

1) Dimostrare che se $f \in C^0(\mathbb{R})$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (1)
 ed $f(1) = -1$, allora f ha un punto
 di minimo assoluto in $\mathbb{R}$

2) Risolvere $\cos\left(\operatorname{Re}\left(\frac{z}{1+z}\right)\right) > 0$

3) Studiare $f(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2+1}{t}} \frac{1}{t^4} dt$

4) Studiare $f(x) = \begin{cases} \int_0^x e^{-2[t]} dt & \text{per } x \geq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} (x + x^3) & \text{per } x < 0 \end{cases}$

1) Studiare $f(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} e^{-t} \lg(1 + e^{\frac{1}{t}}) dt & \text{per } x > 0 \\ x^2 \lg(1-x) & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$

2) Calcolare $\int_0^1 f(t) dt$ e $\int_0^1 f(t) dt$

per $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{per } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

3) Dimostrare che $\int_0^x o(t^n) dt = o(x^{n+1})$ in 0

4) Dimostrare che ogni successione $\{x_n\}$ in $(-\infty, \infty]$ ha una sottosuccessione che ha limite

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+2)^2} & \text{per } x < 0 \\ \int_1^x \arctan\left(\frac{1}{t}\right) (1+t) dt & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

2) Calcolare il polinomio di McLaurin P_5 di $\sin x$

3) Studiare la funzione $f(x) = \int_1^x \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t} dt$ $x \geq 0$

4) Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{t}\right) dt & \text{per } x > 0 \\ \int_0^x \frac{1}{t^2 + t^{-3}} dt & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

1) Dimostrare $O(O(x^n)) = O(x^n)$ in $\mathbb{O}$

2) Calcolare $\int_0^{10} f(x) dx$ e $\int_0^{10} f(x) dx$ in
la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Q} \cap (-\infty, 1]) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

3)

4) Dimostrare che $f(x) = \frac{[x]^6 + 1}{[x]^4 + [x] + 1}$

ha punti di minimo
assoluto in $\mathbb{R}$.

1) Dimostrare che $f(x) = x \sin(\frac{1}{x}) e^{-x^2}$ ③

Per $x \in \mathbb{R}$ ha un punto di massimo assoluto ed un punto di minimo assoluto.

2) Dimostrare che $f(x) = x^3 + x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è biiettivo e per g la funzione inversa stabilire se esiste un $p \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^p} = 1$.

3) Stabilire per quali $p \geq 0$ la funzione $\sin(x^p)$ è integrabile in $[0, +\infty)$

4) Dimostrare che $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, per Δ una decomposizione di $[0, 1]$ e per Σ una somma di Riemann di f associata a Δ , ho

$$s(\Delta) \leq \Sigma \leq S(\Delta).$$

1) Dimostrare che dato una successione $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$,
esiste una sottosuccessione che ha limite
in $\overline{\mathbb{R}}$

2) Risolvere la disuguaglianza

$$\left| \sin \left(\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z^2 + 1} \right) \right) \right| < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{in } \mathbb{C}$$

3) Stabilire se la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = (x^6 + 3x + 1) e^{-x^2}$ ha degli zeri
in $\mathbb{R}$

4) Dato $X \subseteq \mathbb{Z}$ con $\sup X < +\infty$,
dimostrare che $\exists \max X$.

(4)

1) Calcolare tutti i polinomi di McLaurin di

$$f(x) = \int_1^x e^t (t + 2\operatorname{sh}(t))$$

2) Verificare l'esistenza di un polinomio $p(x)$ tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ p(x) & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \sin(x) & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ha derivata continua

3) Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x e^t \frac{dt}{1+t} & \text{per } x > 0 \\ \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)(t-1)} & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

4) Studiare la funzione

$$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t^3}} (t+1) dt$$

1) Determinare punti di massimo e di minimo assoluto (5)
(e se esistono) di $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ x \sin x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

2) Stabilire per quali valori di $p > 0$ il seguente integrale è convergente

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

3) Calcolare il valore di $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \log^2 \left(1 + \frac{1}{t^a} (1 + \sin t) \right) dt$$

