (N). Considerando pneumatici comunemente montati su vetture di serie il massimo di forza laterale viene ottenuto per angoli compresi tra 5-15°.
- per angoli di deriva elevati (positivi o negativi) il modulo della forza tende al coefficiente di attrito radente per il carico normale applicato.

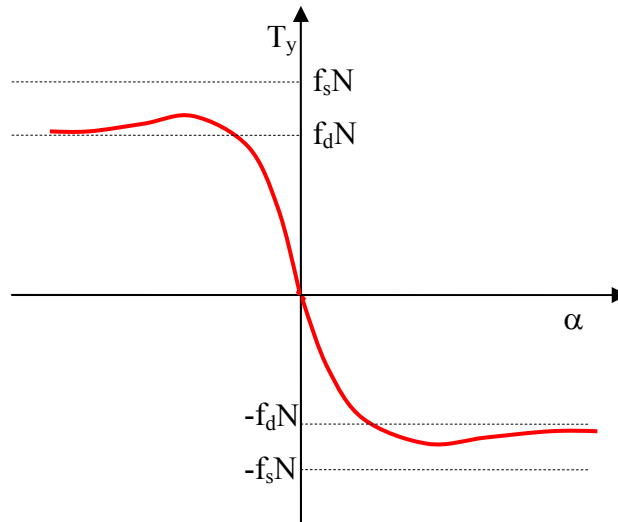


Figura 3-3: andamento qualitativo della forza laterale in funzione dell'angolo di deriva.

Come ultimo aspetto, prima di passare al brush model per deriva semplice, se si considera anche la dinamica laterale di uno pneumatico la definizione di pseudoslittamento longitudinale deve essere leggermente rivista:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{V_x - \Omega R}{V} \\ \alpha = \arcsin\left(\frac{V_y}{V}\right) = \arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right) \approx \frac{V_y}{V_x} \end{cases} \quad (3.2)$$

3.2 Brush model per deriva semplice

In questo paragrafo estenderemo il modello brush alla dimensione laterale. Anche in questo caso valgono delle ipotesi molto simili a quelle viste per il modello longitudinale.

1. Si suppone che il baricentro dello pneumatico stia traslando con velocità V che presenta una componente fuori-piano pari a $V \sin \alpha$ e che lo pneumatico rotoli con velocità angolare Ω , entrambe costanti.
2. Si assume che, per effetto del carico normale N applicato nel baricentro dello pneumatico, si generi un'impronta di contatto di lunghezza finita pari a $2a$ (Figura 2-5).
3. Si definisce un asse di riferimento longitudinale ξ con origine all'inizio dell'impronta di contatto e rivolto verso la parte posteriore dell'impronta (Figura 2-5).

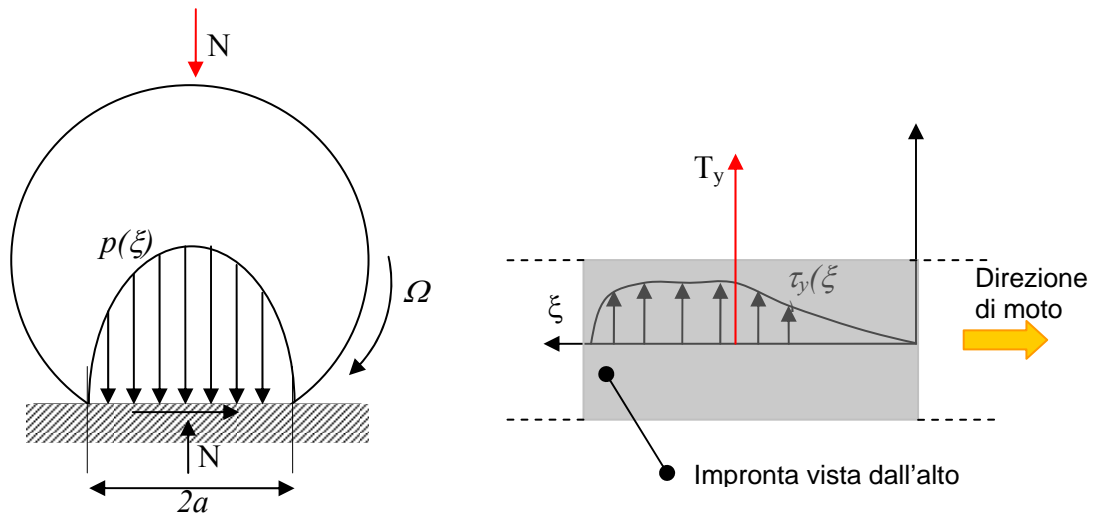


Figura 3-4: deformazione dell'impronta di contatto e distribuzione di pressioni nella stessa

4. Nell'impronta di contatto si genera una distribuzione di forze per unità di lunghezza $p(\xi)$, normali al contatto ed una distribuzione di forze per unità di lunghezza $\tau_y(\xi)$, tangenti al contatto. Le distribuzioni di forze sono tali che:

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} p(\xi) d\xi &= N \\ \int_0^{2a} \tau_y(\xi) d\xi &= T_y \\ \int_0^{2a} \tau_y(\xi)(\xi - a) d\xi &= M_z \end{aligned} \quad (3.3)$$

La distribuzione delle forze normali può essere in prima approssimazione considerata parabolica in funzione della coordinata ξ .

5. Il battistrada è modellizzato attraverso una serie di setole o spazzole con caratteristiche uniformi che possono deformarsi in direzione laterale rispetto alle cinture. Riferendosi alla Figura 3-5, ogni setola ha un estremo superiore solidale alle cinture ed un estremo inferiore in contatto con la strada. L'estremo inferiore può subire uno spostamento $w(\xi)$ rispetto a quello superiore, funzione della posizione occupata dalla setola lungo l'impronta di contatto.

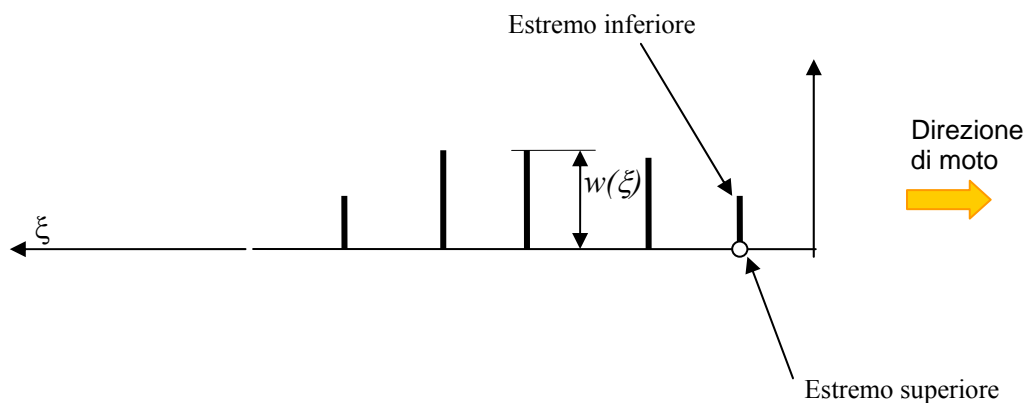


Figura 3-5: spostamento longitudinale delle setole di battistrada

6. Gli spostamenti delle setole avvengono come conseguenza delle forze tangenziali di attrito distribuite; in prima approssimazione si assume che il legame tra forza per unità di lunghezza e spostamento della setola sia lineare

$$\tau_y(\xi) = C_{ky} w(\xi) \quad (3.4)$$

Nella (2.4) il termine C_{ky} rappresenta la rigidità laterale per unità di lunghezza del battistrada.

7. La velocità dell'estremo superiore delle setole (solidale alle cinture) può essere calcolata in prima approssimazione come la velocità delle cinture alle quali sono solidali; in presenza di un angolo di deriva α , tale velocità diviene:

$$V_c = V \sin \alpha \quad (3.5)$$

Sotto queste ipotesi proviamo a valutare quali condizioni devono sussistere affinché il battistrada sia in aderenza (non slitti) rispetto alla via di corsa; per questo è necessario calcolare la velocità dell'estremo inferiore delle setole e imporre che questa sia nulla, ossia abbia la stessa velocità della via di corsa.

3.2.1 Velocità all'interno dell'impronta di contatto

La velocità dell'estremo inferiore di una setola a distanza ξ dal riferimento vale:

$$v_y(\xi) = V \sin \alpha + \frac{dw(\xi)}{dt} \quad (3.6)$$

Ovvero la velocità punto del battistrada a contatto con la strada è data dalla componente di trascinamento $V \sin \alpha$ che rappresenta la velocità dell'estremo superiore della setola, più una componente relativa data dalla deformabilità delle setole stesse. La (2.6) si può scrivere anche come:

$$v_y(\xi) = V \sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (3.7)$$

Come visto nella trattazione del brush model longitudinale l'espressione si può riscrivere come:

$$v_y(\xi) = V \sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial \xi} V = V \left(\sin \alpha + \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \quad (3.8)$$

Dato che gli angoli di deriva sono "piccoli" nell'impiego ordinario degli pneumatici, la (3.8) si può approssimare:

$$v_y(\xi) \approx V \left(\alpha + \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \quad (3.9)$$

Analogamente a quanto fatto per il brush model longitudinale, proviamo a determinare come dovrebbe deformarsi la mescola per garantire che la mescola battistrada sia in aderenza considerando lo pneumatico non fermo ($V \neq 0$) e soggetto ad un angolo di deriva α . La condizione di aderenza si ottiene se la velocità assoluta del battistrada è nulla, ossia uguale alla velocità della superficie di contatto, quindi:

$$v_y(\xi) = 0; \Rightarrow \alpha + \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0; \Rightarrow \partial w = -\alpha \partial \xi \quad (3.10)$$

L'equazione differenziale si risolve in questo modo:

$$\int \partial w = \int -\alpha \partial \xi + C; \quad w(\xi) = -\alpha \xi + C \quad (3.11)$$

Supponendo che all'ingresso dell'impronta di contatto il battistrada sia indeformato, l'espressione precedente diviene semplicemente:

$$w(\xi) = -\alpha \xi \quad (3.12)$$

Quindi, perché la condizione di aderenza sia soddisfatta, la mescola battistrada deve deformarsi in direzione laterale; lo spostamento cresce linearmente con la distanza dall'ingresso ed è opposto rispetto all'angolo di deriva. La situazione di completa aderenza richiede quindi la distribuzione di spostamenti mostrata in Figura 3-6.

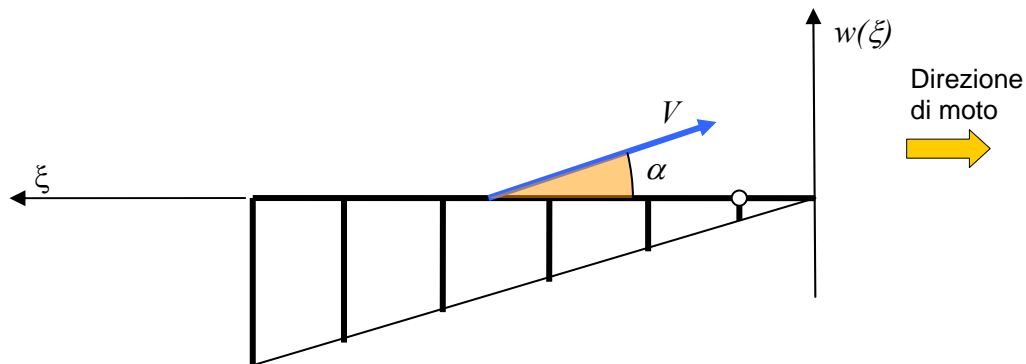


Figura 3-6: deformazione laterale del battistrada richiesta per mantenere l'aderenza

Da un punto di vista fisico, le cinghie seguono il moto del centro impronta e quindi traslano lateralmente con una velocità pari a $V \sin \alpha$, approssimabile a $V \alpha$. Per mantenere l'aderenza il battistrada deve muoversi con la stessa velocità ma nel verso opposto; dall'inizio alla fine dell'impronta, in queste condizioni, gli estremi inferiori delle setole si sono spostati rispetto a quelli superiori di

$$w(2a) = -V \alpha \cdot \Delta t = -V \alpha \frac{2a}{V} = -\alpha 2a \quad (3.13)$$

Risultato ottenibile anche attraverso la (3.12).

3.2.2 Forze tangenziali nell'impronta di contatto

Lo stato di deformazione del battistrada richiesto per avere l'impronta in aderenza deve essere generato da una distribuzione di forze di contatto che, non necessariamente può essere sviluppata dal vincolo. Supponendo che il legame tra forza per unità di lunghezza e spostamento laterale sia lineare, l'espressione (3.12) può essere scritta come:

$$\frac{\tau_y(\xi)}{C_{ky}} = -\alpha\xi; \Rightarrow \tau_y(\xi) = -C_{ky}\alpha\xi \quad (3.14)$$

La distribuzione di forze per unità di lunghezza richiesta per mantenere il battistrada in aderenza è quindi opposta all'angolo di deriva e cresce linearmente all'interno dell'impronta. Per capire se tale distribuzione di forze sia sviluppabile si deve confrontare la distribuzione di forze ottenuta attraverso la (3.14) con la massima forza di attrito sviluppabile dal vincolo. Nella Figura 3-7 vengono mostrata la retta delle forze richieste per mantenere l'aderenza $\tau_y(\xi) = -C_{ky}\alpha\xi$ (in realtà si considera il modulo di queste) confrontate con la massima forza sviluppabile dal vincolo data da $p(\xi)f_s$; nella parte anteriore dell'impronta il livello di forza richiesta è basso se confrontato con quello massimo e qui è possibile avere aderenza tra battistrada e superficie di contatto.

