©2019 G.V.Margagliotti

email: giacomo.margagliotti@ts.infn.it

Tel: 040-5583376

Indice

Introduzione **7**

1 Tensioni e correnti continue **9**

1.1 Pile, celle fotovoltaiche, sistemi termoelettrici 9

1.1.1 La pila di Volta 9

1.1.2 La Pila Daniell 11

1.1.3 La Pila Leclanchè e le moderne pile a secco 13

1.1.4 Celle foto-voltaiche 16

1.1.5 Generatori termoelettrici 17

1.2 Tensioni e correnti 21

1.3 Strumenti di misura 30

1.3.1 I multimetri digitali 30

1.3.2 Gli strumenti analogici o ad equipaggio mobile 32

1.4 Resistenze elettriche e codice dei colori 41

1.5 Generatori reali 44

1.5.1 Generatori reali di tensione 44

1.5.2 Generatori reali di corrente 45

1.5.3 Potenza erogabile dai generatori 46

1.6 Esercitazione 1 _ Misura di forze elettromotrici e di resistenze interne di pile e accumulatori 48

1.7 Misure di resistenza elettrica 51

1.7.1 Metodo voltamperometrico 51

1.7.2 Metodo del "Ponte di Wheatstone" 52

1.7.3 Conseguenze delle regole di Kirkhhoof 54

1.8 Esercitazione 2 _ Verifica delle regole di Kirkhhoof 56

1.9 Esperienza 1 _ Misura della resistività e del coefficiente termico di un filo conduttore 62

1.10 Esperienza 2 _ Misura della curva caratteristica di una lampadina a incandescenza 68

1.11 Il diodo: generalità sui semiconduttori 74

1.11.1 La giunzione p-n 75

1.11.2 Il diodo a semiconduttore (a giunzione) 78

1.11.3 Il LED 83

1.11.4 Rivelatori di radiazioni ionizzanti 85
1.12 Esperienza 3 _ Misura della curva caratteristica di un diodo semiconduttore in funzione della temperatura 87
1.13 Celle fotovoltaiche 92
1.14 La costante di Faraday e i conduttori ionici 100
1.15 Esperienza 4 _ Resistenza di un conduttore ionico (soluzione salina), misura della costante di Faraday e stima delle dimensioni efficaci di uno ione solvatato 107

2 Tensioni e correnti variabili **113**
2.1 Introduzione 113
2.2 L'oscilloscopio 115
2.2.1 Funzionamento dell'oscilloscopio analogico 119
2.2.2 Funzionamento dell'oscilloscopio digitale 125
2.3 Alcuni esempi di tipologie di segnali 127
2.4 Il generatore di segnali 131
2.5 Il metodo simbolico 133
2.6 Estensione a circuiti in c.a. delle leggi valide in c.c. 136
2.6.1 Impedenze in serie e in parallelo 137
2.7 La potenza nei circuiti in corrente alternata 139
2.8 Elementi passivi reali di un circuito 141
2.8.1 Ponte di De-Sauty 144
2.9 Studio dei circuiti nei regimi di dominio del tempo e delle frequenze 146
2.9.1 Circuiti in condizioni transienti: soluzioni asintotiche . 146
2.10 Circuito RC in serie: comportamento nel dominio dei tempi . 147
2.11 Esperienza 5 _ Misura del tempo di carica/scarica di un condensatore 150
2.12 Esperienza 6 _ Studio di un oscillatore a rilassamento 155
2.13 Circuito LRC in serie: comportamento nel dominio dei tempi 158
2.14 Esperienza 7 _ Misure di transienti con un circuito RLC . . . 162
2.15 Circuiti in AC: dominio delle frequenze 165
2.15.1 Circuito RC in serie 165
2.15.2 Circuito RL in serie 169
2.15.3 Circuiti RC ed RL in parallelo 172
2.15.4 Circuito LRC in serie 173
2.15.5 Circuito LRC in parallelo 179
2.15.6 Energia di un oscillatore forzato e Q-valore 180
2.16 Esperienza 8 _ Misure nel dominio delle frequenze su circuiti RC, RL ed LRC 182

3 Il transistor **183**
3.1 Circuito amplificatore 183
3.2 Reazione 183

3.3 Circuito amplificatore reazionato . . . 183
3.4 Amplificatori operazionali . . . 183

4 Correnti elettriche e campi magnetici 185
4.1 La legge di Ampère . . . 185
4.2 Esperienza 9 _ Verifica della legge di Ampère secondo lo schema di Ørsted . . . 186
4.3 Esperienza 10 _ Misura del campo magnetico locale sfruttando la legge di Faraday-Lenz . . . 191
4.4 Esperienza 11 _ Misura del campo magnetico locale tramite un Tubo di Braun . . . 197
4.5 Effetto Hall e sonde Hall . . . 200
4.6 Fenomeni magnetici nella materia . . . 204
4.6.1 Trasformatori . . . 205
4.6.2 Ciclo di isteresi del nucleo di un trasformatore . . . 207
4.7 Circuito raddrizzatore/rettificatore . . . 208
4.8 Esperienza 12: Circuito raddrizzatore/rettificatore con ponte a diodi di Graetz . . . 213

5 Cavi e linee di trasmissione 223

6 Onde elettromagnetiche 225
6.1 Introduzione . . . 225
6.2 Il radar . . . 225
6.3 La radio . . . 225

7 Misura del rapporto e/m_e per l'elettrone 227
7.1 Misura di e/m_e con l'uso di un tubo a fascio filiforme . . . 227
7.2 Misura di e/m_e con l'uso di un tubo di Braun . . . 233

8 Esperimento di Millikan 237

A Unità di misura 247

B Convertitore Analogico-Digitale 249

C Schema amplificatore fotodiodo 253

D Elettrometri a campo ausiliario 255

E Diodo a valvola termoionica 257

F Capacità di un diodo semiconduttore: diodo vario-cap 261

G Misure di sfasamenti: figure di Lissajous 265

Capitolo 1

Tensioni e correnti continue

Lo studio dei fenomeni elettrici ha mostrato un vero salto di qualità quando hanno cominciato ad essere disponibili dispositivi in grado di fornire, con continuità, cariche elettriche in quantità opportuna e a potenziali noti. Questi dispositivi sono sostanzialmente i generatori di corrente continua. In questo paragrafo introduttivo ne sono brevemente illustrati tre tipi, che non esauriscono comunque le varietà disponibili: le pile, le celle fotovoltaiche (di cui si parlerà poi più estesamente a proposito dei diodi a semiconduttore), e i generatori ad effetto termoelettrico. Rimandiamo a paragrafi successivi, nella seconda parte delle dispense, per quanto concerne cenni ai generatori di corrente continua basati su circuiti raddrizzatori/rettificatori e stabilizzatori abbinati a sorgenti di corrente alternata.

