1) Dimostrare che se $f \in C^0(\mathbb{R})$ è tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste, allora, perché $f \in L([0,+\infty))$ è necessario che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

---

2) Calcolare l'espansione di Hermite di

$$\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

---

3) Studiare $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{|t|^2}} \frac{1}{t^4}\, dt$

---

4) Studiare

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2+t^3}\, dt & \text{per } x \geq 0 \\ e^{\frac{1}{x}}(1-x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

1) Dimostrare che se f è integrabile per Darboux in $[0,1]$ allora f è integrabile in senso improprio in $[0,1)$ e che i due integrali coincidono

2) Dimostrare che $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x = 0,1 \\ 0 & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$

è integrabile per Darboux in $[0,1]$

3) Dimostrare che se $X \subseteq \mathbb{Z}$, $m_0 = \min X$ e per ogni $x \in X$ si ha $x+1 \in X$, allora $X = \{m_0, m_0+1, \ldots\ldots\} = [m_0, \infty) \cap \mathbb{Z}$.

4) Dimostrare che $o(x^n) + o(x^{n+1}) = o(x^n)$ per $x \to 0$

②

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)} & \text{per } x<0 \\ \displaystyle\int_1^x th\left(\frac{1}{t}\right)(t^2+1)\,dt & \text{per } x>0 \end{cases}$$

2) Calcolare il polinomio di McLaurin P_5 di

$$f(x) = e^x \sin(x)$$

$$f^{(4)} =$$

3) Studiare la funzione $f(x) = -\displaystyle\int_1^x sh\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t}\,dt$

4) Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x th\left(\frac{1}{t}\right)dt & \text{per } x>0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2+t^{-3}}\,dt & \text{per } x\le 0 \end{cases}$$

1) Dimostrare $o(o(x^n)) = o(x^n)$ in 0

2) Calcolare $\int_0^{10} f(x)\,dx$ e $\int_0^{10} f(x)\,dx$ per la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Q} \cap (-\infty, 1]) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

3) Dimostrare che se $f \in C^0(\mathbb{R})$, se f è derivabile $\forall x \notin X$, dove X è un insieme finito, e se $f'(x) < 0$ $\forall x \notin X$, allora f è strettamente decrescente

4) Dimostrare che $f(x) = \dfrac{[x]+1}{[x]^4 + [x] + 1}$ ha punti di massimo e minimo assoluto in $\mathbb{R}$.

1) Dimostrare che $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{-x^2}$

per $x \in \mathbb{R}$ ha un punto di massimo assoluto ed un punto di minimo assoluto.

2) Dimostrare che $f(x) = x^3 + x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biettiva e per g la funzione inversa stabilire se esiste un $p \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x^p} = 1$

3) Stabilire per quali $p \geq 0$ la funzione $\sin(x^p)$ è integrabile in $[0, +\infty)$

4) Dimostrare che $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ limitata, per Δ una decomposizione di $[0,1]$ e per Σ una somma di Riemann di f associata a Δ, ha

$$s(\Delta) \leq \Sigma \leq S(\Delta).$$

1) Dimostrare che dato una successione $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$, esiste una sottosuccessione che ha limite in $\overline{\mathbb{R}}$

2) Risolvere la disuguaglianza

$$\left| \sin\left(\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2+1} \right) \right) \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{in } \mathbb{C}$$

3) Stabilire se la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = (x^6 + 3x + 1)\, e^{-x^2}$ ha degli zeri in $\mathbb{R}$

4) Dato $X \subseteq \mathbb{Z}$ con $\sup X < +\infty$, dimostrare che $\exists \max X$.

1) Calcolare tutti i polinomi di McLaurin di

$$f(x) = \int_1^x e^t \left(t + t^2 sh(t) \right)$$

2) Verificare se esiste un polinomio $p(x)$ t.c. la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ p(x) & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \sin(x) & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ha derivata continua

3) Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x e^t \frac{dt}{1+t} & \text{se } x > 0 \\[2ex] \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)(t-1)} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

4) Studiare la funzione

$$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t^3}} (t+1)\, dt$$

1) Determinare punti di massimo e di minimo assoluto (5)
(e se esistono) di $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ x \sin x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