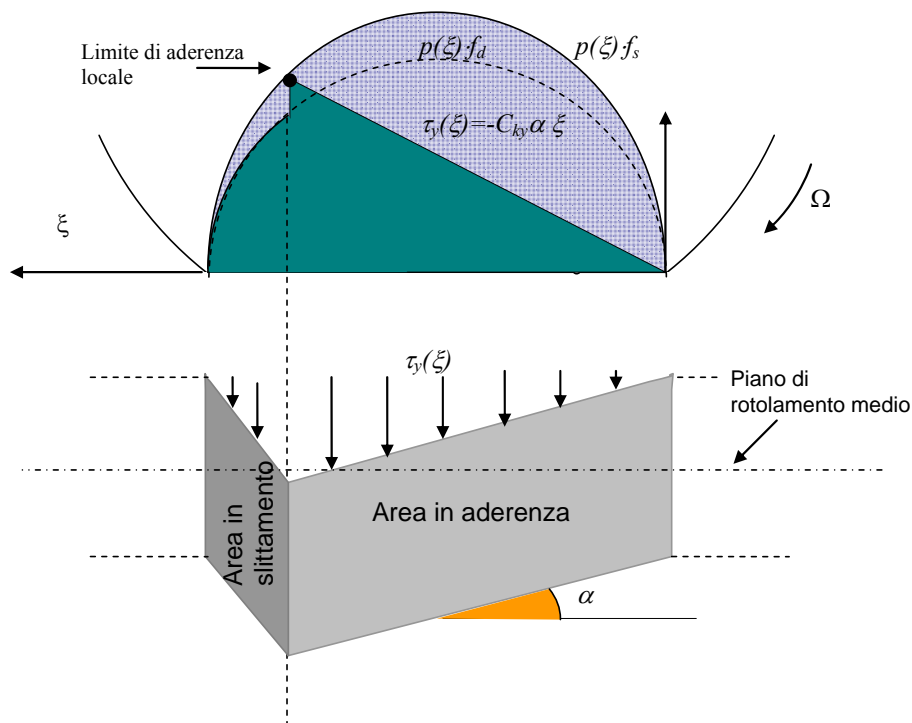


Figura 3-7: Andamento degli sforzi e degli spostamenti laterali nell'impronta di contatto in presenza di un angolo di deriva α .

Nella parte posteriore dell'impronta la distribuzione di forze normali inizia a scendere e quindi si riduce la forza massima scambiabile. Ad un certo punto la distribuzione di forza richiesta interseca quella di forza massima disponibile. Oltre questo limite la forza richiesta per deformare il battistrada e tenerlo in aderenza è più alta di quella generabile attraverso le forze di attrito e le setole slittano recuperando la deformazione. In questa parte di impronta si ha quindi slittamento e le forze di contatto seguono l'andamento della distribuzione di forze

normali; in particolare, dato che le setole slittano rispetto al terreno, la forza segue la distribuzione $p(\xi)f_a$.

Per quanto concerne la deformazione dell'impronta di contatto: nella parte in aderenza il battistrada si deforma lateralmente seguendo la direzione del vettore velocità nel centro ruota (quindi segue la direzione identificata dall'angolo di deriva). Se l'angolo di deriva è positivo la deformazione è negativa, quindi opposta all'angolo stesso. Le forze di contatto devono crescere per generare questa deformazione, fino a quando localmente si raggiunge il limite di attrito statico. Oltre questo punto il battistrada slitta recuperando la deformazione e riportandosi nel piano di rotolamento medio. Dato il verso della velocità di slittamento anche le forze di attrito dinamico sono opposte rispetto all'angolo di deriva e quindi si sommano a quelle generate nella zona di aderenza.

In Figura 3-8 viene rappresentata la deformazione subita dall'impronta di contatto di uno pneumatico in deriva; l'impronta viene deformata in direzione opposta rispetto alla componente laterale di velocità del centro ruota.

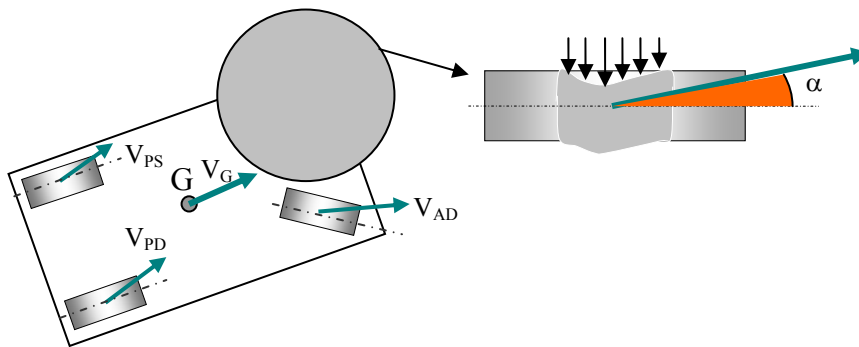


Figura 3-8: deformazione dell'impronta di contatto di uno pneumatico in deriva.

3.2.3 Calcolo della forza tangenziale in funzione dell'angolo di deriva

Integrando la distribuzione delle forze tangenziali per unità di lunghezza si perviene al calcolo della forza laterale complessiva sviluppata al contatto.

$$\int_0^{2a} \tau_y(\xi) d\xi = T_y \quad (3.15)$$

L'andamento qualitativo della forza di contatto in funzione dell'angolo di deriva è raffigurato in Figura 3-9;

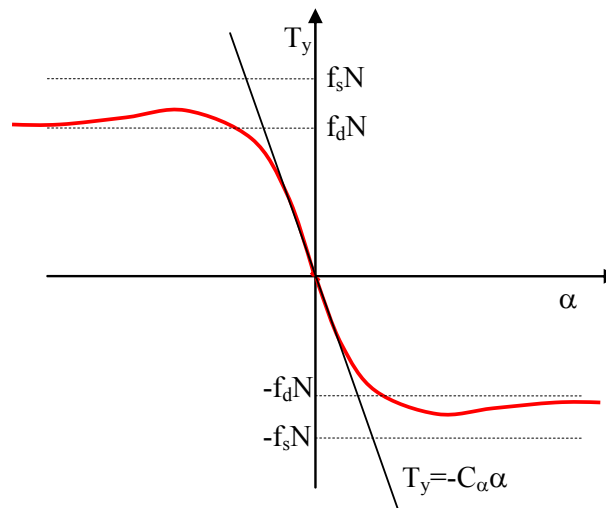


Figura 3-9: andamento qualitativo della forza laterale in funzione dell'angolo di deriva.

per piccoli angoli di deriva la relazione tra forza tangenziale e angolo di deriva è lineare. In questa regione l'impronta è quasi interamente in aderenza e dominano le forze elastiche legate alla deformazione del battistrada. La relazione tra deriva e forza può essere approssimata dall'espressione:

$$T_y \approx -C_\alpha \alpha \quad (3.16)$$

La quantità C_α prende il nome di *rigidezza di deriva* dello pneumatico ed è un parametro estremamente importante per la caratterizzazione della risposta di uno pneumatico in laterale. Si tenga presente infatti che, in condizioni di guida ordinarie, l'angolo di deriva non supera i 2-3° e lo pneumatico lavora con ottima approssimazione nella zona lineare della curva $\alpha-T_y$. Per elevati angoli di deriva tutta l'impronta di contatto è sede di scorrimenti e la distribuzione di forza di contatto per unità di lunghezza è rappresentata di fatto dalla distribuzione di forza normale moltiplicata per il coefficiente di attrito radente

$$T_y = \int_0^{2a} \tau_y(\xi) d\xi \approx \int_0^{2a} f_d p(\xi) d\xi = f_d N \quad (3.17)$$

Per angoli di deriva intermedi la forza di contatto è il risultato di una combinazione tra forze elastiche e forze di attrito che porta ad avere un massimo del valore assoluto di forza laterale per derive comprese tra 5°-15°.

3.2.4 Rigidezza di deriva

La Figura 3-10 riporta un confronto tra le risposte di due pneumatici con rigidezze di deriva differenti: gli pneumatici con rigidezza di deriva "maggiore" presentano in genere delle curve $\alpha-T_y$ più schiacciate verso l'asse delle ordinate. Una rigidezza di deriva maggiore⁴ implica, nel tratto in cui la curva è crescente, una forza maggiore a pari angolo di deriva; questo significa che lo pneumatico più rigido deve "scivolare" meno in direzione laterale per sviluppare la stessa forza di uno meno rigido. Da un punto di vista dell'effetto sulla dinamica di un veicolo, montare pneumatici più rigidi su un asse (avantreno o retrotreno o entrambi) significa rendere quell'asse più preciso nel seguire una traiettoria curvilinea.

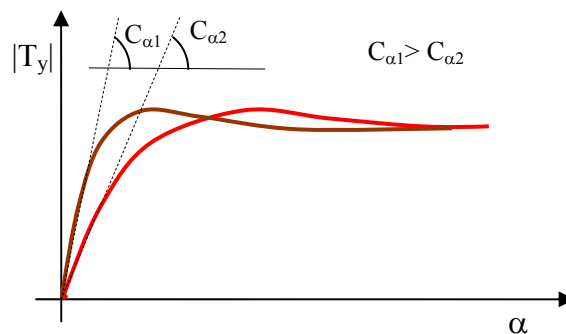


Figura 3-10: confronto qualitativo tra le risposte di due pneumatici con rigidezze di deriva diverse.

Fin qui l'incremento di rigidezza sembrerebbe dunque un fattore positivo. È importante tuttavia considerare che pneumatici con una rigidezza di deriva maggiore presentano il

⁴ La rigidezza di deriva di uno pneumatico varia in funzione di alcuni parametri tra cui: caratteristiche della mescola, altezza del battistrada, disegno battistrada, rigidezza della carcassa, altezza della spalla dello pneumatico, larghezza del battistrada, pressione di gonfiaggio.

massimo di forza tangenziale sviluppabile per angoli di deriva più piccoli. Il tratto crescente della curva $\alpha-T_y$ ha un ruolo importante nel fare percepire ad un utente l'逼近arsi della condizione di forza massima sviluppabile e quindi del limite per un dato asse (anteriore o posteriore). Se la curva ha una pendenza relativamente "morbida" (rigidezza di deriva minore) uno scivolamento laterale piuttosto marcato di un asse comunica all'utente l'逼近arsi del limite con sufficiente anticipo; un incremento di scivolamento (ossia di deriva) produce peraltro un aumento di forza e quindi contribuisce alla tenuta laterale di un asse. Viceversa uno pneumatico con rigidezza di deriva più elevata può fornire una falsa indicazione di sicurezza presentando piccoli angoli di deriva fino al limite di tenuta; questo può portare ad una transizione molto rapida dal tratto lineare fino al punto di massimo e oltre dove ogni incremento di scivolamento comporta una diminuzione di forza laterale e quindi la perdita di tenuta di strada di un asse.

3.2.5 Momento di auto-allineamento

Lo sviluppo di azioni tangenziali laterali non genera semplicemente una forza risultante T_y , ma anche un momento dovuto al fatto che la risultante non passa per il centro impronta. Dato che per angoli di deriva piccoli la risultante passa nella seconda metà dell'impronta di contatto, il momento viene detto di *auto-allineamento* in quanto tende a fare ruotare l'impronta in modo da allinearla nella direzione del vettore velocità. In pratica il momento tende ad annullare l'angolo di deriva. Nella Figura 1-1 si osserva come la distribuzione di forze produca una risultante che passa ad una distanza d rispetto al centro impronta; il momento che ne deriva, pari a $T_y \cdot d$, tende a fare ruotare l'impronta di contatto in senso antiorario, allineando la direzione longitudinale (definita dall'asse ξ) con il vettore velocità V .

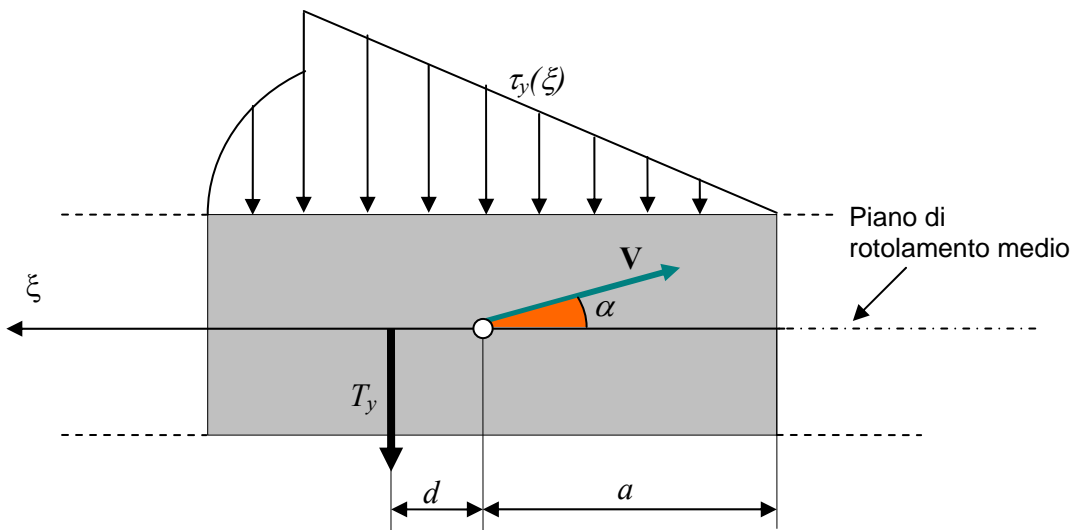


Figura 3-11: punto di applicazione della risultante delle azioni tangenziali.