1.1 Pile, celle fotovoltaiche, sistemi termoelettrici

1.1.1 La pila di Volta

Alessandro Volta (1745-1827) ideò la pila nel 1799 e la chiamò *apparato elettromotore*, da cui anche il nome di **forza elettromotrice** o **f.e.m.** per la differenza di potenziale elettrico sviluppabile dalla pila. L'unità di misura del potenziale elettrico è poi stata chiamata Volt (V), in onore di Volta. Egli ottenne i suoi risultati come conseguenza delle ricerche sugli effetti di contatto tra metalli diversi con l'interposizione di soluzioni ioniche, stimolato in ciò anche dalle precedenti ricerche di Galvani sull'elettricità animale.
Nella sua comunicazione del 20 marzo 1800 a Sir Joseph Banks della Royal Society, Volta scrisse: "*... Non è che l'insieme di un numero di buoni conduttori di differente specie, disposti in modo particolare, 30, 40, 60 pezzi, o più, di rame, o meglio d'argento, applicati ciascuno a un pezzo di stagno o, ciò che è molto meglio, di zinco, e un numero uguale di strati d'acqua, o di qualche altro umore che sia miglior conduttore dell'acqua semplice, come l'acqua salata, la liscivia, ecc., o dei pezzi di cartone, di pelle ecc., bene imbevuti di questi umori: di tali strati interposti a ogni coppia o combinazione*

di due metalli differenti, una tale serie alternata, e sempre nel medesimo ordine di questi tre pezzi conduttori, ecco tutto ciò che costituisce il mio nuovo strumento". Il principio di funzionamento[1] si basa su reazioni chi-

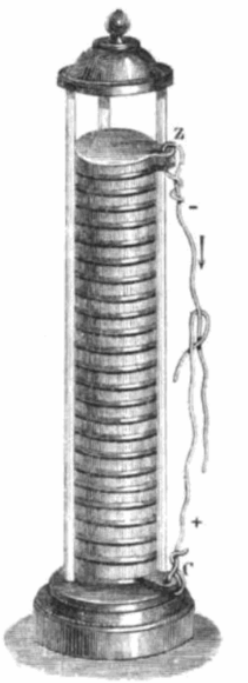


Figura 1.1: Pila a dischi

miche spontanee di ossidoriduzione, in cui l'energia chimica dei prodotti è minore di quella dei reagenti. La differenza di energia viene parzialmente convertita in energia "elettrica" disponibile. Volta provò diverse soluzioni, saline o acidule, e diversi metalli per gli elettrodi. La coppia Rame-Zinco $(Cu - Zn)$ risultò la più efficiente. In questo caso la reazione che sostiene la pila è: $Zn + 2H^+ \Rightarrow Zn^{++} + H_2$ che porta Zn in soluzione con concomitante produzione di Idrogeno molecolare gassoso. L'elettrodo di Zn costituisce quindi l'anodo[2] di ciascun elemento della pila, e perde massa man mano che la reazione procede, quando si utilizza la pila producendo una corrente elettrica.
Gli ioni H^+, in realtà H_3O^+, provengono o dall'acqua della soluzione elettro-

[1] Si veda ad esempio: F.Tommasini e A.Morgante, "Correnti radiazioni e Quanti", cap. 3, par. 3.1.

[2] L'anodo (denominazione introdotta da Faraday) in una pila è l'elettrodo presso il quale ha luogo l'ossidazione, in questo caso spontanea, che produce elettroni, per cui l'anodo è anche il polo negativo. In una cella elettrolitica, poichè l'ossidazione, forzata dall'esterno, sottrae elettroni, l'anodo è il polo positivo. Anche nei dispositivi elettronici l'anodo corrisponde al polo positivo.

litica di cui sono imbevuti gli strati assorbenti tra due coppie bi-metalliche adiacenti, quando si usa un sale, o dall'Idrogeno derivante dalla dissociazione dell'acido impiegato nella preparazione della soluzione diluita, generalmente acido solforico (H_2SO_4). Essi si dirigono verso l'elettrodo in Cu, da cui estraggono elettroni, e che costituisce quindi il catodo (positivo), dove ha luogo la reazione di riduzione; non è dunque fondamentale il materiale utilizzato per esso, purchè sia conduttore.
La formazione di idrogeno gassoso al catodo, conseguente all'estrazione di elettroni da questo da parte degli ioni H_3O^+, riveste e polarizza l'elettrodo costituendo un pesante fattore limitativo per l'impiego prolungato di questo tipo di pila, cui si aggiunge la rapida diminuzione della corrente dovuta all'inevitabile deperimento della soluzione elettrolitica.
La f.e.m. sviluppata da ogni elemento della pila di Volta è di circa 1.06 V.
In seguito Volta preferì utilizzare la pila nella configurazione a *corona di tazze* poichè faceva circolare un *maggior flusso elettrico* ed era di più comodo ed efficace utilizzo. Data la sua configurazione, permetteva infatti di sostituire con facilità ponti di elettrodi $Zn-Cu$ o di rabboccare la soluzione acida nelle singole tazze.

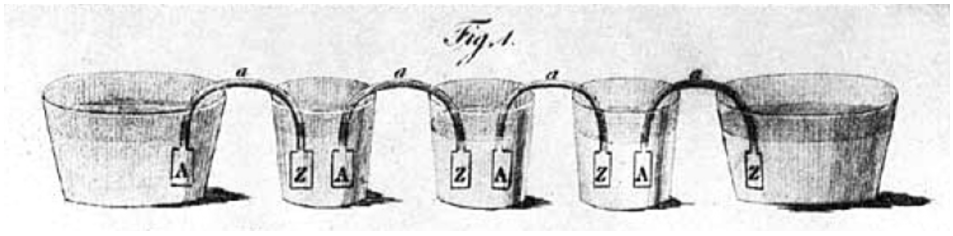


Figura 1.2: Disegno originale di A. Volta per la Pila a corona di tazze, dalla comunicazione inviata a Sir Joseph Banks

1.1.2 La Pila Daniell

Il chimico inglese Daniell realizzò la pila che porta il suo nome nel 1836. Si tratta di una pila a due liquidi, detti anche conduttori di seconda classe: una soluzione satura di $CuSO_4$ (di colore azzurro cielo) e una soluzione di $ZnSO_4$. Gli elettrodi sono uno in rame, immerso nella soluzione di $CuSO_4$, e uno in zinco immerso nella soluzione di $ZnSO_4$.
Nella pila ha luogo la reazione di ossidoriduzione spontanea $Zn + Cu^{++} \Rightarrow Zn^{++} + Cu$, e dall'entitaà dei potenziali chimici si deduce la forza elettromotrice risultante che eè di circa 1.1 V.
Contrariamente a quanto avviene nella pila di Volta, in questo caso l'elettrodo di rame partecipa attivamente alla reazione. Mentre infatti l'elettrodo di zinco si consuma, come nella pila di Volta, nella pila Daniell la massa del catodo in rame cresce, poicheè gli ioni Cu^{++} si riducono a rame metallico,

aderendo alla superficie dell'elettrodo.
Per conservare nel tempo il livello di saturazione della soluzione di $CuSO_4$ questa viene solitamente portata a soprasaturazione.
La pila Daniell è un dispositivo elettrochimico in cui non si ha polarizzazione del catodo ed è quindi molto piuÃÄ efficiente della pila di Volta, sia in termini di durata che per la costanza della corrente elettrica continua erogata.

