

1) Studiare

$$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} (1+t^2) dt$$

(1)

2) Studiare

$$f(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{\lg(1+t)}{t^2} dt & \text{per } x \geq 0 \\ \int_0^x e^{\lfloor 2t \rfloor} dt & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

3)

Dimostrare

che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } x \geq 1 \\ 0 & \text{per } x \leq 1 \end{cases}$$

non è primitivabile in $\mathbb{R}$

1) Dimostrare che $\mathbb{R}$ è l'insieme dei punti di accumulazione di $\mathbb{Q}$.

2) Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x=0 \\ x^2 & \text{per } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{per } x=1 \end{cases}$$

è convessa in $[0, 1]$

3) Calcolare i polinomi di McLaurin della funzione

$$f(x) = \int_1^x \sin\left(t^2 + \frac{\pi}{4}\right) dt.$$

1) Dimostrare $\int_0^x t + O(t^2) dt = O(x^4)$ in $\mathcal{O}$

2

2) Verificare che $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

definito da $f(x) = e^{-x^2} (x^4 + x^3 + x^2 + 1)$

ha punti di massimo e minimo assoluto in $\mathbb{Z}$.

3) Verificare che $f(x) = x^5 + x + 1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è
biettivo e, per $g(x)$ la funzione inversa,
stabilire per quale $p \in \mathbb{R}$ si ha
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^p} = 1$$

4) Studiare $f(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{t \ln(t)}{1+t} dt & \text{per } x > 0 \\ \int_0^x \frac{1}{1-t+t^2-t^3} dt & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$

1) Stabilire per quali valori di $p > 0$ il seguente integrale è convergente:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin(\lg x)}{x \lg^p(x)} dx$$

2) Calcolare l'integrale $\int_0^3 x^2 \lfloor x \rfloor \sin x dx$

3) Dimostrare che nessun punto $x \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione di $\mathbb{Z}$.

4) Dimostrare che $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ limitato, per Δ una decomposizione di $[0,1]$ e per Σ una somma di Riemann di f associata a Δ , ho

$$s(\Delta) \leq \Sigma \leq S(\Delta).$$

1) Dimostrare che se $f(x)$ ammette N derivate in $\odot$, allora $\textcircled{3}$
 il suo polinomio di Taylor in $\odot$ di ordine N è
 l'unico polinomio $P(x)$ di grado $\leq N$ t.c. $P^{(i)}(\odot) = f^{(i)}(\odot)$
 per tutti gli $i = 0, \dots, N$

2) Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ non esiste

3) Studiare la funzione $f(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{\log(2+[t])} dt & \text{per } x \geq 0 \\ \int_x^{2x} \frac{1}{t(1+t^2)} dt & \text{per } x < 0 \end{cases}$

4) Studiare per quali $p \in \mathbb{R}$ è convergente
 l'integrale $\int_0^{+\infty} \sin(x^p) dx$

① Studiare se è convergente l'integrale

$$\int_0^{\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \operatorname{th}(x) \frac{1}{1+x} dx$$

2) Studiare $f(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{t^2 + 3t + 6} dt & \text{per } x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + x} & \text{per } x < 0 \end{cases}$

3) Date $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata
e le decomposizioni $\Delta = [a, b]$ e
 $\Delta' = \{[a, c], [c, b]\}$, dove $c \in (a, b)$,
dimostrare $\underline{S(\Delta')} \leq S(\Delta)$

4) Calcolare $f^{(n)}(0) \quad \forall n$ dove

$$f(x) = e^{x^3}$$

1) Studiare $f(x) = \begin{cases} \int_0^x 3^{-[t]} dt & \text{per } x > 0 \\ \sqrt{x+1} - 1 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$ ④

2) Stabilire se è convergente l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1 + [x]} dx$$

3) Dimostrare che $\ln(x) - 1 = O(x^{-n})$ per ogni n per $x \rightarrow +\infty$

4) Dimostrare che $\frac{1}{\prod_{j=1}^n (x-j)}$, considerata

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^n (x-j)} = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{x-j}$$