Il calcolo del momento di auto-allineamento può essere effettuato secondo la seguente formula:

$$M_z = \int_0^{2a} \tau_y(\xi)(b-a)d\xi \quad (3.18)$$

Nella Figura 3-12 vengono mostrati gli andamenti della forza laterale (a) e del momento di auto-allineamento (b) in funzione dell'angolo di deriva per uno pneumatico commerciale. Il momento di auto-allineamento presenta un massimo collocato in genere poco prima del massimo di forza laterale. Incrementando l'angolo di deriva la zona di impronta in slittamento

si estende la risultante si avvicina al centro impronta tendendo ad annullare il momento. Ulteriori incrementi di angolo di deriva possono portare a distribuzioni di forze tangenziali la cui risultante è applicata nella prima metà dell'impronta dando origine quindi a momenti negativi (quindi non generano un effetto di allineamento). Infine per angoli di deriva molto grandi, la distribuzione di forze diviene simile alla distribuzione di pressione moltiplicata per il coefficiente di attrito radente e quindi la risultante passa per il centro impronta portando all'annullamento del momento.

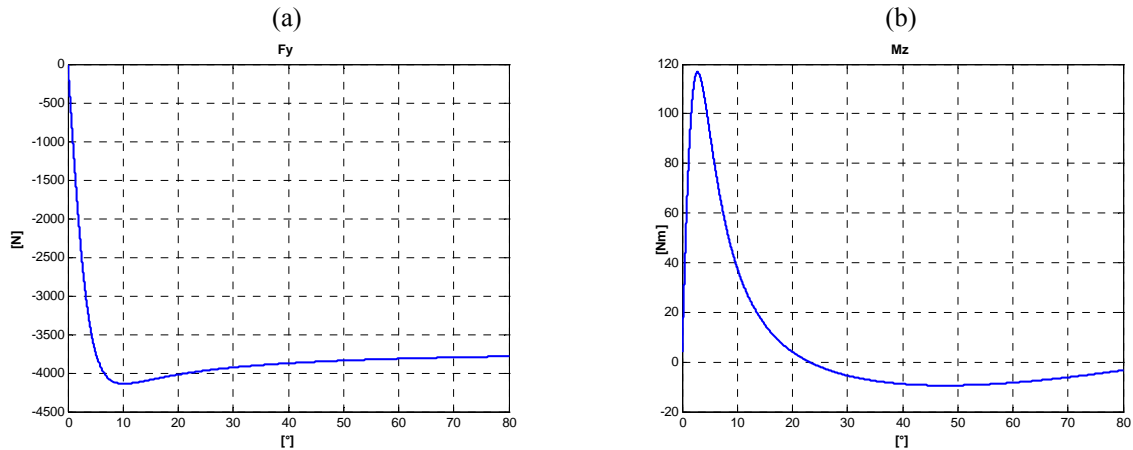


Figura 3-12: andamento della forza laterale (a) e del momento di auto-allineamento (b) in funzione dell'angolo di deriva; carico normale 4000 N, taglia pneumatico 215/45ZR18.

Ai fini della dinamica del veicolo, il momento di auto-allineamento non ha un effetto rilevante: di fatto l'ordine di grandezza è pari a quello della forza laterale moltiplicato per la semilunghezza impronta (circa 5 cm); il momento di auto-allineamento è invece improntante nel calcolo della reazione allo sterzo.

4 Contatto pneumatico-strada: forze combinate

Nella maggior parte dei suoi impieghi uno pneumatico si trova a lavorare nelle condizioni dette di *scorrimento combinato* ovvero con la presenza simultanea di uno scorrimento longitudinale e di un angolo di deriva. Questo comporta che lo pneumatico stia sviluppando contemporaneamente una forza longitudinale ed una laterale. Esistono modelli di tipo *brush* che consentono di analizzare la deformazione dell'impronta di contatto e di comprendere i meccanismi di generazione delle forze in combinato, ma in questo caso ci limiteremo ad una trattazione molto più semplice che possa giustificare il risultato sperimentale.

4.1 Modello per il contatto in combinato

Supponiamo che, in prima approssimazione, sia possibile trascurare la differenza tra i coefficienti di attrito statico e dinamico e quindi che $f_s=f_d=f$. La forza massima che lo pneumatico può scaricare a terra, sempre in prima approssimazione, è pari al carico normale per il coefficiente di attrito. Uno pneumatico sarà quindi in grado di scaricare a terra una forza tangenziale in una direzione generica (longitudinale, laterale o inclinata rispetto al piano di rotolamento) a patto che il suo modulo non superi il valore limite, cioè se:

$$|\mathbf{T}| = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \leq f \cdot N \quad (4.1)$$

La massima forza tangenziale scambiabile dipende dunque dal coefficiente di attrito tra mescola battistrada e manto stradale e dal carico normale agente sullo pneumatico. Seppure estremamente semplificato, il modello descritto tramite l'equazione (4.1) consente di stabilire una interazione tra la forza sviluppata in direzione laterale e longitudinale; in particolare la presenza di una forza longitudinale riduce il valore massimo di forza laterale e viceversa. Si consideri ad esempio la figura Figura 4-1: sull'asse delle ascisse è rappresentata la forza longitudinale, mentre su quello delle ordinate la forza laterale; la circonferenza di raggio $f \cdot N$ rappresenta la curva limite di forza tangenziale sviluppabile. Lo pneumatico sarà quindi in grado di generare qualsiasi combinazione di forze a patto che il vettore risultante giaccia all'interno di questa circonferenza.

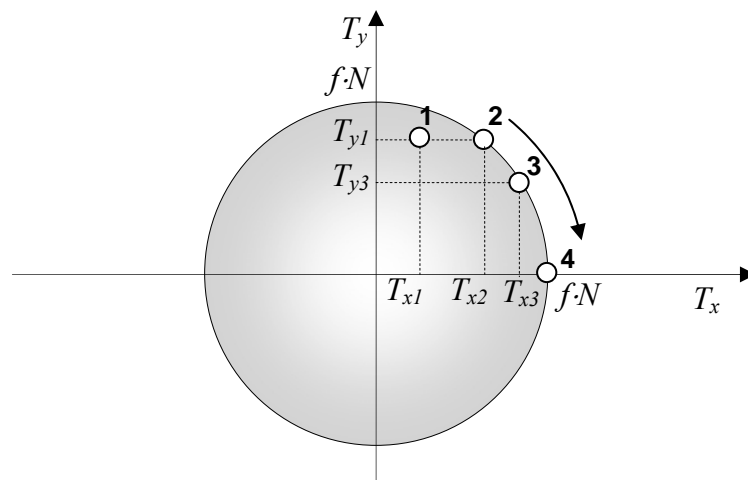


Figura 4-1: circonferenza limite di forza tangenziale scambiabile.

Supponiamo ora che uno pneumatico si trovi a lavorare nella condizione **1** mostrata in figura: allo pneumatico vengono richieste contemporaneamente la forza laterale T_{y1} e quella longitudinale T_{x1} . La presenza di una forza laterale indica che lo pneumatico sta percorrendo una traiettoria curvilinea, mentre la presenza di una forza longitudinale positiva indica che lo pneumatico potrebbe essere una ruota motrice di una vettura. Il punto **1** è all'interno della circonferenza limite e quindi lo pneumatico può fornire i valori di forza richiesti. Se la forza longitudinale viene incrementata (per accelerare il veicolo o per vincere una resistenza dovuta ad una pendenza) lo pneumatico è in grado di mantenere la traiettoria curvilinea fino a quando $T_x \leq T_{x2}$; questa condizione (**2**) di lavoro si trova sulla circonferenza limite. Se la forza longitudinale viene ulteriormente incrementata (ad esempio aumentando la coppia motrice) fino al livello T_{x3} , viene ridotto il valore di forza limite disponibile in direzione laterale: in altre parole non è più possibile per lo pneumatico sviluppare una forza pari a T_{y1} ; nel punto **3** la forza laterale massima non può generare l'accelerazione centripeta richiesta per mantenersi sulla traiettoria curvilinea precedente. Il risultato finale è che lo pneumatico deve portarsi su una traiettoria curvilinea di raggio maggiore per trovare una nuova condizione di equilibrio.

Se la forza longitudinale richiesta è pari a $f \cdot N$ (condizione **4**) il vincolo viene saturato in direzione longitudinale: in pratica tutta la forza disponibile viene sfruttata in direzione longitudinale azzerando il margine disponibile per la forza laterale. In queste condizioni lo pneumatico non può che seguire una traiettoria rettilinea.

Tra le conseguenze di quanto detto: se viene applicata alle ruote motrici una coppia tale da portare a saturazione il vincolo in direzione longitudinale, non esiste possibilità di sviluppare forze laterali sull'asse motore; come conseguenza accelerando a fondo sui veicoli a trazione posteriore (soprattutto a marce basse) è possibile innescare un testacoda perché l'asse posteriore scivola lateralmente di fatto senza opporre resistenza.

Per la stessa ragione, quando le ruote anteriori di un veicolo risultano "bloccate" per un eccesso di coppia frenante, tutta la forza disponibile è impiegata in direzione longitudinale e risulta impossibile direzionare il veicolo agendo sullo sterzo (da cui l'importanza dei sistemi ABS che impediscono il bloccaggio delle ruote in frenata).

4.2 Forze tangenziali in condizioni di scorrimento combinato

Il modello utilizzato nel paragrafo precedente descrive in modo qualitativo la forza che può sviluppare uno pneumatico in condizioni combinate. Nella realtà la curva limite di lavoro non è esattamente una circonferenza e risulta comunque utile riuscire a correlare i livelli di forza sviluppata nelle due direzioni a scorrimento, angolo di deriva e carico normale presenti sullo pneumatico.

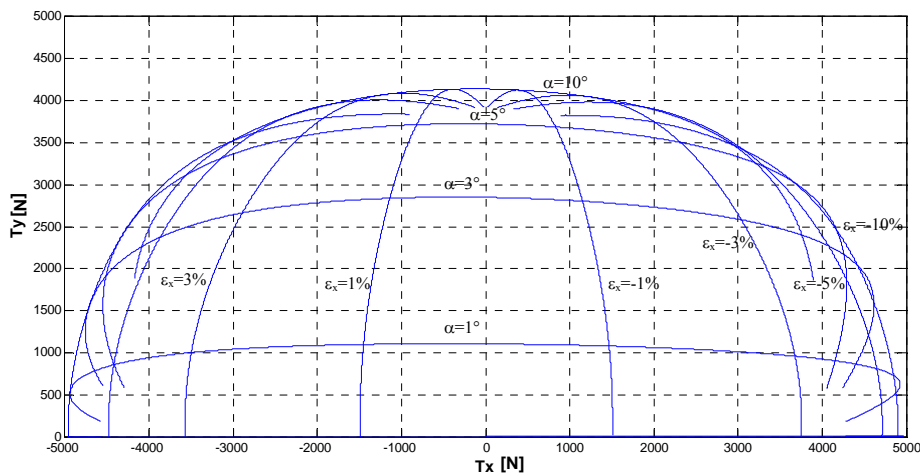


Figura 4-2: andamento della forza laterale in funzione della longitudinale; carico normale 4000 N, taglia pneumatico 215/45ZR18.

La Figura 4-2 riporta i valori di forza longitudinale e laterale generati da uno pneumatico commerciale soggetto ad un carico normale di 4000 N (si considerano solo i valori di forza laterale positiva, assumendo che la curva si simmetrica); si nota subito come la massima forza laterale non coincida con la massima forza longitudinale, in particolare la massima forza longitudinale in accelerazione è pari a 4900 N mentre la massima forza laterale è di 4140 N. Questo è legato alla distribuzione di forze tangenziali che si sviluppano effettivamente in puro longitudinale o in puro laterale: il modo in cui lavora e si deforma lo pneumatico in deriva è diverso da quello che si produce in scorrimento semplice e, di conseguenza, le zone di aderenza/slittamento hanno forme ed estensioni differenti; questo può dunque produrre combinazioni differenti delle forze dovute alla deformazione elastica e da quelle legate all'attrito portando quindi a valori di forza massima diversi.

Anche le deformazioni nell'impronta in frenata e accelerazione sono differenti e si produce una piccola differenza tra la forza massima ottenibile in frenata (4960 N) e quella in accelerazione (4900 N).

La curva limite dunque in generale non è una circonferenza, come visto nel modello semplificato rappresentato dalla (4.1), ma più assimilabile ad un'ellisse.

Oltre alla curva limite, la Figura 4-2 riporta ulteriori indicazioni mostrando le curve che legano forza laterale e longitudinale per angoli di deriva e scorrimenti fissati. La curva per $\alpha=1^\circ$ ad esempio mostra come per $F_x=0$ si ottenga una forza laterale massima di circa 1200 N (si è in condizioni di deriva semplice); per incrementi del modulo di F_x il valore di forza laterale generato con lo stesso angolo di deriva invece decresce progressivamente. Le curve a deriva costante intersecano delle curve a scorrimento costante e risulta così possibile determinare quali forze longitudinali e laterali verranno generate da una combinazione di deriva e scorrimento.