Essa può essere realizzata in diverse configurazioni:

Per gravità _ Si sfrutta la proprietà della soluzione soprasatura di $CuSO_4$ di essere più densa della soluzione di $ZnSO_4$. Si collocano sul fondo di un recipiente cilindrico di vetro, un elettrodo di rame a forma di pettine e dei cristalli di $CuSO_4$, quindi si versa la soluzione satura di $CuSO_4$. Si versa poi delicatamente la soluzione di $ZnSO_4$ che data la minor densità, galleggia sopra quella di $CuSO_4$. Si immerge quindi in essa l'elettrodo di zinco (simile per forma a quello di rame e in grado di agganciarsi alle pareti del contenitore), e la pila è pronta per funzionare.

A ponte salino _ La semi-cella del rame e quella dello zinco sono fisicamente separate e contenute in due diversi recipienti di vetro. Il collegamento tra i due sistemi elettrochimici è realizzato tramite un ponte salino, costituito ad esempio da un tubo di vetro ad U contenente ovatta imbevuta di soluzione acquosa di KNO_3, o $NaSO_4$.

A setto poroso _ è forse il modello più comune di pila Daniell. Nella

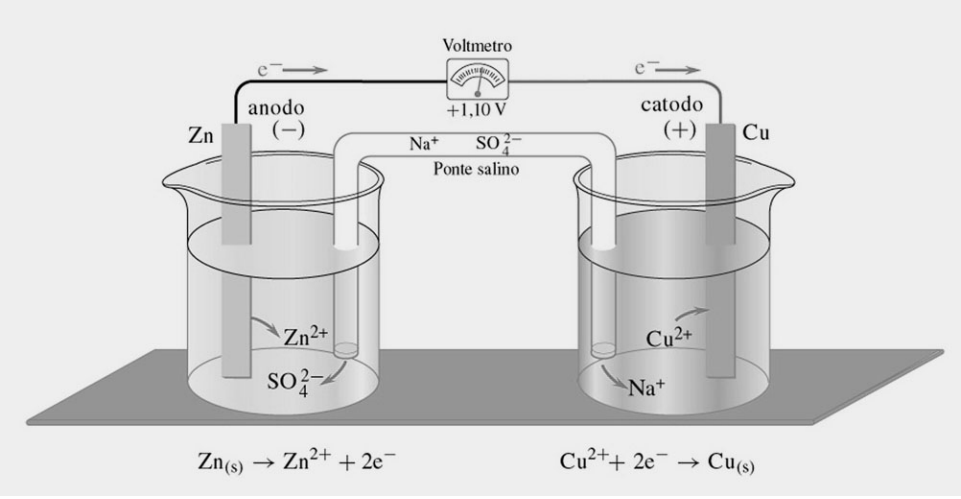


Figura 1.3: Pila Daniell a ponte salino

sua geometria più semplice ed essenziale la realizzazione prevede l'impiego

di un vaso di vetro al cui interno si inserisce un setto poroso di forma cilindrica. All'interno del setto si pongono l'elettrodo in rame, anch'esso di forma cilindrica, alcuni cristalli di $CuSO_4$ e si versa quindi la soluzione satura di $CuSO_4$. All'esterno del setto, immerso nella soluzione di $ZnSO_4$, si colloca l'elettrodo di zinco, a forma di camicia cilindrica.

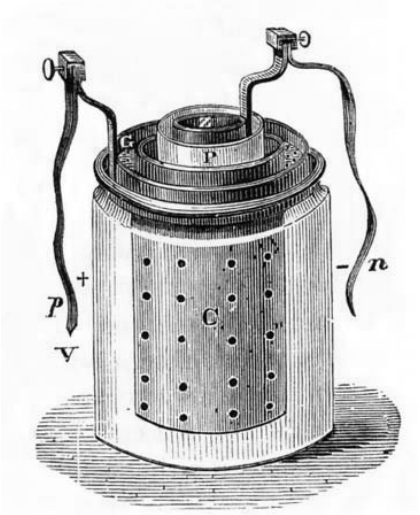


Figura 1.4: Pila Daniell a setto poroso

1.1.3 La Pila Leclanchè e le moderne pile a secco

I sistemi sinora descritti hanno svolto un ruolo importantissimo ma erano difficilmente portatili e nel contempo molto sensibili alla posizione d'uso. Il problema fù superato con l'introduzione delle "pile a secco". Il primo esempio fù realizzato da Leclanchè nel 1866. è detta "pila a secco" in quanto gli elettroliti non sono contenuti allo stato liquido, ma gelificati (ad es. con amido) o assorbiti su materiale inerte. La pila a secco fornisce una f.e.m. di circa 1.48 Volt ed è costituita da una sbarretta centrale di grafite, che funge da polo positivo, circondata da una pasta di MnO_2, insolubile, immersa nell'elettrolito, a sua volta costituito da una soluzione acquosa gelificata di NH_4Cl (cloruro d'ammonio) al 10% circa. Il tutto è contenuto in un cilindretto di Zn, che funge da polo negativo. Le reazioni che si sviluppano presso gli elettrodi sono:

polo negativo: $Zn \Rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$; polo positivo: $Mn^{4+} + 2e^{2+} \Rightarrow Mn^{2+}$

Al polo negativo lo zinco si ossida e passa in soluzione come Zn^{2+} (il contenitore di zinco si consuma); al polo positivo gli elettroni vengono catturati dal biossido di manganese che da Mn^{4+}, si riduce a Mn^{2+}; il conduttore

