

Nome e Cognome .....

Corso di studi ..... Del Santo  Fonda

---

**Esercizio 1.** (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x - \sin x}}{\sqrt{x} \log(1 + \sin x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\operatorname{arctg}(x^2 + 1)}.$$

---

**Esercizio 2.** (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = |x - 1| e^{x^2 - x},$$

determinando

i) Dominio:

ii) Segno:

iii) Limiti alla frontiera del dominio:

iv) Insieme su cui la funzione è derivabile e derivata prima su tale insieme:

v) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

vi) Insieme su cui la funzione è derivabile fino al secondo ordine e derivata seconda su tale insieme:

vii) Intervalli di concavità e convessità. Eventuali punti di flesso.

viii) Grafico di  $f$

---

**Esercizio 3.** (4+4pt) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua.

i) Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0.$$

Provare che esiste  $M > 0$  tale che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$x - M \leq f(x) \leq x + M.$$

ii) Si trovi un esempio di funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

ma non vale la proprietà del punto i).

---

**Esercizio 4.** (6 pt)

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{x^2}^x \frac{\cos t^2}{e^x - 1} dt.$$