Sia per caratterizzare le prestazioni di uno pneumatico che per modellizzarlo e analizzare l'effetto della sua risposta sulla dinamica di un veicolo, è importante determinare queste relazioni:

$$\begin{cases} T_x = T_x(\varepsilon_x, \alpha, N) \\ T_y = T_y(\varepsilon_x, \alpha, N) \end{cases} \quad (4.2)$$

4.2.1 Curve F_x - ε_x e F_y - α in condizioni di scorrimento combinato

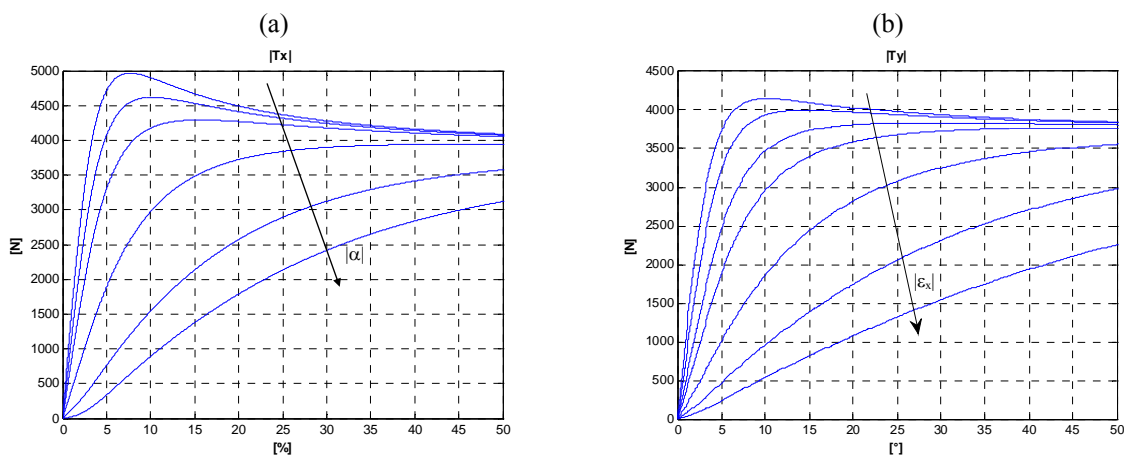


Figura 4-3: curve $|T_x|$ - ε_x parametrizzate in funzione dell'angolo di deriva (a) e curve $|T_y|$ - α parametrizzate in funzione dello scorrimento (b).

Come discusso in precedenza, l'impegno di uno pneumatico in una delle due direzioni riduce il limite disponibile per l'altra. In questo senso se si considera il legame tra F_x e ε_x , (Figura 4-3a) la presenza di un angolo di deriva sovrapposta ad uno scorrimento longitudinale, comporta un progressivo schiacciamento verso il basso della curva. Di fatto, dato che lo pneumatico sta sviluppando una forza laterale (crescente con l'incremento di angolo di deriva), si abbassa il limite massimo di forza longitudinale disponibile. Ogni incremento dell'angolo di deriva comporta una riduzione del valore di forza longitudinale ottenibile con un dato scorrimento.

In modo analogo, se si considera la relazione tra la T_y ed α (Figura 4-3b), la presenza di uno scorrimento produce un abbassamento progressivo delle curve: si può notare anche in questo caso come il limite massimo di forza laterale scaricabile a terra venga ridotto e anche come la rigidità di deriva (pendenza della curva nell'origine) si abbassi per ogni incremento di scorrimento.

4.2.2 Coefficienti di aderenza generalizzati

Le espressioni riportate nella (4.2) possono anche essere viste in un modo differente; consideriamo i rapporti tra le forze tangenziali ed il carico normale agente su uno pneumatico:

$$\begin{cases} \mu_x(\varepsilon_x, \alpha, N) = -\frac{T_x}{N} \\ \mu_y(\varepsilon_x, \alpha, N) = -\frac{T_y}{N} \end{cases} \quad (4.3)$$

I coefficienti μ_x e μ_y vengono detti *coefficienti di aderenza generalizzati*; non rappresentano il coefficiente di attrito tra pneumatico e superficie di contatto ma quantificano il valore della forza tangenziale in rapporto al carico normale disponibile. Con questa definizione è possibile esprimere le forze tangenziali come:

$$\begin{cases} T_x = -\mu_x(\varepsilon_x, \alpha, N) \cdot N \\ T_y = -\mu_y(\varepsilon_x, \alpha, N) \cdot N \end{cases} \quad (4.4)$$

Ovvero la forza tangenziale longitudinale è pari a μ_x moltiplicato per il carico normale N e, in modo del tutto analogo, la forza tangenziale laterale è pari a μ_y per il carico normale. La presenza del segno meno è una semplice convenzione e indica che le forze tangenziali sono opposte alla direzione della velocità di strisciamento del punto di contatto nominale (identificata dalla velocità di scorrimento e dall'angolo di deriva).

Trattandosi di un rapporti tra forze non puntuali, ma estesi ad una condizione di lavoro generica, anche i coefficienti di aderenza generalizzati dipendono dallo pseudoslittamento e dall'angolo di deriva. Nella Figura 4-4a viene rappresentato l'andamento del coefficiente di aderenza generalizzato μ_x in funzione dello pseudoslittamento longitudinale; sono mostrate differenti curva parametrizzate rispetto all'angolo di deriva. Si nota come l'andamento delle curve sia in pratica identico a quello della Figura 4-3a a meno della divisione per il carico normale N (pari a 4000 N). La curva per $\alpha=0$ mostra come il massimo valore del rapporto T_x/N ottenibile sia circa a 1.25 mentre, per scorrimenti molto elevati il rapporto tra le forze decresca fino a circa 1. Il valore di coefficiente di aderenza generalizzato con $\alpha=0$ e scorrimenti elevati (ad esempio a ruota bloccata) è assimilabile al coefficiente di attrito radente tra pneumatico e strada visto nella (1.1).

Osservando la Figura 4-4b riferita al coefficiente μ_y si nota invece come il massimo rapporto tra forza laterale e longitudinale sia pari a circa 1.05, dunque sensibilmente inferiore rispetto a quello longitudinale. Anche in questo caso si può pensare che per scorrimento nullo e per angoli di deriva elevati il coefficiente μ_y sia assimilabile al coefficiente di attrito radente.

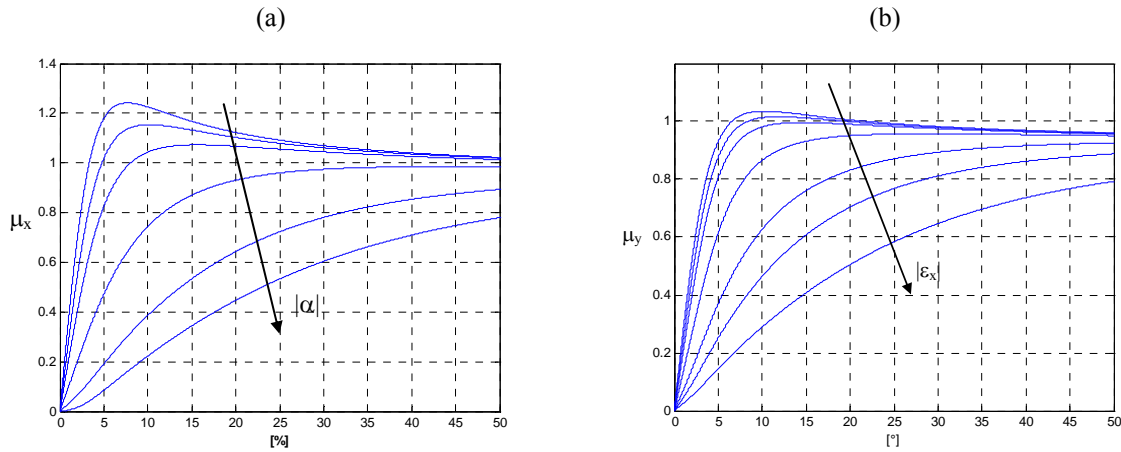


Figura 4-4 curve μ_x - ε_x parametrizzate in funzione dell'angolo di deriva (a) e curve μ_y - α parametrizzate in funzione dello scorrimento (b).

4.3 Effetto del carico normale

Riprendiamo ora l'espressione che lega le forze di contatto tangenziali ai coefficienti di aderenza generalizzati:

$$\begin{cases} T_x = -\mu_x(\varepsilon_x, \alpha, N) \cdot N \\ T_y = -\mu_y(\varepsilon_x, \alpha, N) \cdot N \end{cases} \quad (4.5)$$

È possibile ottenere le forze tangenziali moltiplicando il corrispondente coefficiente di aderenza generalizzato per il carico normale. La relazione tra forza tangenziale e carico non è tuttavia lineare; entrambi i coefficienti sono a loro volta dipendenti dal carico. In particolare si rileva sperimentalmente come i coefficienti decrescano con l'incremento di carico.

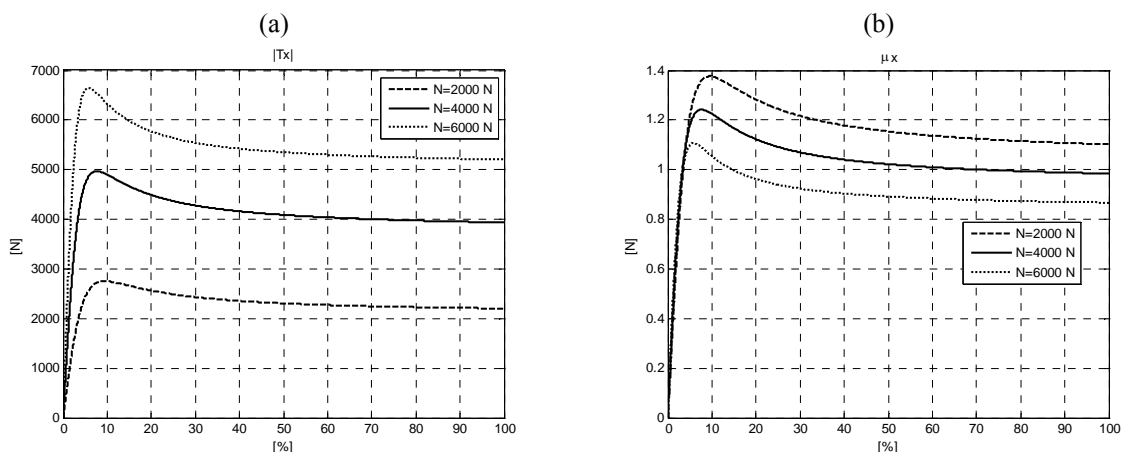


Figura 4-5: curve $|T_x|$ - ε_x per diversi valori del carico normale (a); curve μ_x - ε_x per diversi valori del carico normale (b). $\alpha=0$; pneumatico 215/45ZR18.

La Figura 4-5a, mostra l'andamento del modulo della forza longitudinale in funzione dello scorrimento per tre valori di carico normale: 2000, 4000 e 6000 N; l'incremento di carico porta ad un incremento di forza scaricabile a terra ma, osservando i valori di forza tangenziale

per uno scorrimento del 100% (ruota bloccata), si osserva come con $N=2000$ N il rapporto tra forza tangenziale e normale sia maggiore di 1, mentre con $N=6000$ N lo stesso rapporto sia divenuto significativamente minore dell'unità.

Questo fenomeno può essere messo maggiormente in evidenza considerando il coefficiente di aderenza generalizzato μ_x , il cui andamento è rappresentato in Figura 4-5b. Con $N=2000$ N il rapporto tra forza tangenziale e normale a ruota bloccata è circa 1.1, scende a circa 1 per $N=4000$ N e scende ulteriormente sotto 0.9 per $N=6000$ N. Per quanto concerne il valore massimo del rapporto tra forza longitudinale e normale, si passa da quasi 1.4 per $N=2000$ N a meno di circa 1.1 per $N=6000$ N.

Un comportamento analogo e, anche più evidente, si riscontra in direzione laterale, come si osserva nella Figura 4-5.

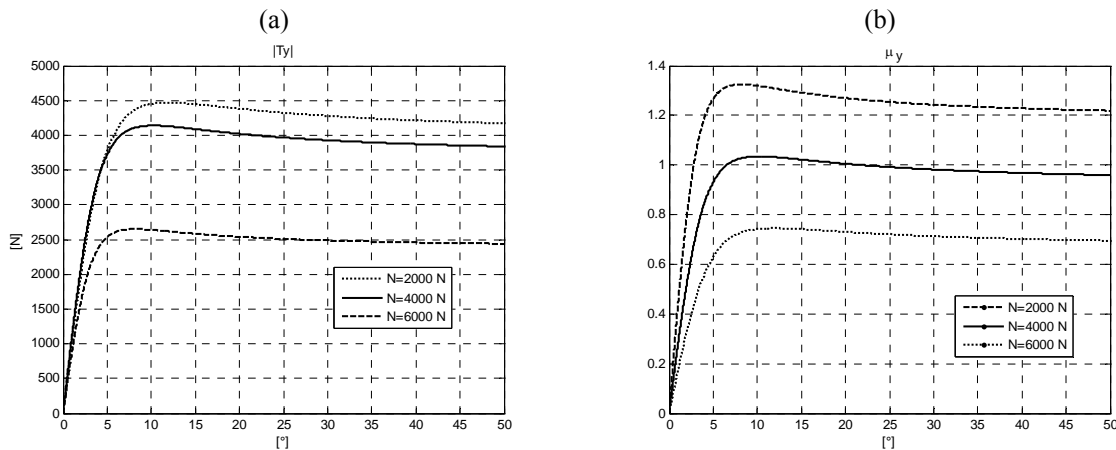


Figura 4-6: curve $|T_y|$ - α per diversi valori del carico normale (a); curve μ_y - α per diversi valori del carico normale (b). $\epsilon_x=0$; pneumatico 215/45ZR18.