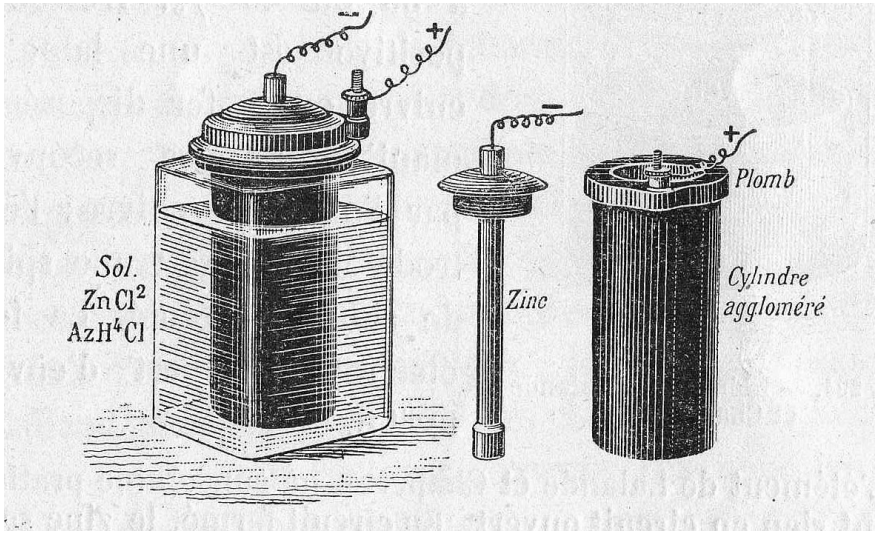


Figura 1.5: Pila Leclanchè

di grafite non subisce trasformazioni chimiche. Gli ioni Zn^{2+} prodotti dall'ossidazione di Zn reagiscono con l'ammoniaca prodotta dagli ioni NH^{4+} presenti nell'elettrolito; questa reazione mantiene bassa la concentrazione di Zn^{2+} e permette di stabilizzare il valore della f.e.m.
La reazione che ha luogo al polo negativo è dunque:

$$Zn^{2+}(aq) + 4NH^{4+}(aq) + 4OH^{-}(aq) \Rightarrow [Zn(NH_3)_4]^{2+}(aq) + 4H_2O(l)$$

Durante il funzionamento si forma lo ione complesso $[Zn(NH_3)_4]^{2+}$, il cui cloruro col tempo cristallizza, diminuendo la conducibilità dell'elettrolito. Riscaldando moderatamente una pila Leclanchè esaurita, il sale diffonde lontano dall'anodo e la pila riacquista in parte la propria funzionalità.
Il processo di ossidazione che ha luogo al catodo fornisce gli ioni OH^{-}, e semplificando, può essere riassunto come:

$$MnO_2(s) + H_2O(l) + e^{-} \Rightarrow MnO(OH)(s) + OH^{-}(aq)$$

Nella versione moderna della pila zinco-carbone, l'elettrodo positivo (catodo) è formato da una miscela di ossido di manganese e polvere di carbone che ricopre una barretta di grafite. Questa, come detto, costituisce il catodo. L'elettrolito acquoso, contenente cloruro di ammonio e cloruro di zinco, viene quindi gelificato, così da ottenere una pila a secco. Il tutto è contenuto in una capsula di zinco che costituisce l'anodo della pila.
Le pile zinco-carbone sono soggette al fenomeno di auto-scarica più delle altre pile.
L'auto-scarica si manifesta a circuito aperto e può essere dovuta a difetti in prossimità del contatto fra elettrodi ed elettrolito (corrosione), alla presenza di impurezze negli elettrodi o nell'elettrolito, ma anche al non perfetto

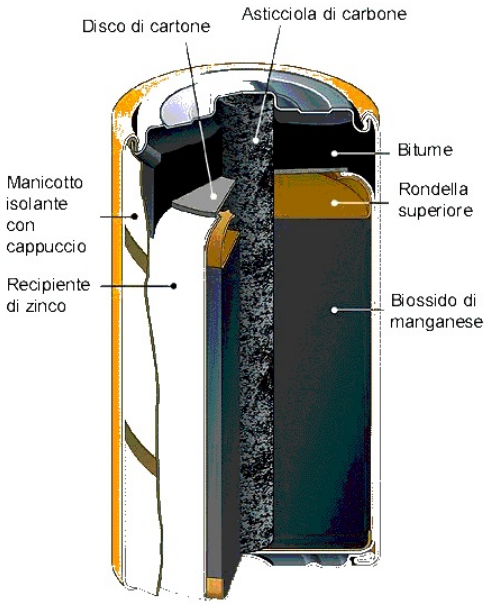


Figura 1.6: Una moderna pila a secco

isolamento fra elettrodi di polarità opposta. Vediamo ora rapidamente una parziale carrellata di altri tipi di pile a secco oggi in uso:

a) Pila zinco-cloruro: si basa sulla stessa tecnologia della pila zinco-carbone, ma utilizza come elettrolito una soluzione acquosa di cloruro di zinco, meno aggressivo del cloruro d'ammonio nei confronti dello zinco.

b) Pile alcaline: sviluppate negli anni "60 dalla Mallory (ora Duracell), anche le pile alcaline utilizzano zinco e biossido di manganese, come le pile zinco-carbone, ma i due elettrodi hanno struttura porosa e l'elettrolito è un composto alcalino (idrossido di potassio). Queste modifiche hanno consentito di triplicare la durata di scarica rispetto alle pile zinco-carbone. Sino al 1994 queste pile contenevano una certa quantità di mercurio, per ottimizzare la conservazione dello stato di carica; il mercurio è stato ora totalmente eliminato per esigenze di rispetto ecologico.

c) Pila zinco-aria: sviluppata nei primi anni del '900 da C. Fery, la pila zinco-aria utilizza l'ossigeno dell'aria in prossimità del catodo di carbone poroso immerso in un elettrolito alcalino. La lenta diffusione dell'ossigeno limita la potenza di queste pile (sono adatte ad applicazioni con assorbimenti di corrente inferiori a $5-10$ mA). La pila è contenuta in una capsula di

metallo che forma il terminale positivo, mentre l'anodo occupa la maggior parte del volume disponibile. Nella capsula sono presenti uno o più fori per consentire all'aria di penetrare all'interno a contatto del catodo. Queste pile sono utilizzate negli impianti di telecomunicazioni non collegati alla rete elettrica e in strutture molto piccole (pile a bottone), come le protesi auditive.

d) Pile al litio: il basso peso specifico e l'alto potenziale elettrico del litio lo rendono molto interessante per la costruzione di pile di elevata capacità specifica (3,86 Ah/g, 7,23 Ah/cm^3)[3]. Altri vantaggi sono: tensione fra i terminali più che doppia di quella delle pile alcaline e una minore sensibilità alla temperatura.

1.1.4 Celle foto-voltaiche

Una descrizione più completa e approfondita dei principi fisici alla base del funzionamento di un dispositivo a cella foto-voltaica sarà ripresa, nel presente corso, in concomitanza ai paragrafi dedicati al diodo a semiconduttore (paragrafi 1.7−1.7.5). In prima istanza si presenterà ora l'argomento in modo puramente descrittivo, accennando solamente ad alcuni concetti fondamentali e abbastanza intuitivi.
La cella foto-voltaica è un dispositivo che converte direttamente parte dell'energia luminosa che la investe in energia elettrica, generando una tensione ai propri capi ed essendo in grado di erogare corrente: produce cioè una f.e.m. Questo processo richiede l'utilizzo di materiali che assorbendo radiazione luminosa, eccitino elettroni dalla propria banda di valenza alla banda di conduzione con efficienza tale da permettere ai portatori di carica, una volta chiuso il circuito su un carico resistivo esterno, di percorrerlo, sospinti dalla tensione foto-voltaica, e dopo aver dissipato in esso la propria energia ritornare nella cella e quindi iterare il processo, finchè il circuito permane chiuso e opportunamente irradiato. La conversione foto-voltaica può essere ottenuta utilizzando svariati materiali, ma nella pratica si usano prevalentemente semiconduttori sotto forma di giunzioni p-n, ovvero diodi. L'energia luminosa che non contribuisce al processo di produzione di corrente elettrica deve essere dissipata termicamente. Un parametro caratteristico molto importante di una cella foto-voltaica è l'efficienza di conversione, definita come il rapporto tra la potenza elettrica estratta dalla cella, e quella luminosa incidente.

