

Nome e Cognome

Corso di studi Del Santo Fonda

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} x\right)}{\operatorname{arctg} x} = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x})^{x\sqrt{x}} - e^{x\sqrt{x}}}{(x\sqrt{x})^x - x^{x\sqrt{x}}} = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \log(x+1) - \frac{x}{x-1},$$

determinando

i) Dominio: .

ii) Limiti alla frontiera del dominio:

iii) Derivata prima $f'(x) =$

e suo segno.

iii) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda $f''(x) =$

vi) Grafico di f .

vii) Si dica se esiste ed eventualmente si determini una funzione g che su ciascuno degli intervalli del dominio della f sia una primitiva di f e sia $g(0) = g(2) = 1$. Si dica se tale g è unica.

Esercizio 3. (2+2+2 pt) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(1 - 2x).$$

i) Usando l'induzione su n si provi che, per $n \geq 1$, si ha

$$f^{(n)}(x) = -2^n(n-1)!(1-2x)^{-n}.$$

ii) Si scriva la formula di Taylor con il resto di Lagrange per $f(x)$ con punto iniziale 0 e $n = 4$.

iii) Si determini il valore di $\log \frac{1}{2}$ con un errore minore o uguale a 10^{-2} .

Esercizio 4. (2+3+3 pt) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si supponga $f(a) = f(b) = 0$ e, per ogni $x \in]a, b[$, sia $f(x) > 0$.

i) Si provi che $f'(a) \leq 0$ e $f'(b) \geq 0$.

Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili. Si supponga $f(a) = f(b) = 0$, per ogni $x \in]a, b[$ sia $f(x) > 0$ e per ogni $x \in]a, b[$ sia $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$.

ii) Si provi che esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $g(\xi) = 0$.

iii) Si provi che il numero reale ξ determinato al punto ii) è unico.