Di fatto quindi il legame tra forza tangenziale e carico normale non è lineare: raddoppiando il carico non raddoppia la forza massima (indipendentemente dalla direzione) che uno pneumatico può scaricare al suolo. Sperimentalmente si riscontra che raddoppiando il carico si ha un incremento di forza massima inferiore al doppio.

4.3.1 Dipendenza del coefficiente di attrito dal carico normale

La dipendenza dei coefficienti di aderenza generalizzati dal carico normale dipende dalla variazione di coefficiente di attrito tra mescola e superficie stradale con il carico normale. Questo comportamento è tipico per gli elastomeri soprattutto per mescole “morbide”. La causa di questo fenomeno è da ricercare nell’area di contatto effettiva A che si sviluppa tra elastomero e superficie di contatto; in genere quest’area è molto minore di quella “nominale”. Se un provino di gomma di area nominale A_0 è premuto con un carico N su una superficie liscia l’area di contatto effettiva si può stimare come:

$$A = A_0 \left(\frac{N}{N_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.6)$$

Dove N_0 è un valore di carico di riferimento. La (4.7) indica che l’incremento di area che si ottiene non è direttamente proporzionale al carico; la relazione tra area di contatto effettiva e carico è mostrata nella Figura 4-7a.

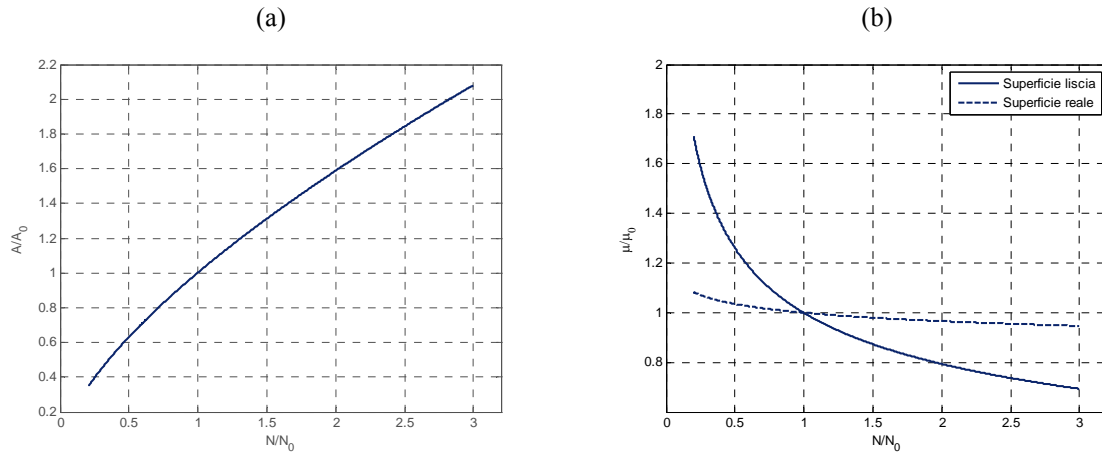


Figura 4-7: variazione dell'area di contatto effettiva in funzione del carico normale applicato (a); variazione dei coefficienti di attrito in funzione del carico normale applicato (b).

La forza di attrito che si genera all'interfaccia si può ritenere in prima approssimazione proporzionale all'area di contatto effettiva: infatti, più l'area di contatto si estende, maggiori sono le interazioni tra elastomero e superficie. Se l'incremento di area di contatto è meno che lineare rispetto all'incremento di carico, il rapporto tra la forza tangenziale di attrito ed il carico (ossia il coefficiente di attrito) non rimane costante al variare del carico ma tende a decrescere con l'aumento del carico stesso. Traducendo in formule questo ragionamento si può scrivere:

$$T \propto A; \Rightarrow \mu \propto \frac{A}{N} = \frac{1}{N} A_0 \left(\frac{N}{N_0} \right)^{\frac{2}{3}} = \quad (4.7)$$

Quindi, se si considera il coefficiente di attrito al carico di riferimento N_0 :

$$\mu_0 \propto \frac{A_0}{N_0} \quad (4.8)$$

Ammettendo che la costante di proporzionalità sia la stessa e considerando ora il rapporto tra μ e μ_0 si ottiene:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\frac{A_0}{N_0} \left(\frac{N}{N_0} \right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{A_0}{N_0}}; \Rightarrow \mu = \mu_0 \left(\frac{N}{N_0} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.9)$$

La (4.9) indica quindi che il coefficiente di attrito diminuirà con l'incremento di carico; la nella Figura 4-7b offre una rappresentazione grafica della (4.9), valida nel caso di superficie di contatto liscia. Nel caso di superfici reali l'esponente della (4.9) è in genere attorno a $-1/20$.

4.4 Angolo di camber

A margine del capitolo dedicato alla generazione di forze in combinato descriviamo brevemente un meccanismo di generazione di forza di contatto laterale che non si basa sullo sviluppo di un angolo di deriva ma dell'angolo di camber o campanatura. Come mostrato in Figura 4-8 l'angolo di camber γ è l'angolo compreso tra il piano di rotolamento e la normale alla superficie di contatto. Quando lo pneumatico viene montato su un veicolo, si parla di angolo di camber positivo se il piano della ruota interseca la mezzeria del veicolo sotto il livello del terreno.

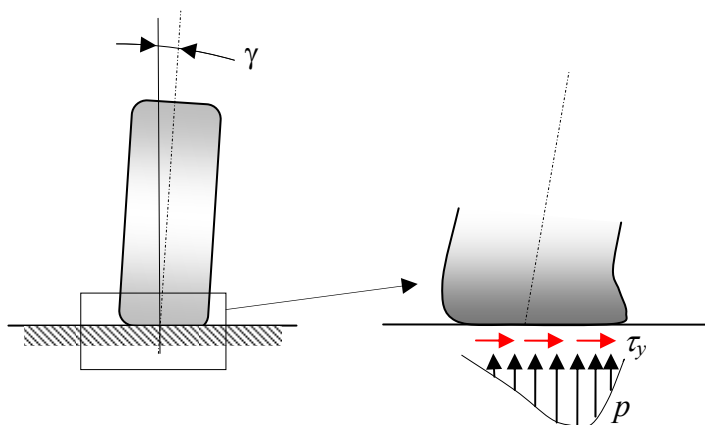


Figura 4-8: angolo di camber di uno pneumatico e distribuzione di forze normali e tangenziali associate.

In presenza di un angolo di camber, la distribuzione di forze normali diviene asimmetrica in direzione trasversale; in particolare le azioni normali si scaricano prevalentemente su fianco maggiormente compresso. In questo modo si ottiene in genere un incremento della rigidità radiale dello pneumatico (il fianco è più rigido della parte centrale) cui si associano una da un lato una diminuzione della resistenza a rotolamento e dall'altro un'usura accelerata e non uniforme.

All'interfaccia pneumatico strada nasce anche una distribuzione di forze tangenziali che si oppone allo scivolamento del battistrada in direzione laterale; la risultante delle forze tangenziali è diretta verso la spalla maggiormente compressa.

L'inclinazione del piano di rotolamento dello pneumatico porta dunque alla generazione di una forza laterale; in alcune tipologie di veicolo come i motocicli, la forza laterale che deve essere sviluppata per mantenere il veicolo su una traiettoria curvilinea, viene generata prevalentemente attraverso l'angolo di camber. Inclinare un motoveicolo verso l'interno curva comporta infatti la nascita di angoli di camber sugli pneumatici e, come conseguenza, la produzione di forze di contatto dirette verso l'interno curva.

Gli pneumatici per motoveicoli sono disegnati in modo da lavorare con angoli di camber molto elevati (anche attorno a 45°), mentre gli pneumatici per autovettura in genere possono lavorare con angoli di camber compresi tra $\pm 3^\circ$.

4.4.1 Combinazione di camber e deriva

Uno pneumatico può generare forze di contatto laterali sia attraverso angoli di deriva che di camber. La Figura 4-9 mostra come variano le curve che legano la forza laterale T_y all'angolo di deriva in presenza di differenti valori di angolo di camber per uno pneumatico da autovettura. Come si nota l'angolo di camber riesce a modificare il valore di picco della curva andandosi a sommare all'effetto della deriva in uno dei due semipiani e sottraendosi nell'altro.

Di fatto l'angolo di camber cambia la forma dell'impronta di contatto e cambia la distribuzione di deformazioni all'interno della stessa; una combinazione opportuna di camber e deriva può quindi portare uno pneumatico a lavorare in un modo migliore e a massimizzare la forza di contatto laterale ottenibile.

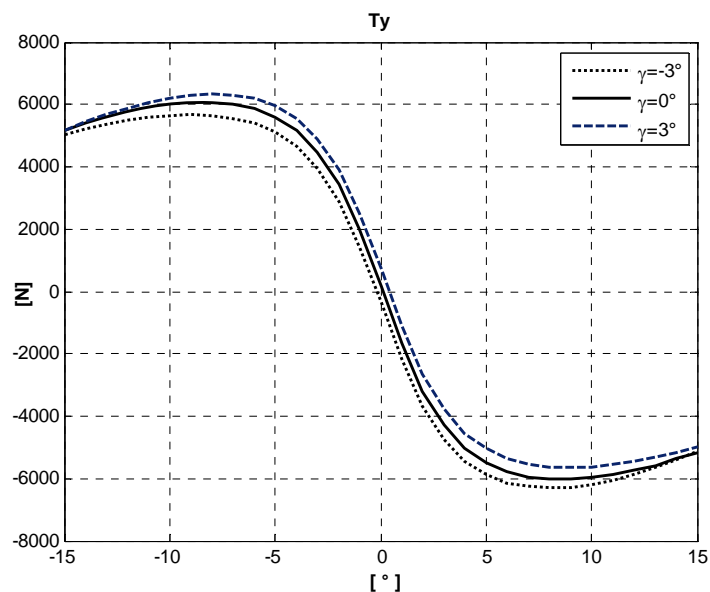


Figura 4-9: curve T_y - α parametrizzate in funzione dell'angolo di camber; pneumatico 255/40R18, carico normale 6000 N.

D'altra parte l'effetto del camber può "opporsi" in una certa misura a quello della deriva: questo accade ad esempio se, durante la percorrenza di una curva, gli pneumatici sul lato esterno curva (che generano la forza laterale maggiore) si trovano ad avere camber positivo, ossia se sono inclinati verso l'esterno; in queste condizioni la deriva genera una forza verso l'interno curva mentre il camber tende a generare una forza diretta verso l'esterno curva, riducendo il valore di forza massima complessiva. È importante quindi che le sospensioni di un veicolo siano progettate in modo da non portare mai gli pneumatici sul lato esterno curva a lavorare con angoli di camber positivi.

Come ultima osservazione, nella Figura 4-9 tutte le curve convergono al valore di carico normale moltiplicato per il coefficiente di attrito dinamico per angoli di deriva molto elevati: quando l'impronta slitta in direzione laterale il valore di forza ottenibile è praticamente lo stesso sia che lo slittamento sia prodotto da una deriva che da un camber o da una combinazione dei due.

5 Modelli non fisici dello pneumatico

Analizzando il contatto pneumatico strada in puro longitudinale o in puro laterale, abbiamo impiegato il *brush model*, un modello fisico di pneumatico. Il modello impiegato fornisce un'interpretazione dei meccanismi alla base della generazione di forze di contatto e consente anche di prevedere alcune prestazioni di uno pneumatico in termini di forza longitudinale/laterale generate in funzione dell'angolo dello scorrimento o dell'angolo di deriva.

La complessità dei modelli fisici può ovviamente crescere (si veda ad esempio il risultato di Figura 5-1) includendo la descrizione dello scorrimento combinato, gli effetti del disegno battistrada, l'influenza della deformabilità della struttura e così via, fino ad arrivare a modelli ad elementi finiti dello pneumatico in rotazione.

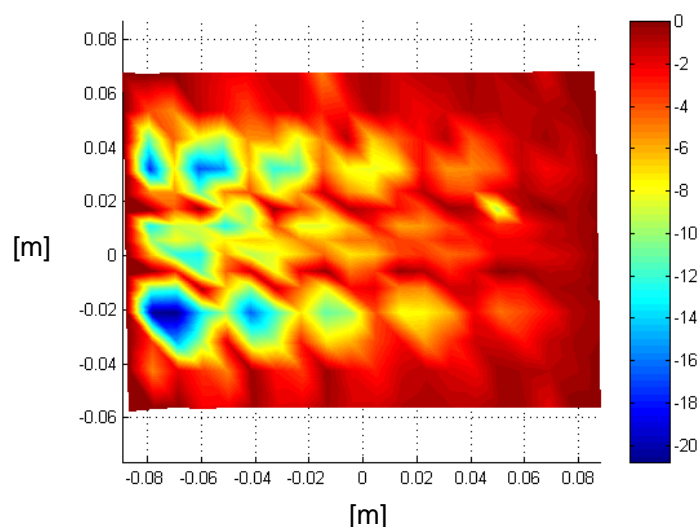


Figura 5-1: modello a parametri concentrati dello pneumatico: previsione deformazione dell'impronta di contatto e delle forze tangenziali (pneumatico 195/55R15, $\alpha=-1^\circ$).