[3] Ah è il simbolo dell'Amperora, e rappresenta una quantità di carica. 1 Ah = (carica elettrica che attraversa le estremità di una batteria che fornisce 1 Ampere di corrente per 1 ora).

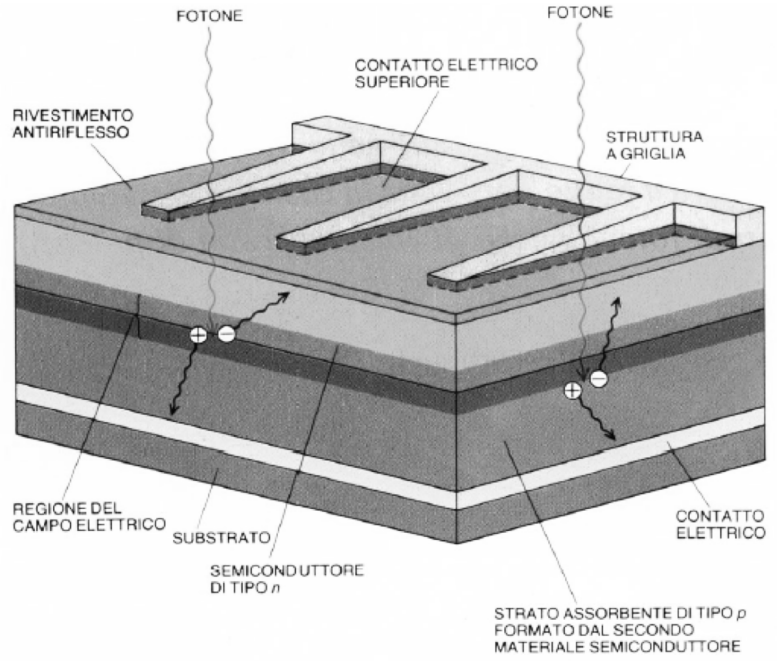


Figura 1.7: Schema di cella fotovoltaica; il substrato inferiore è in vetro o plastica e la griglia superiore costituisce il secondo contatto elettrico

1.1.5 Generatori termoelettrici

Un generatore termoelettrico si basa sulla conversione diretta di calore in energia elettrica. Sulla stessa base fenomenologica si fondano sia la trasformazione irreversibile di elettricità in calore descritta da Joule che i tre diversi effetti reversibili noti, dai nomi dei loro scopritori, come Seebeck, Peltier e Thomson. Per quanto concerne Joule egli scoprì che in un conduttore percorso da una corrente elettrica I si produce calore in modo proporzionale al prodotto I^2R, dove R è la resistenza elettrica del conduttore. Analizzeremo meglio e più completamente questo fenomeno e certe sue conseguenze nel seguito.

Nel 1823 il fisico tedesco T.J. Seebeck scoprì che se si realizza un circuito chiuso connettendo due spezzoni di conduttori metallici diversi e si pongono le due zone di giunzione a differenti valori di temperatura, si instaura una f.e.m. la cui intensità dipende dalla differenza di temperatura fra le due zone di giunzione, oltre che dai tipi di conduttore metallico coinvolti. Questo circuito è detto termocoppia (figura 1.8). Più precisamente si ha che instaurando un gradiente termico $\vec{\nabla}T$ in una sostanza solida, si determina l'insorgenza in essa di un campo elettrico $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, orientato con verso opposto a $\vec{\nabla}T$ (effetto Seebeck). Il rapporto $|\vec{\nabla}V|/|\vec{\nabla}T| = S$ è detto coefficiente di Seebeck ed è espresso in V/K o più spesso, in μV/K. I metalli

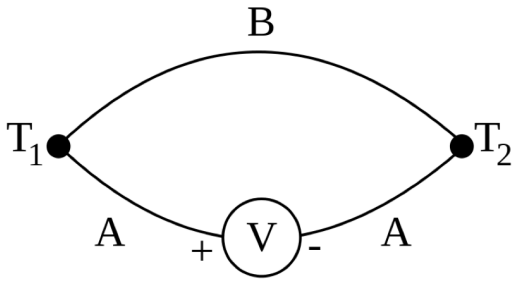


Figura 1.8: Schema di termocoppia con due diversi metalli A e B, chiusa su un voltmetro ($T_1 > T_2$)

più adatti ad applicazioni termoelettriche sono quelli a più alto valore del coefficiente di Seebeck (dell'ordine di 10 μV/K), ma le termocoppie con essi realizzabili hanno efficienze dell'ordine di 1%, e sono quindi antieconomiche come sorgenti di potenza elettrica, ma adatte ad esempio per essere usate come sensori termici. La d.d.p. sviluppata con due giunzioni Cu-Fe a 100 C l'una rispetto all'altra è di 0.86 mV. Un rinnovato interesse per la produzione di potenza elettrica grazie alla termoelettricità si è sviluppato in seguito alla realizzazione di materiali semiconduttori con alti valori di coefficiente di Seebeck (dell'ordine di alcune centinaia di μV/K). Le proprietà elettriche dei materiali semiconduttori dipendono però fortemente dalla temperatura operativa; un semiconduttore funziona dunque come un buon materiale termoelettrico soltanto in opportuni intervalli di temperatura, specifici per ogni tipo di semiconduttore. I generatori termoelettrici hanno sinora trovato le loro più importanti applicazioni nel campo dell'esplorazione spaziale. L'utilizzo di sorgenti radioattive fornisce la sorgente di calore necessaria al funzionamento di generatori termoelettrici per lunghi periodi; ciò garantisce adeguate potenze elettriche anche per quei satelliti, come ad esempio i Voyager o Cassini, che nei loro viaggi interplanetari si allontanano molto dal Sole rendendo poco efficiente l'utilizzo di celle foto-voltaiche.

I generatori sono quindi strutture in grado di fornire tensioni e correnti elettriche in funzione del tempo:

$$V = V(t),\ I = I(t)$$

e vedremo nel successivo paragrafo 1.5 come si caratterizzano generatori reali di tensioni e correnti, in funzione delle loro caratteristiche intrinseche e del trasferimento di potenza attuabile verso circuiti esterni.