4) Dimostrare che se $\{x_n\}$ è una successione in $\mathbb{R}_+$, allora essa ha una sottosuccessione con limite in $[0, +\infty]$

1) Studiare la funzione (5)

$$f(x) = \begin{cases} \int_{\frac{1}{x}}^x \lg(1+t) e^{-t} dt & \text{per } x > 0 \\ \sqrt{1-x^2} & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

2) Stabilire se è convergente l'integrale

$$\int_1^x \frac{\sin([t])}{[t]} dt$$

3) Verificare che $f(x) = x^3 + x^2 + 2x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è
 biettiva e, per $g(x)$ la funzione inversa,
 stabilire per quale $p \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^p} = 1$$

4) Calcolare i polinomi di McLaurin di

$$\int_0^{x+1} \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) (t + t^2) dt$$

1) Dimostrare che non esistono
costanti $A_1, A_2, \dots, A_n$ e

$$\frac{1+x+\dots+x^n}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \dots + \frac{A_n}{x-n}$$

2) ^{Dimostrare}
 $O(x^n) + O(x^{n+1}) = O(x^n)$

3) Stabilire se $\int_1^{+\infty} \cos(x) \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$
è convergente

4) Dimostrare che se $X \subseteq \mathbb{N}$ tale che
sup $X < +\infty$, allora X ha un
massimo

1) Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} (x-1) & \text{per } x > 0 \\ \int_0^x \frac{1}{[t]} dt & \end{cases}$$

In particolare, determinare l'asintoto a $+\infty$.

2) Studiare la funzione definita in $x > 0$

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{g(t)} dt \quad \text{dove } g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ è la}$$

funzione inversa di $t^3 + t: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

3) Studiare la funzione $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} (t+1) dt$

4) Approssimare con un numero razionale e con
errore $< \frac{1}{100}$ l'integrale

$$\int_0^1 \operatorname{ch}(t^2) e^{t^2} dt$$

1) Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ non esiste ⁽⁷⁾

2) Dimostrare che $\forall X \subseteq \mathbb{R} \quad X \neq \emptyset$, esiste una successione $\{x_n\}$ in X con
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sup X$

3) Determinare una funzione $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
t.c. $\int_0^1 f(x) dx = 2$, e

$$\int_0^1 f(x) dx = -3$$

4) Dimostrare che la chiusura di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ è tutto $\mathbb{R}$.

1) Studiare (7)

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{t}{(1+t)(2+t)} dt & \text{per } x \geq 0 \\ 1+x^2 - e^{-x} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

2) Calcolare polinomi di McLaurin di

$$f(x) = \int_0^{x+1} \lg(1+t) t dt$$

3) Studiare

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x e^{-[t]} dt & x \geq 0 \\ \int_x^{2x} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & x < 0 \end{cases}$$

4) Studiare

$$f(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{\ln(t)}{1+t} dt & \text{per } x > 0 \\ \int_0^x \frac{1}{1-t+t^2-t^3} dt & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

(8)

1) Dimostrare che nessun punto $x \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di $\mathbb{Z}$.

2) Date due funzioni limitate $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) \leq g(x) \forall x \in [0, 1]$, dimostrare che

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 g(x) dx$$

3) Dimostrare che $F(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ soddisfa $F'(0) = 0$.

4) Stabilire se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = [x]^3 e^{-[x]} (\tanh(2[x]) + 1)$$

ha punti di minimo e di massimo assoluto in $\mathbb{R}$.

1) Studiare se è convergente l'integrale (8)

$$\int_0^{\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \operatorname{th}(x) \frac{1}{1+x} dx$$

2) Studiare

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{t^2 + 3t + 6} & \text{per } x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + \cancel{x}} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

3) Studiare

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{t^3}} (t^2 + 1) dt$$

4) Trovare i polinomi di McLaurin di

$$f(x) = \int_0^{x+1} (1+t) \sin(t^3) dt$$