I modelli fisici costituiscono uno strumento fondamentale per la progettazione di uno pneumatico in quanto permettono di prevedere come cambierà la risposta di uno pneumatico in funzione dei parametri dai quali è caratterizzato e consentono di migliorare la comprensione fisica di come la variazione di alcuni parametri si rifletterà sulle prestazioni complessive.

Al di là degli indubbi vantaggi, un modello fisico presenta comunque alcuni limiti che è bene mettere in evidenza: al crescere della complessità del modello cresce il numero di prove richieste per fornire al modello tutti i dati in ingresso necessari per il suo funzionamento. Ad esempio le proprietà della miscela battistrada cambiano con: temperatura, umidità, frequenza del forzamento, ampiezza della deformazione; la caratterizzazione della miscela può richiedere dunque un dispendio di risorse e tempi non indifferente. Inoltre, quanto più un modello è complesso, tanto più complessa è l'interazione tra i vari parametri del sistema e quindi uno stesso risultato finale può essere generato da combinazioni di parametri differenti; questo significa che può risultare difficile attribuire un risultato ad una data causa. Accanto a questo si deve anche considerare il costo computazionale, che per modelli complessi (modelli ad elementi finiti in rotolamento) può essere estremamente oneroso.

Esistono applicazioni nelle quali in realtà non si è interessati alla comprensione dei fenomeni fisici che avvengono all'interno del battistrada e/o della struttura di uno pneumatico; in certi casi lo pneumatico è visto semplicemente come una "scatola nera" alla quale vengono

applicati alcuni ingressi (carico normale, scorrimento, deriva e camber) e si ottengono delle uscite (forze di contatto e momenti di autoallineamento).

Questi modelli, detti *non fisici*, sono di solito impiegati nella valutazione dell'impatto di un certo pneumatico sulla dinamica di un veicolo. In questi casi l'obiettivo è capire come la prestazione di un veicolo in termini di accelerazione, inserimento in curva, stabilità ecc. vari in funzione dello pneumatico montato. Ai fini della dinamica di un veicolo non è importante conoscere i meccanismi fisici che portano alla generazione di determinate forze di contatto, è solo importante sapere quale forze fornirà uno pneumatico in funzione delle condizioni di lavoro cui è sottoposto. Queste applicazioni inoltre richiedono spesso un'elevata velocità di calcolo⁵, che un modello fisico complesso non può offrire.

I modelli non fisici in pratica non sono altro che un'interpolazione più o meno complessa di dati sperimentali. In particolare attraverso macchine di prova apposite, è possibile imporre ad uno pneumatico 4 parametri: carico normale, scorrimento, angolo di deriva e angolo di camber. Parallelamente vengono misurate le forze di contatto longitudinale, laterale e momento di auto-allineamento. I dati sperimentali possono essere poi interpolati attraverso formule analitiche o reti neurali in modo da ottenere un legame diretto tra condizioni di lavoro e forze di contatto.

5.1.1 Magic Formulae

Le cosiddette *Magic Formulae* dovute a Pacejka rappresentano il modello non fisico di pneumatico più diffuso in ambito di dinamica del veicolo; di fatto la quasi totalità dei software per lo studio della dinamica di veicoli stradali implementa questo modello. La formulazione più complessa caratterizza uno pneumatico attraverso circa 150 coefficienti, con i quali è possibile descrivere i seguenti legami:

$$\begin{cases} T_x = T_x(\varepsilon_x, \alpha, \gamma, N) \\ T_y = T_y(\varepsilon_x, \alpha, \gamma, N) \\ M_z = M_z(\varepsilon_x, \alpha, \gamma, N) \end{cases} \quad (5.1)$$

Se si considera una formulazione semplificata, relativa al solo caso di scorrimento longitudinale (quindi non in condizioni di combinato), si ha che:

$$T_x = -D_x \sin(C_x \arctan(B_x \varepsilon_x - E_x B_x \varepsilon_x + E_x \arctan(B_x \varepsilon_x))) \quad (5.2)$$

La relazione (5.2) consente di legare la forza tangenziale al valore di scorrimento cui è soggetto lo pneumatico. In realtà anche i parametri B_x , C_x , E_x e D_x dipendono dal carico normale applicato. In particolare si può osservare come il valore massimo della forza ottenibile sia pari esattamente a D_x che moltiplica la funzione seno. D_x dunque sarà pari al carico normale per il massimo del coefficiente di aderenza generalizzato μ_x .

Per la forza laterale ed il momento di auto-allineamento valgono, nelle condizioni di pura deriva, le seguenti formule:

$$T_y = -D_y \sin(C_y \arctan(B_y \alpha - E_y B_y \alpha + E_y \arctan(B_y \alpha))) \quad (5.3)$$

⁵ Nei simulatori di guida ad esempio il modello di veicolo deve girare in tempo reale.

$$M_z = t(\alpha)T_y + M_{zr}; \quad (5.4)$$

$$t(\alpha) = D_t \cos(C_t \arctan(B_t \alpha - E_t(B_t \alpha - \arctan(B_t \alpha)))) \cos \alpha$$

$$M_{zr} = D_r \cos(\arctan(B_r \alpha)) \cos \alpha$$

La Figura 5-2 riporta i risultati dell'interpolazione (linea continua) per la stima della forza longitudinale in funzione dello scorrimento per 3 valori del carico normale. La precisione dei risultati risulta molto buona con un costo computazionale minimo, legato solo alla valutazione delle formule analitiche.

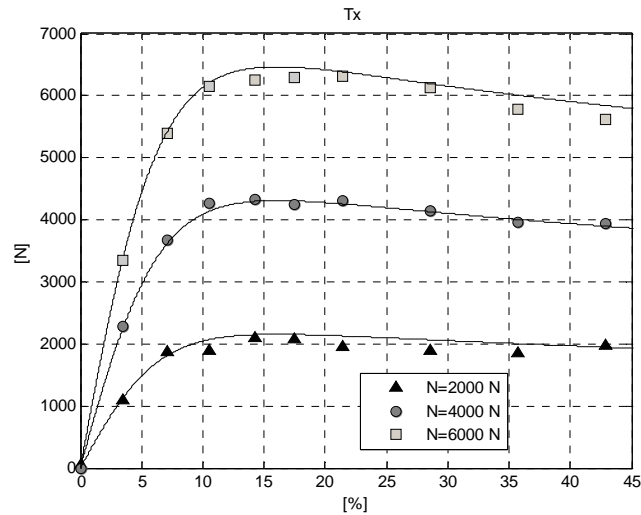


Figura 5-2: forze longitudinali per uno pneumatico 195/65R15: punti sperimentali confrontati con l'interpolazione (linea continua) ottenuta attraverso le Magic Formulae.

6 Contatto ruota-rotaia

Il contatto ruota rotaia presenta una serie di aspetti differenti rispetto a quello pneumatico strada:

- Il contatto avviene tra due corpi realizzati in acciaio; questo significa che le deformazioni dei corpi a contatto e, di conseguenza, le dimensioni dell'area di contatto risultano inferiori rispetto a quelle viste nel contatto pneumatico-strada. Le deformazioni dei corpi a contatto sono inoltre confrontabili e quindi non è più possibile trascurare la deformabilità della via di corsa rispetto a quella della ruota.
- L'ordine di grandezza delle forze scaricate sull'area di contatto è di circa 100 kN, contro valori di circa 5 kN per il contatto pneumatico strada.
- Nella quasi totalità dei casi le due ruote di uno stesso asse sono calettate sullo stesso asse e formano quindi un unico corpo rigido denominato *sala*. Le uniche eccezioni sono rappresentate dai veicoli ferrotranviari con piano ribassato.
- La geometria dei corpi a contatto risulta complessa: la forma e la posizione dell'area di contatto (o delle aree di contatto nel caso di contatti multipli) varia in funzione della posizione relativa tra sala e binario.

Il contatto ruota-rotaia può essere descritto attraverso modelli matematici più complessi di quelli visti nel contatto pneumatico-strada che non possono trovare spazio in questa sede; nel seguito ci limiteremo a descrivere qualitativamente alcuni aspetti del contatto per giustificare la forma dei profili di ruota e rotaia e daremo dei cenni sul calcolo della forze di contatto.

6.1 Geometria dei corpi a contatto

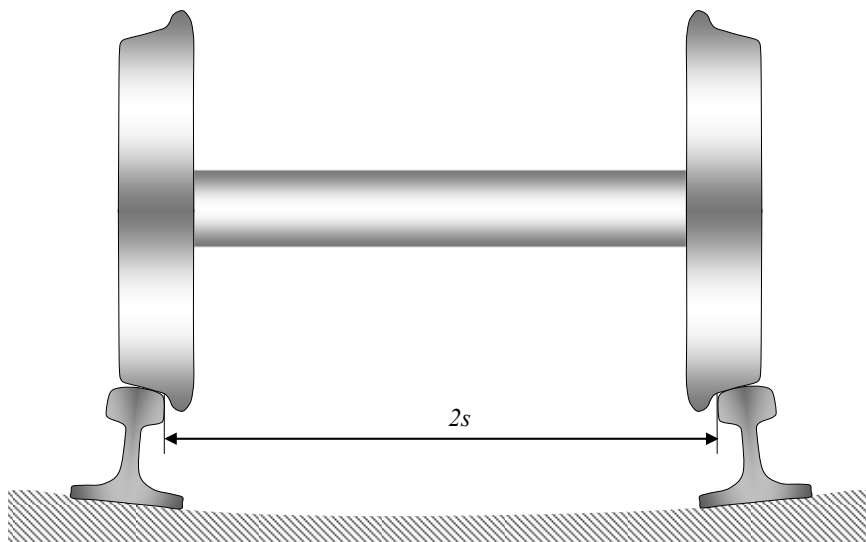


Figura 6-1: sala centrata su binario.

La Figura 6-1 mostra una sala montata in posizione centrata su un binario; una sala montata è costituita da due ruote calettate su uno stesso asse. Il binario è costituito da due rotaie a fungo

il cui profilo è adatto per assorbire momenti flettenti prodotti dal peso del convoglio. Le rotaie non sono montate su un piano orizzontale ma presentano un angolo di posa pari a $1/40$ o $1/20$. La distanza tra i bordi interni delle rotaie viene chiamata scartamento (indicato con $2s$ in figura) che sulla maggioranza delle reti europee è pari a 1435 mm. La sagoma del profilo delle rotaie a contatto con le ruote è normata.

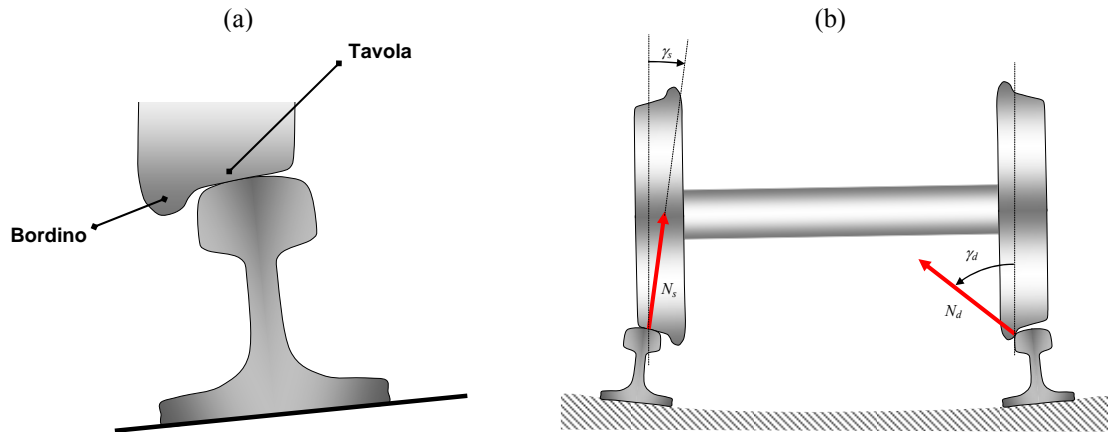


Figura 6-2: tavola e bordino (a); direzione delle normali al contatto per le due ruote in presenza di uno spostamento laterale della sala (b).

Anche il profilo delle ruote è normato e si può pensare diviso in due zone (Figura 6-2a): una prima zona, approssimativamente rettilinea, denominata *tavola* ed un'appendice ricavata nella parte più interna denominata *bordino*. La tavola presenta una conicità bassa e circa costante (attorno a $2.5-5^\circ$) mentre il bordino presenta una conicità massima di circa $60-70^\circ$.

Se la sala si sposta lateralmente, ad esempio durante l'inserimento o la percorrenza in curva, una delle ruote può arrivare a bordino; in genere uno spostamento laterale di poco superiore a 5 mm è sufficiente per spostare il contatto dalla tavola al bordino. La Figura 6-2b mostra come sono dirette le forze normali sulla ruota destra e sinistra in caso di sala spostata verso destra: sulla ruota di sinistra il contatto insiste sulla tavola di rotolamento e la componente normale N_s ha una proiezione sull'orizzontale trascurabile; sulla ruota di destra il contatto insiste invece sul bordino dove l'elevato valore di conicità genera una reazione normale fortemente inclinata verso il centro del binario. La presenza del bordino consente quindi di inclinare la direzione della forza normale al contatto in modo che questa abbia una proiezione significativa in direzione laterale. In questo modo la forza laterale richiesta per mantenere in curva una sala (e, di conseguenza, il veicolo di cui fa parte) può essere sviluppata anche attraverso una forza normale e non solo ricorrendo alla forza di attrito tra ruota e rotaia. L'impiego di ruote coniche consente anche di ottenere un effetto di auto-centraggio e di auto-sterzata della sala, come si vedrà nel seguito.