Per i possibili regimi di funzionamento dei circuiti elettrici si distinguono

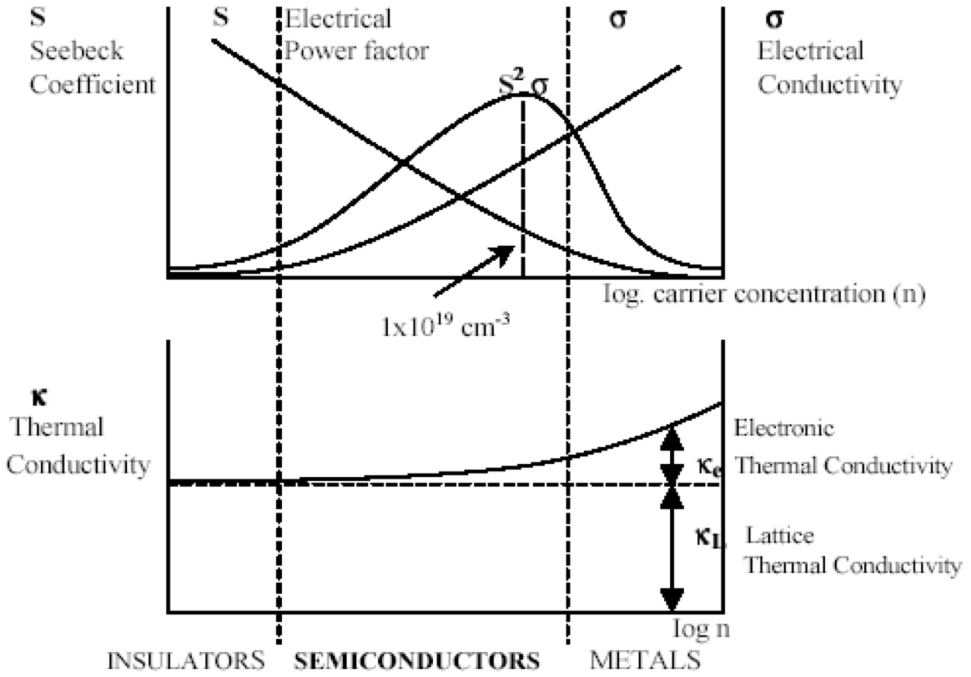


Figura 1.9: Proprietà termoelettriche di metalli, semiconduttori e isolanti

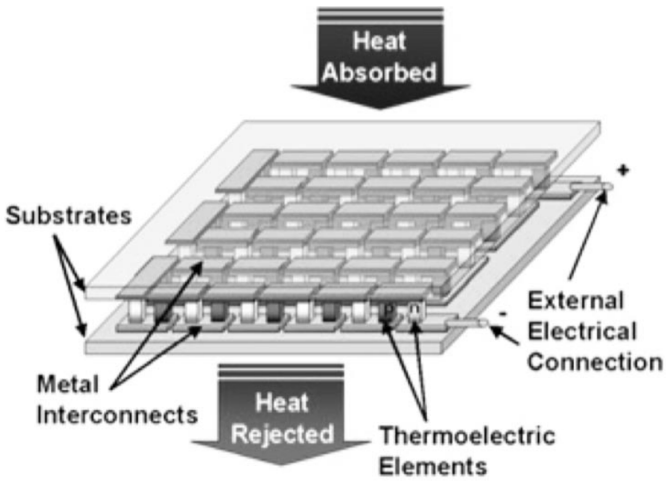


Figura 1.10: Tipico elemento di un generatore termoelettrico

solitamente due condizioni:

1) **fenomeni stazionari**, per i quali $V(t) = cost.$ e $I(t) = cost.$, assumendo idealmente $-\infty < t < +\infty$;

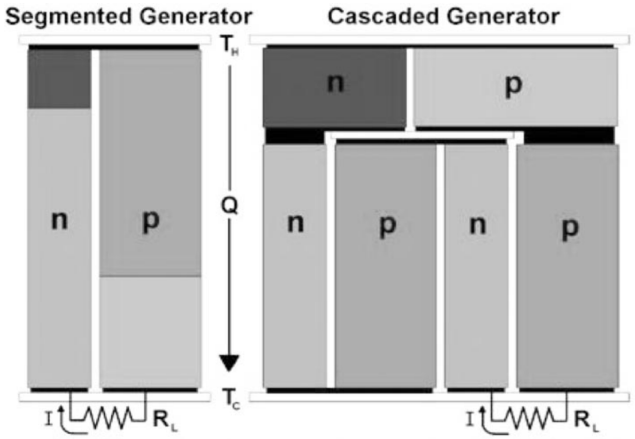


Figura 1.11: Esempi di struttura di un elemento termoelettrico unitario, basato su materiali semiconduttori

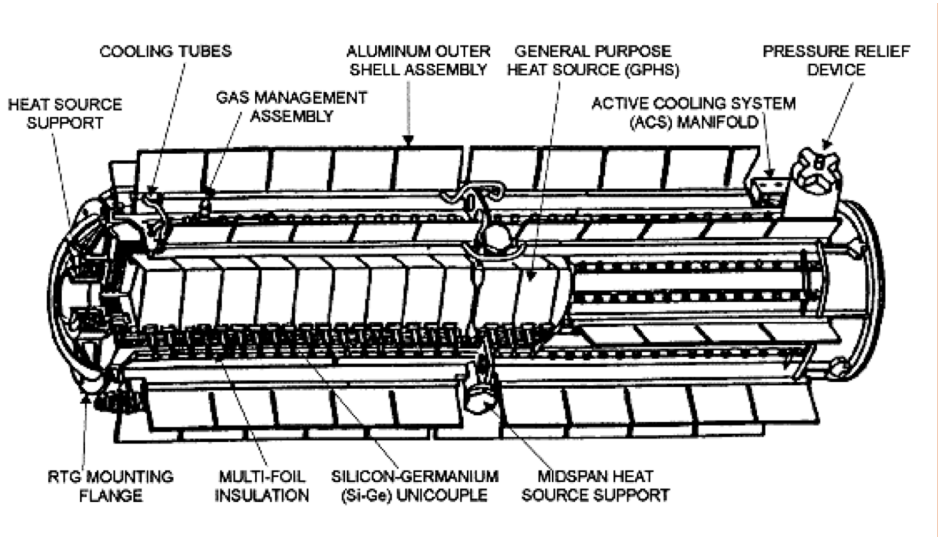


Figura 1.12: Esempio di generatore termoelettrico a radioisotopi GPHS-RTG (NASA)

2) **fenomeni dipendenti dal tempo**, a loro volta suddivisi in:
- fenomeni periodici;
- fenomeni aperiodici che possono essere sia **transienti** che **impulsivi**.

Studieremo i fenomeni stazionari durante i prossimi paragrafi, per dedicarci ai fenomeni periodici e transienti nella seconda metà del corso. Faremo solo qualche breve accenno ai fenomeni impulsivi, di cui sentirete molte cose interessanti in corsi futuri.