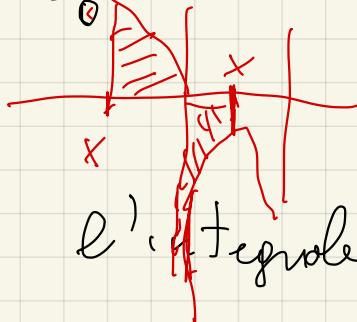
si ha

$$\sum_{j=1}^n A_j = 0$$

1) Dimostrare che la chiusura $\overline{Q \cap [0,1]}$ coincide con $[0,1]$

2) Stabilire se esiste uno scelto di coefficienti a_3, a_2, a_1, a_0 t.c. $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ sia una funzione $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iniettiva

3) Studiare la funzione $f(x) = \int_0^x e^{\frac{1}{t}} \lg(1-t) dt$



4) Stabilire se è convergente l' integrale

$$\int_1^{\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \operatorname{th}(x) \frac{1}{3+x}$$

(5)

1) Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se e solo

se si ha $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

2) Sia $f: [a, b]$ una funzione uguale a 0 eccetto che in un numero finito di punti di $[a, b]$.

Dimostrare che $\int_a^x f(t) dt = 0 \quad \forall t \in [a, b]$,

3) Stabilire se il seguente integrale è

summabile $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{[x]} \arctan x \, dx$

4) Studiare la funzione

$$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} (t^2 + t + 1)$$

1) Studiare $f(x) = \begin{cases} \int_0^x e^{\frac{1}{t}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt & \text{per } x \geq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x < 0 \end{cases}$

2) Studiare la $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = [x]^3 e^{-[x]} (\tanh(2[x]) + 1)$$

ha punti di minimo e di massimo assoluto in $\mathbb{R}$.

3) Dimostrare che $F(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

soddisfa $F'(0) = 0$.

4) Dimostrare che $[x]$ non è primitivabile in $\mathbb{R}$

(6)

1) Trovare massimi e minimi assoluti di
 $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$ in $[0, 2]$

2) Calcolare tutte le derivate $f^{(n)}(0) \forall n \geq 1$ e per
 $f(x) = x^2 \sin(x^3)$.

3) Dimostrare che se $f, g \in C^0([a, b])$ e se
 $f(x) \leq g(x) \forall x$ ed f e g sono funzioni
 distinte, allora $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$

4) Studiare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2} - 1 & \text{per } x \leq 0 \\ \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{1}{4^{\lfloor t \rfloor}} dt & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

1) Stabilire se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dato da

$$f(x) = [x]^3 e^{-[x]} (\tanh([x]) + 1)$$

ha punti di minimo e di massimo assoluti in $\mathbb{R}$.

2) Dimostrare che $\forall X \subseteq \mathbb{R} \quad X \neq \emptyset$, esiste una successione $\{x_n\}$ in X con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sup X$$

3) Approssimare con un numero razionale e con errore $< \frac{1}{100}$ l'integrale

$$2 \int_0^1 \sinh(t^2) e^{t^2} dt$$

4) Stabilire se $\int_1^{+\infty} \cos(x) \lg(1 + \frac{1}{x}) dx$ è convergente

1) Dimostrare che se $\{x_n\}$ è una successione in $[0, +\infty)$ esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che ha limite (7)

2) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non costante e periodica di periodo 1. Dimostrare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ non esiste

3) Stabilire se è convergente l'integrale

$$\int_1^x \frac{\cos([t])}{[t]} dt$$

4) Studiare $f(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{\ln(t)}{1+t} dt & \text{per } x > 0 \\ \int_0^x \frac{t^2}{1-t+t^2-t^3} dt & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$

1) Studiare la funzione $f(x) = \int_0^x e^{\frac{1}{t}} (t+1) dt$

2) Trovare i polinomi di McLaurin di

$$f(x) = \int_0^{x+1} (1+t) \sin(t^2) dt$$

3) Dimostrare che se $f \in L[0, +\infty)$ e se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, allora necessariamente $L = 0$

4) a) Stabilire se esiste un polinomio di grado pari $p(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0$

t.c. $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è suriettivo.

b) Stessa domanda con suriettivo sostituito da iniettivo.

⑧

4) Dimostrare che $\int_0^x o(t^n) dt = o(x^{n+1})$
in 0

4) Studiare la funzione

$$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{t}} \left(1 + \ln\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$$