6.2 Pseudoslittamenti

Anche nel caso di ruote ferroviarie, analogamente a quanto visto per le ruote stradali, si osserva come la nascita di forze di contatto tangenziali (sia in direzione longitudinale che laterale) sia subordinata alla nascita di pseudoslittamenti nelle due direzioni.

Dall'esame della Figura 6-3 è possibile definire lo pseudoslittamento vettoriale come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{V} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})}{|\mathbf{V}|} = \varepsilon_x \mathbf{i} + \varepsilon_y \mathbf{j} \quad (6.1)$$

Ovvero come rapporto tra la velocità del punto di contatto P ed il modulo del vettore velocità del centro ruota. Come scritto nella (6.1), lo pseudoslittamento vettoriale presenta una componente longitudinale ed una laterale che sono definite come

$$\varepsilon_x = \frac{V_x - \Omega R}{V}; \quad \varepsilon_y = \frac{V_y}{V} \quad (6.2)$$

Le relazioni della (6.2) sono analoghe a quelle riportate nella (3.2); in campo ferroviario si impiega lo pseudoslittamento trasversale ε_y in luogo dell'angolo di deriva. È abbastanza facile notare che le due quantità contengono in pratica la stessa informazione e che, se la componente di velocità laterale è piccola rispetto al modulo della velocità, di fatto sono la stessa cosa:

$$\alpha = \arcsin \frac{V_y}{V} \cong \frac{V_y}{V} = \varepsilon_y \quad (6.3)$$

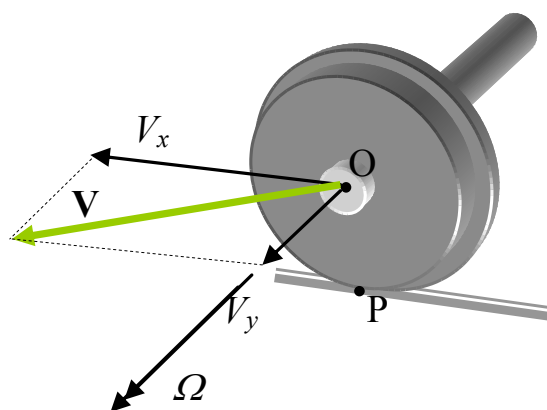


Figura 6-3: velocità del centro ruota e velocità angolare della ruota.

6.3 Forze di contatto tangenziali in funzione degli pseudoslittamenti

Sempre in analogia a quanto visto nel contatto pneumatico strada, la nascita di pseudoslittamenti è giustificabile considerando la deformabilità dei materiali a contatto; l'area di contatto, di forma ellittica, è caratterizzata da una parte frontale dove si ha aderenza tra ruota e rotaia ed una parte posteriore dove si ha invece slittamento (Figura 6-4). A causa della presenza dei microscorrimenti nell'area di contatto il numeratore della (6.1) è diverso da zero e nascono dunque pseudoslittamenti.

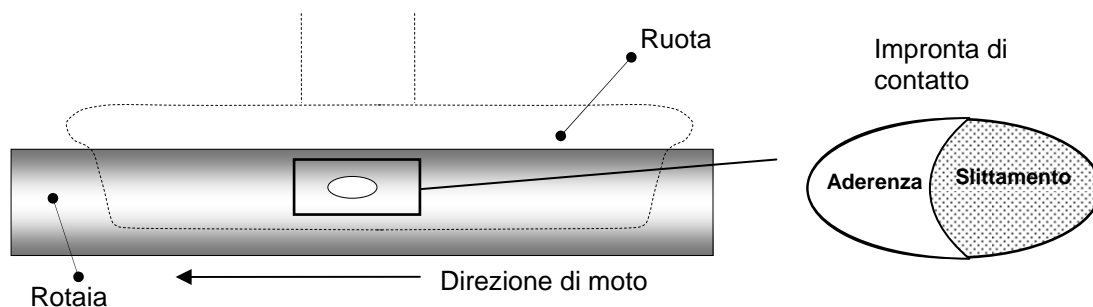


Figura 6-4: divisione dell'impronta di contatto in parte in aderenza e parte di slittamento.

Le forze di contatto tangenziali sono funzione degli pseudoslittamenti vettoriale e del carico normale e possono essere espresse come:

$$\begin{cases} T_x = -\mu_x(\varepsilon_x, \varepsilon_y, N) \cdot N \\ T_y = -\mu_y(\varepsilon_x, \varepsilon_y, N) \cdot N \end{cases} \quad (6.4)$$

La Figura 6-5a riporta l'andamento del coefficiente di aderenza generalizzato longitudinale in funzione dello pseudoslittamento longitudinale; le curve sono parametrizzate in funzione del valore di pseudoslittamento trasversale. Si osserva come, con pseudoslittamento laterale nullo, il massimo del coefficiente venga raggiunto per valori di pseudoslittamento longitudinale attorno al 5‰ (contro il 10% per il contatto pneumatico-strada); il valore del coefficiente di aderenza generalizzato per uno scorrimento del 100% è pari a 0.36 che rappresenta un valore abbastanza comune per il coefficiente di attrito radente tra ruota e rotaia asciutte.

Anche in questo caso la presenza di uno pseudoslittamento trasversale non nullo fa abbassare il valore di μ_x , dato che una parte della forza tangenziale sviluppabile dal vincolo viene sfruttata in direzione trasversale.

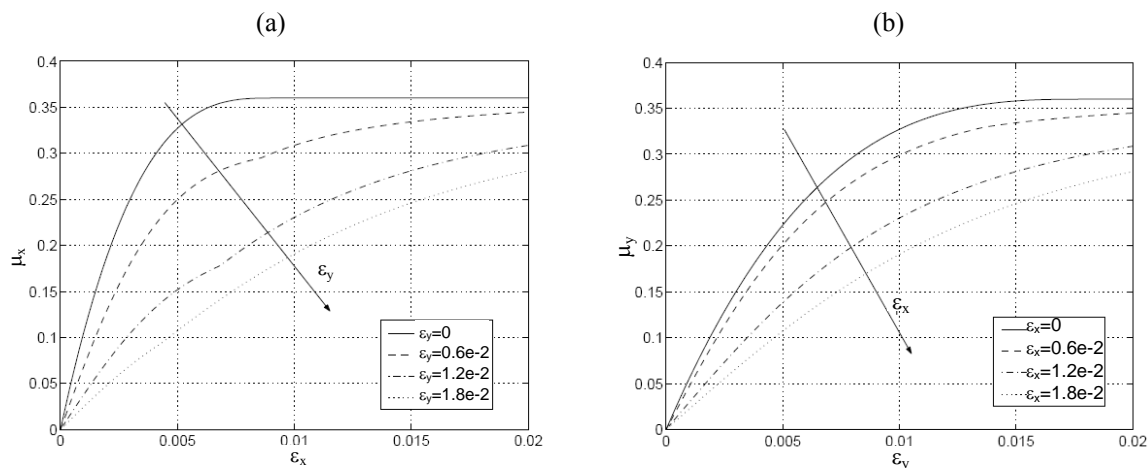


Figura 6-5: andamento di μ_x in funzione di ε_x parametrizzato in funzione di ε_y (a); andamento di μ_y in funzione di ε_y parametrizzato in funzione di ε_x (b).

Nella Figura 6-5b è invece rappresentato l'andamento del coefficiente di aderenza generalizzato trasversale μ_y , in funzione di ε_y ; anche in questo caso si riportano diverse curve in funzione del valore pseudoslittamento longitudinale ε_x e si possono trarre considerazioni analoghe a quelle viste per la Figura 6-5a.

6.3.1 Effetto di auto-sterzata

L'impiego di ruote coniche consente anche di ottenere un effetto di auto centraggio e di auto-sterzata per l'inserimento in curva. Uno spostamento laterale della sala rispetto al binario comporta la nascita di raggi di rotolamento differenziati per la ruota destra e sinistra; riferendosi alla Figura 6-6 si ha che per uno spostamento della sala verso destra genera $R_d > R_s$. Come conseguenza i due pseudoslittamenti longitudinali sulle due ruote della stessa sala risulteranno:

$$\varepsilon_{xd} = \frac{V - \Omega R_d}{V}; \quad \varepsilon_{xs} = \frac{V - \Omega R_s}{V}; \quad (6.5)$$

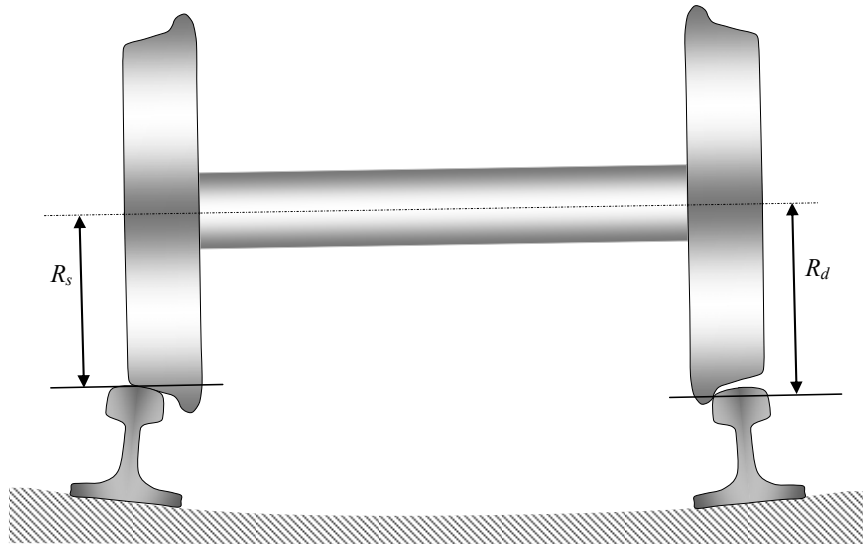


Figura 6-6: differenza nei raggi di rotolamento prodotta da uno spostamento laterale relativo sala-binario

Se si suppone che:

$$V \approx \Omega \left(\frac{R_s + R_d}{2} \right) = \Omega R_m ; \quad (6.6)$$

ossia che la velocità longitudinale dei centri ruota sia la stessa e pari al prodotto della velocità di rotazione per il raggio di rotolamento medio, si ottiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xd} &\approx \frac{\Omega R_m - \Omega R_d}{\Omega R_m} = \frac{R_m - R_d}{R_m} < 0 \\ \varepsilon_{xs} &\approx \frac{\Omega R_m - \Omega R_s}{\Omega R_m} = \frac{R_m - R_s}{R_m} > 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Sulle due ruote nascono quindi pseudoslittamenti di segno opposto; lo pseudoslittamento è positivo sulla ruota di sinistra e quello negativo su quella di destra.

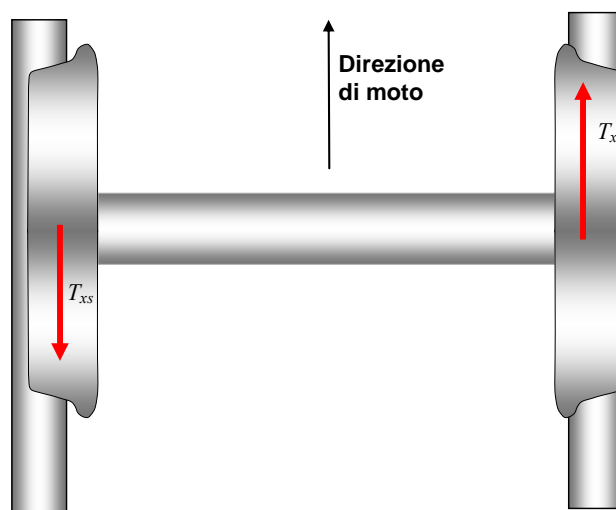


Figura 6-7: forze longitudinali prodotte sulle ruote destra e sinistra in conseguenza di uno spostamento relativo sala-binario verso destra

Dato che a pseudoslittamento negativo corrisponde una forza positiva (diretta nella direzione di moto) e viceversa, sulle due ruote si generano delle forze di segno opposto come mostrato in Figura 6-7. L'effetto è quello di produrre una coppia a serpeggio (rotazione attorno all'asse verticale) che tende a fare "sterzare" la sala direzionandola verso il centro del binario. Il valore della coppia a serpeggio risultate è il seguente:

$$C_s = (T_{xs} + T_{xd}) \cdot s \quad (6.8)$$

6.4 Calcolo delle forze di contatto (cenni)

Nel seguito viene riportata sinteticamente la descrizione della procedura di calcolo impiegata per stimare le forze di contatto tra ruota e rotaia. In generale si seguono tre passi successivi:

- Analisi geometrica del contatto
- Risoluzione del problema normale
- Risoluzione del problema tangenziale

6.4.1 Analisi geometrica del contatto

Il primo passo consiste nella caratterizzazione della geometria del contatto ruota rotaia. Uno spostamento laterale relativo tra sala e binario, come visto in precedenza, causa uno spostamento del contatto cui si associano cambiamenti del raggio di rotolamento e della direzione della normale al contatto.