2) Stabilire per quali valori di $p > 0$ il seguente integrale è convergente

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} \, dx$$

3) Calcolare al variare di $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \lg^2\left(1 + \frac{1}{t^\alpha}(1 + \sin(t))\right) dt$$

4) Dimostrare che se $\{x_n\}$ è una successione in $\mathbb{R}_+$, allora essa ha una sottosuccessione con limite in $[0, +\infty]$

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \int_{\frac{1}{x}}^{x} \lg(1+t)\, e^{-t}\, dt & \text{per } x > 0 \\ \sqrt{1-x^2} & -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

2) Stabilire se è convergente l'integrale

$$\int_1^{x} \frac{\sin([t])}{[t]}\, dt$$

3) Verificare che $f(x) = x^3 + x^2 + x$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biettiva e, per $g(x)$ la funzione inversa, stabilire per quale $p \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x^p} = 1$$

4) Calcolare i polinomi di McLaurin di

$$\int_0^{x+1} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)(t + t^2)\, dt$$

1) Dimostrare che non esistono 6
costanti $A_1, A_2, \dots, A_n$ t.c.

$$\frac{1+x+\dots+x^n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)} = \frac{A_1}{x-1}+\dots+\frac{A_n}{x-n}$$

---

2) Dimostrare

$$o(x^n)+o(x^{n+1}) = o(x^n)$$

---

3) Stabilire se $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(x)\,\log\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$
è convergente

---

4) Dimostrare che se $X \subseteq \mathbb{N}$ è tale che
$\sup X < +\infty$, allora X ha un
massimo

1) Studiare la funzione

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}(x-1) & \text{per } x\geq 0 \\ \int_0^x \frac{1}{[t]}\,dt \end{cases}$$

In particolare, determinare l'asintoto a $+\infty$.

2) Studiare la funzione definita in $x>0$

$$f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{g(t)}\,dt$$ dove $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ è la funzione inversa di $t^3+t:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$

3) Studiare la funzione $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{t}}(t+1)\,dt$

4) Approssimare con un numero razionale e con errore $<\frac{1}{100}$ l'integrale

$$\int_0^1 ch(t^2)\,e^{t^2}\,dt$$

7

1) Dimostrare che $\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non esiste

2) Dimostrare che $\forall X \subseteq \mathbb{R}$ $X \neq \emptyset$, esiste una successione $\{x_n\}$ in X con $\lim_{n \to +\infty} x_n = \sup X$

3) Determinare una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ t.c. $\overline{\int_0^1} f(x)\, dx = 2$, e

$$\underline{\int_0^1} f(x)\, dx = -3$$

4) Dimostrare che la chiusura di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ e' tutto $\mathbb{R}$.

7

1) Studiare

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(1+t)^2(2+t)}\,dt & \text{per } x \geq 0 \\ 1 + x^2 - e^{-x} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

2) Calcolare polinomi di Mc Laurin di

$$f(x) = \int_0^{x+1} \lg(1+t)\, t\, dt$$

3) Studiare

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x e^{-[t]}\,dt & x \geq 0 \\ \displaystyle\int_x^{2x} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & x < 0 \end{cases}$$

4) Studiare

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\operatorname{th}(t)}{1+t}\,dt & \text{per } x > 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t+t^2-t^3}\,dt & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

1) Dimostrare che nessun punto $x \in \mathbb{R}$ e' un punto di accumulazione di $\mathbb{Z}$.

---

2) Date due funzioni limitate $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [0,1]$, dimostrare che

$$\overline{\int_0^1} f(x)\, dx \leq \overline{\int_0^1} g(x)\, dx$$

---

3) Dimostrare che $F(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

soddisfa $F'(0) = 0$.

---

4) Stabilire se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = [x]^3 \, e^{-[x]} \left(\mathrm{th}(2[x]) + 1\right)$$

ha punti di minimo e di massimo assoluto in $\mathbb{R}$.

1) Stabilire se è convergente l'integrale

$$\int_0^{\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \operatorname{th}(x) \, \frac{1}{1+x} \, dx$$

2) Studiare

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2+3t+6} & \text{per } x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 4} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

3) Studiare $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{t^3}} (t^2 + 1) \, dt$

4) Trovare i polinomi di McLaurin di

$$f(x) = \int_0^{x+1} (1+t) \sin(t^3) \, dt$$