CdS Mat, CdS Fis, Esame di Analisi 1, 21/6/2019

Nome e Cognome ....

Corso di studi .... **Del Santo** □ **Fonda** □

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\frac{\operatorname{sen} x}{x})}{1-\cos x} = \boxed{}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^x - e^x}{x^{\sqrt{x}}} = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 + 4 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = x + \sqrt{x^2-1},$$

determinando

i) Dominio: $\boxed{}$.

ii) Segno: $\boxed{}$.

iii) Limiti alla frontiera del dominio:

iv) Asintoti:

v) Derivata prima $f'(x) =$ $\boxed{}$

e suo segno.

vi) Intervalli di crescenza e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

vii) Derivata seconda $f''(x) =$ $\boxed{}$

Intervalli di concavità e convessità. Eventuali punti di flesso.

viii) Grafico di f.

ix) (4 pt) Si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty}\int_2^x f(t)\,dt$$

(in alternativa a calcolare la primitiva di f eccetera, può essere utile cercare una opportuna funzione $g(t)$ tale che, sull'intervallo $[2,+\infty[$ sia $0 \leq g(t) \leq f(t)$ e ragionare sull'integrale della g).

Esercizio 3. (2+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Sia

$$\lim_n f(2n\pi) = 1, \qquad \lim_n f((2n+1)\pi) = -1.$$

i) Si provi che se f è continua allora l'insieme $\{z \in \mathbb{R} : f(z) = 0\}$ è infinito e superiormente illimitato.

ii) Si provi che se f è derivabile allora l'insieme $\{z \in \mathbb{R} : f'(z) = 0\}$ è infinito e superiormente illimitato.

iii) Si provi che se f è derivabile fino al secondo ordine allora l'insieme $\{z \in \mathbb{R} : f''(z) = 0\}$ è infinito e superiormente illimitato.

Esercizio 4. (4 pt) Sia

$$f(x) = \log(\frac{1+x}{1-x}).$$

Si scriva la formula di Taylor con polinomio di grado 3, punto iniziale $x_0 = 0$ e resto di Lagrange.