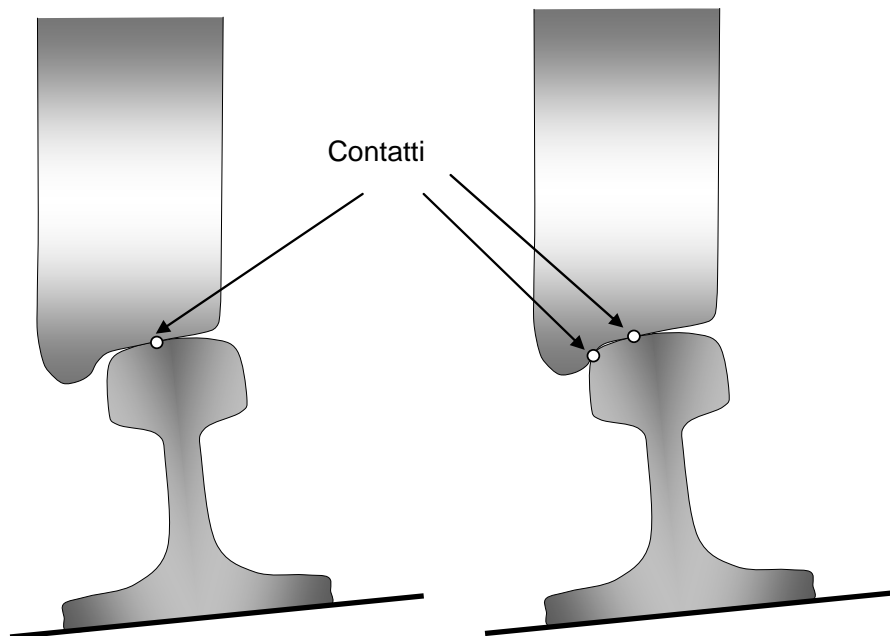


Figura 6-8: contatto multiplo generato durante il passaggio tra tavola e bordino.

In primo luogo l'analisi geometrica consiste nell'individuare la posizione del contatto (o dei contatti, nel caso di contatto multiplo) tra ruota e rotaia in funzione della posizione relativa tra sala e binario. Come mostrato in Figura 6-8 durante il passaggio del contatto tra tavola e bordino è possibile avere condizioni di contatto multiplo.

In secondo luogo per ogni zona di contatto si determina il valore del raggio di rotolamento locale, il valore della tangente dell'angolo di contatto locale ed i raggi di curvatura dei profili a contatto. Riferendosi alla Figura 6-9, R indica il raggio di rotolamento, γ l'angolo di contatto, mentre R_w e R_r sono rispettivamente i raggi di curvatura locali della ruota e della rotaia.

Il raggio di rotolamento viene impiegato per valutare lo scorrimento longitudinale e per calcolare, insieme ai raggi di curvatura locali delle superfici, la forma dell'area di contatto. La tangente al contatto è invece necessaria per conoscere le proiezioni delle forze normali e tangenziali sull'asse orizzontale e verticale.

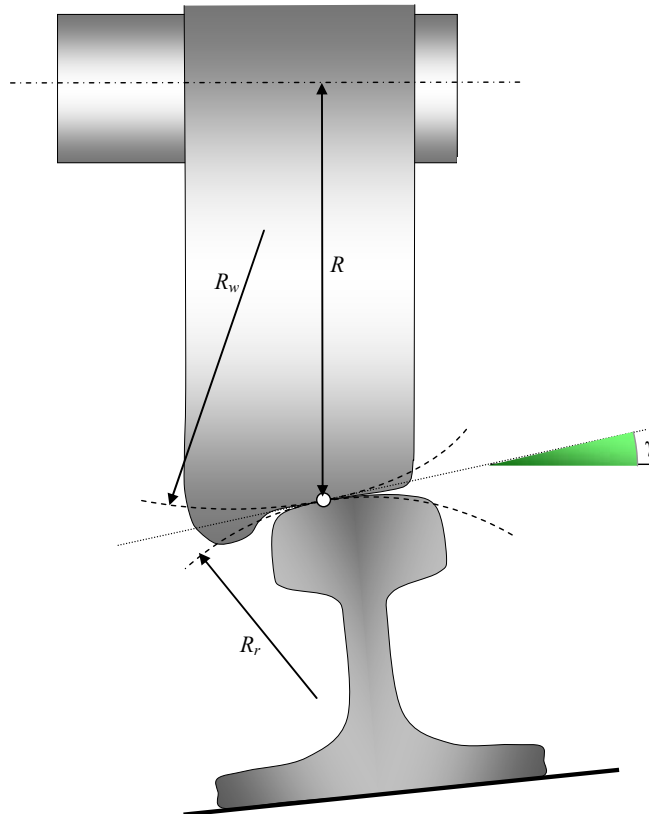


Figura 6-9: Raggio di rotolamento R , tangente al contatto γ e raggi di curvatura locali dei profili.

L'analisi geometrica risulta in genere piuttosto onerosa dal punto di vista computazionale, per questo viene effettuata prima della simulazione di marcia di un veicolo/convoglio; vengono generate delle tabelle di contatto nelle quali, per punti, si costruiscono le relazioni tra la posizione della sala e:

- La posizione e/o le posizioni dei contatti
- Il raggio di rotolamento in ogni contatto
- La tangente al contatto di ogni contatto
- I raggi di curvatura locali delle superfici a contatto

Durante la simulazione della dinamica di marcia, le tabelle vengono interpolate, consentendo così di ridurre i tempi di calcolo complessivi. A titolo d'esempio la Figura 6-10 mostra la differenza tra i raggi di rotolamento destro e sinistro in funzione dello spostamento relativo sala-binario.

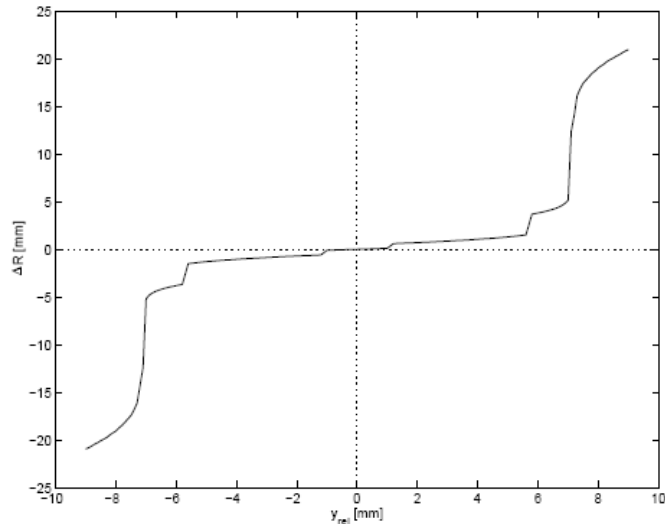


Figura 6-10: differenza tra i raggi di rotolamento in funzione dello spostamento relativo sala-binario (accoppiamento tra cerchione ORES1002 e rotaia UNI60 posata a 1:40)

6.4.2 Risoluzione del problema normale

Il problema normale (Figura 6-11) consiste nel determinare forma e dimensioni dell'impronta di contatto, nonché la distribuzione delle pressioni in direzione normale al contatto, essendo noto il valore del carico complessivo agente in direzione normale N , o, in alternativa, il valore dello schiacciamento elastico (spostamento relativo in direzione normale, applicato ai due corpi a contatto).

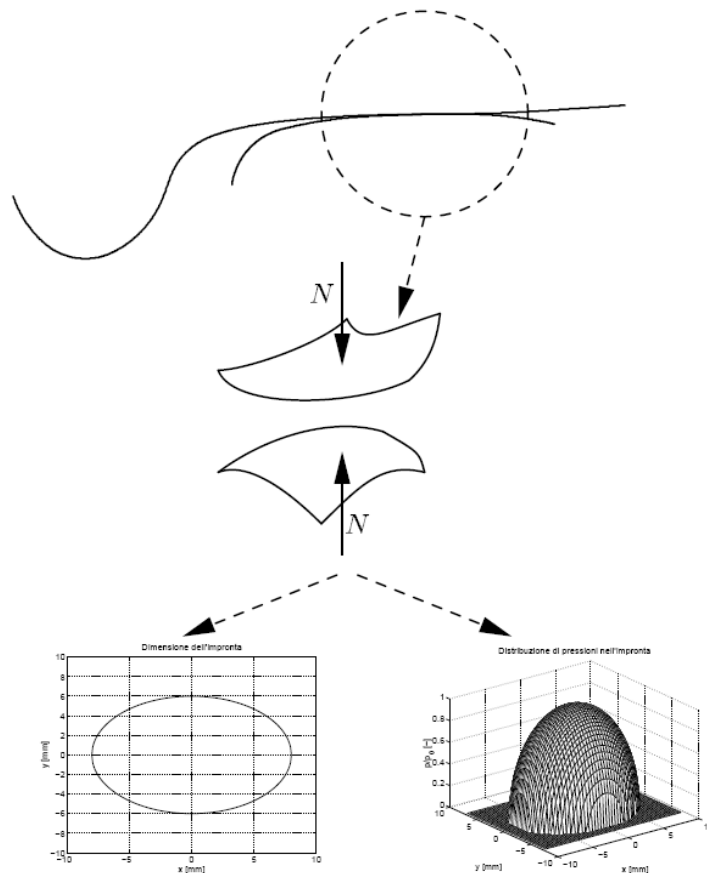


Figura 6-11: schema della risoluzione del problema normale.

Sotto opportune ipotesi, di norma verificate nel contatto ruota rotaia, questo problema è disaccoppiato da quello tangenziale, che consiste nella determinazione delle azioni tangenziali di contatto (longitudinale e laterale) essendo noti il carico normale e le componenti di pseudoslittamento. In altre parole la forma e dimensione dell'impronta è influenzata dalla geometria del contatto, dai carichi normali agenti ma non da quelli tangenziali.

L'approccio più diffuso per la soluzione del problema tangenziale si basa sulla teoria di Hertz che descrive il contatto tra corpi elastici non conformi. In questa teoria l'impronta di contatto è definita da un'ellisse le cui dimensioni e forma dipendono dai raggi di curvatura delle superfici a contatto nelle direzioni trasversale e longitudinale, quindi dai parametri R , R_w e R_r ⁶. Nel caso di contatto conforme, ossia se le superfici hanno lo stesso raggio di curvatura in una delle due direzioni la teoria di Hertz perde validità. Questa condizione si verifica in particolare nel caso di profili usurati per i quali i profili di ruota e rotaia, in seguito al consumo, tendono a ricalcarsi uno sull'altro.

Nei casi in cui non sia possibile risolvere il problema normale mediante la teoria di Hertz si può ricorrere a metodi approssimati non hertziani che richiedono un onere di calcolo ridotto e sono quindi utilizzabili nella simulazione della dinamica di marcia, oppure si può impiegare il metodo "esatto" per contatti non hertziani dovuto a Kalker. Questo metodo risulta tuttavia piuttosto oneroso in termini di tempi di calcolo e quindi in genere non viene impiegato in fase di simulazione della dinamica di marcia.

6.4.3 Risoluzione del problema tangenziale

Il problema tangenziale consiste nella determinazione degli sforzi tangenziali generati in ogni area di contatto in seguito alla presenza di pseudoslittamenti longitudinali e trasversali. Integrando la distribuzione di sforzi tangenziali è possibile calcolare le forze tangenziali sviluppate nei punti di contatto, ossia è possibile determinare:

$$\begin{cases} T_x = -\mu_x(\varepsilon_x, \varepsilon_y, N) \cdot N \\ T_y = -\mu_y(\varepsilon_x, \varepsilon_y, N) \cdot N \end{cases} \quad (6.9)$$

Il problema tangenziale può essere affrontato dopo avere risolto quello normale. Tra i metodi impiegati per la soluzione del problema tangenziale ci sono i seguenti:

- Teoria lineare di Kalker: per impronte di contatto ellittiche (ottenute tramite la teoria di Hertz) e per piccoli valori di pseudoslittamento che consentono di linearizzare il legame tra forze e pseudoslittamenti, è disponibile una soluzione analitica del problema tangenziale detta appunto teoria lineare di Kalker.
- Metodo *esatto* di Kalker: in analogia al problema normale, anche per il problema tangenziale esiste un metodo che fornisce la soluzione per valori generici di pseudoslittamento (ossia anche per valori dove non è linearizzabile il legame con la forza). Il metodo è basato su un complicato algoritmo iterativo e risulta molto oneroso dal punto di vista computazionale; pertanto non viene in genere implementato all'interno di un codice di simulazione di dinamica di marcia, ma viene impiegato come termine di confronto per valutare l'efficacia di algoritmi semplificati.
- Metodo FASTSIM: si tratta dell'applicazione del modello a spazzola (brush-model) ad una impronta ellittica. La rigidità della spazzola viene scelta in modo che per pseudoslittamenti tendenti a zero si riottienga la soluzione lineare esatta. Questo metodo trova una vasta applicazione nella simulazione della dinamica del veicolo

⁶ La rotaia ha raggio di curvatura ∞ in direzione longitudinale.

anche se in alcune condizioni evidenzia errori fino al 15÷20% rispetto al metodo *esatto*.

- Formule di Shen, Hedrick, Elkins: si tratta di formule semiempiriche, caratterizzate dalla proprietà di coincidere con la soluzione lineare esatta per pseudoslittamenti tendenti a zero. Il confronto con il metodo *esatto*, evidenzia errori non superiori al 5% ed, inoltre, il calcolo risulta estremamente rapido, anche rispetto a metodi semplificati come FASTSIM. Le formule, tuttavia, forniscono solo i valori di forza risultante e non la distribuzione delle azioni tangenziali al contatto.