1.2 Tensioni e correnti

Prima di passare allo studio del funzionamento dei principali strumenti per la misura dei valori assunti da grandezze elettriche, richiamiamo brevemente alcune nozioni fondamentali.

Regole di Kirchhoof

Il campo di forza elettrostatico $\vec{F}_e$ è conservativo, muovendo dunque in esso un oggetto carico che non lo perturbi, lungo un cammino chiuso qualunque C, si compie un lavoro nullo:

$$\int_C \vec{F}_e \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{1.1}$$

Detti A e B due punti distinti qualsiasi di C, si ha:

$$\int_C \vec{F}_e \mathrm{d}\vec{s} = \int_{C_{AB}} \vec{F}_e \mathrm{d}\vec{s} + \int_{C_{BA}} \vec{F}_e \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{1.2}$$

Dunque

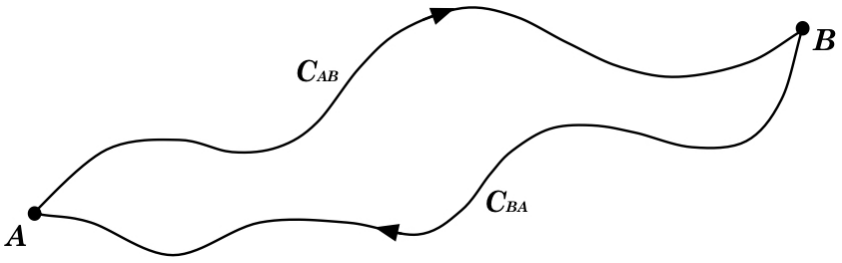


Figura 1.13: Percorso chiuso in un campo elettrico

$$\int_{C_{AB}} \vec{F}_e \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{C_{BA}} \vec{F}_e \mathrm{d}\vec{s} = \int_{-C_{BA}} \vec{F}_e \mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{1.3}$$

dove $-C_{BA}$ indica il tratto di curva C_{AB} percorso in verso opposto; l'integrazione da A a B non dipende quindi dal particolare cammino fatto. Ciò permette di introdurre una funzione U, detta energia potenziale, che dipende solo dalla posizione:

$$U(B) - U(a) = \int_A^B \mathrm{d}U = -\int_A^B \vec{F}_e \mathrm{d}\vec{s} \tag{1.4}$$

La quantità $dU = -\vec{F}_e \mathrm{d}\vec{s} = -\vec{F}_{ex}\mathrm{d}\vec{x} - \vec{F}_{ey}\mathrm{d}\vec{y} - \vec{F}_{ez}\mathrm{d}\vec{z}$ è quindi un differenziale esatto, e $-U$ è la funzione primitiva di $\vec{F}_e$, unica e definita a meno di una

costante additiva arbitraria. La forza è allora ottenibile come gradiente dell'energia potenziale:

$$\vec{F_e} = -\vec{\nabla}U \quad \Rightarrow \quad -F_{ex} = \frac{\partial U}{\partial x};\ -F_{ey} = \frac{\partial U}{\partial y};\ -F_{ez} = \frac{\partial U}{\partial z} \tag{1.5}$$

è facile dimostrare che forze centrali soddisfacenti al principio di sovrapposizione, come la forza elettrica in condizioni statiche, sono conservative. Ciò permette di definire una funzione differenza di energia potenziale ΔU(A,B) , che dipende solo dai punti A e B e non dal cammino percorso. Pensando a una distribuzione statica di carica Q come origine della forza elettrica per il sistema in studio, ha senso definire il cosiddetto campo elettrico $\vec{E}(\vec{r})$ come una proprietà di ogni punto $\vec{r}$ dello spazio esterno al volume occupato da Q, tale che immaginando di porre in $\vec{r}$ una carica q che non perturbi $\vec{E}(\vec{r})$, essa senta la forza elettrica $\vec{F_e}(\vec{r}) = q\vec{E}_e(\vec{r})$. Naturalmente anche il campo $\vec{E}$ è conservativo e si può definire una funzione differenza di potenziale (d.d.p.)

$$\Delta V = \Delta V(A,B) = V(B) - V(A) = \int_A^B \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} \tag{1.6}$$

così da avere $\Delta U = q\Delta V$. Come nel caso dell'energia potenziale, dalla (1.6) si ottiene che il campo elettrico è proporzionale al gradiente di questa nuova funzione:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\Big(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\Big) \tag{1.7}$$

L'unità di misura della d.d.p. nel sistema MKS è il Volt, e per l'energia si ha:

$$1 \text{ Joule} = (1 \text{ Volt}) \cdot (1 \text{ Coulomb})$$

Un'altra unità di misura dell'energia usata frequentemente è l'elettronvolt (eV), che è correlato alla carica elementare:

$$1 \text{ eV} = (1 \text{ Volt})\cdot(1 \text{ carica elett.}) \approx (1 \text{ Volt})\cdot(1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \approx$$
$$\approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Joule.}$$

Come U anche il potenziale V è definito a meno di una costante additiva arbitraria.

Le considerazioni svolte finora sono valide per qualunque sistema fisico isolato, e in particolare lo sono all'interno dei conduttori utilizzati per costruire circuiti elettrici. Considerando ad esempio il circuito in 1.14 e indicate le differenze di potenziale tra A e B, B e C, etc. con i simboli ΔV_{AB}, ΔV_{BC}, ecc., si ha:

$$\Delta V_{AB} + \Delta V_{BC} + \Delta V_{CD} + \Delta V_{DE} + \Delta V_{EA} = 0$$

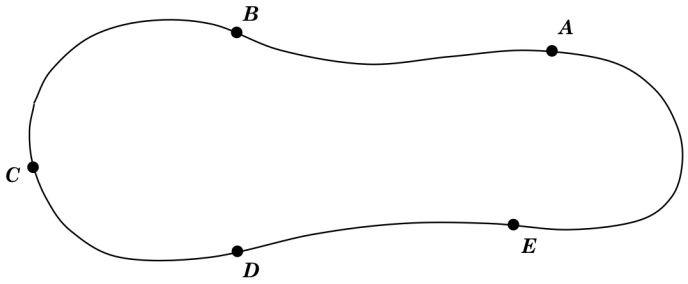


Figura 1.14: Circuito chiuso a maglia

cioè:

$$\sum_i \Delta V_i = 0 \tag{1.8}$$

dove ΔV_i rappresenta la generica differenza di potenziale ai capi dell'i-mo tratto di circuito.
Quanto detto vale anche nel caso in cui un tratto di circuito sia costituito da una pila o da un qualsiasi altro generatore di tensione continua[4], rappresentato dal simbolo ⊣⊢ come in figura 1.15. L'equazione (1.8) è sempre valida: ricordando che il lavoro fatto dal generatore per separare le cariche deve essere uguale a quello fatto da queste per circolare nel resto del circuito, nell'esempio di 1.15 il segno della differenza di potenziale ai capi del generatore è opposto a quelli delle altre differenze (percorrendo il circuito sempre nello stesso verso). Dunque:

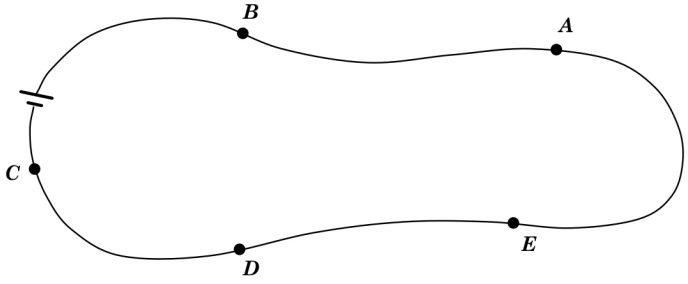


Figura 1.15: Circuito chiuso a maglia con alimentatore

$$\Delta V_{CD} + \Delta V_{DE} + \Delta V_{EA} + \Delta V_{AB} = -\Delta V_{BC} = \Delta V_{CB} \tag{1.9}$$

con: $\Delta V_{BC} = \mathcal{E} - IR_i$, essendo $\mathcal{E}$ la forza elettromotrice del generatore, I la corrente elettrica che scorre nel circuito e quindi anche nel generatore, ed R_i la resistenza interna di quest'ultimo. I concetti di corrente elettrica e resistenza ora anticipati, verranno ampiamente discussi nel seguito. Nel caso

[4]Il discorso si può complicare nel caso della presenza di una generica sorgente di f.e.m.

di situazione non "statica" si considera l'equazione di Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ che esprime la legge di induzione. In condizioni statiche la derivata parziale rispetto al tempo si annulla e resta soltanto $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$; ricordando che il rotore di un gradiente è sempre nullo si ritrova quindi che $\vec{E}$ può essere espresso come gradiente di un potenziale.
Se però è presente un campo magnetico variabile nel tempo, allora si può considerare una superficie S delimitata da un contorno C e calcolare il flusso del rotore del campo elettrico ottenendo, dal teorema di Stokes e dalla legge di Faraday:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{1.10}$$

dove $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ è il flusso del campo magnetico attraverso la superficie S. Quindi l'integrale di linea del campo elettrico non si annulla più, ma è uguale alla derivata parziale rispetto al tempo del flusso del campo magnetico

$$\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{1.11}$$

In condizioni non statiche, dunque, il campo elettrico non è più conservativo, e la sua circuitazione lungo un contorno C è uguale alla derivata temporale del flusso magnetico attraverso una superficie S orlata dal contorno C.
L'equazione (1.11) assomiglia peraltro, almeno formalmente, alla (1.9). Si può schematizzare ciò dicendo che il lavoro per unità di carica fatto per trasportare una carica (positiva) lungo un circuito elettrico è dato dalla somma delle tensioni generate lungo il circuito da effetti elettrochimici o dovuti a induzione:

$$\int_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \sum_{generatori} \Delta V_n \tag{1.12}$$

dove la tensione tra due punti A e B di un dato circuito elettrico è definita semplicemente come il lavoro per unità di carica necessario a spostare una carica positiva da A a B. Nel caso in cui non ci siano generatori o campi magnetici variabili, il lavoro che definisce la tensione coincide con quello che definisce la differenza di potenziale V, e per questo si tende spesso a confondere la tensione con la differenza di potenziale; per entrambi si utilizza inoltre lo stesso simbolo V.

La formula (1.12) appena introdotta è detta **regola di Kirchhoof per le tensioni**.

Si vedano ora alcune utili definizioni:

- un tratto di conduttore d'un circuito si chiama ramo;

- una porzione di circuito che si chiude su se stesso è detto maglia;
- un punto di un circuito da cui si dipartono tre o più rami è detto nodo.

La conservazione della carica elettrica in ogni processo fisico implica che la carica che entra in un nodo d'un circuito in un certo intervallo di tempo dovrà coincidere con quella che ne esce nello stesso intervallo di tempo, e ciò equivale a dire che la somma algebrica delle correnti che entrano in un nodo si deve annullare: ciò corrisponde alla **regola di Kirchhoof per le correnti**.
Si possono dunque enunciare le seguenti due regole di Kirchhoof:

1^a *Regola di Kirchhoof* _ La somma delle correnti entranti in un nodo stazionario è uguale alla somma delle correnti uscenti dallo stesso nodo:

$$\sum_{(nodo)} \Delta I_i = 0 \tag{1.13}$$

2^a *Regola di Kirchhoof* _ La somma delle tensioni ai capi degli elementi circuitali di una maglia, inclusi gli eventuali generatori con la loro resistenza interna, è nulla:

$$\sum_{(maglia)} \Delta V_i = 0 \tag{1.14}$$

La legge di Ohm

Applicando solo una differenza di potenziale (d.d.p.), e non una f.e.m., ai capi aperti di un filo conduttore si produce una forza che spinge gli elettroni di conduzione nel verso che va dal capo del filo a potenziale minore a quello a potenziale maggiore. Se il filo non è collegato ad altri conduttori, dopo una fase transiente iniziale, più o meno rapida a seconda delle caratteristiche del filo, il moto netto delle cariche cessa e la situazione, dal punto di vista elettrico, ridiviene statica.
Collegando invece il filo in modo che elettroni entrino ad una estremità uscendo quindi dall'altra, sospinti da una f.e.m., si può instaurare un flusso di carica anche se il conduttore resta globalmente neutro[5]. Per indurre le cariche a spostarsi all'interno del conduttore si possono utilizzare svariati tipi di generatori (pile, celle foto-voltaiche, ... per tensioni continue; dinamo, onde elettromagnetiche, ... per tensioni variabili).
In generale un dispositivo che produce una tensione nota e indipendente dal circuito esterno ad esso collegato e che permette e mantiene in esso un flusso continuo di carica, si chiama generatore di tensione.
I generatori di corrente producono e mantengono invece, nel circuito esterno

[5] La "non neutralità" violerebbe il principio di conservazione dell'energia per il sistema "circuito" considerato come "isolato".

collegato, una corrente nota e indipendente dal circuito stesso.
Come si vedrà di seguito, il generatore di tensione ideale è un dispositivo privo di resistenza interna; il generatore di corrente ideale dovrebbe invece avere resistenza interna infinita. Se in un conduttore passa una carica ΔQ nel tempo Δt, si definisce la corrente elettrica media che attraversa quel conduttore nel tempo Δt come $\langle I \rangle = \Delta Q/\Delta t$ e ovviamente la corrente elettrica $I(t)$ sarà definita come:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}$$

Poichè in natura la carica elettrica si presenta in modo quantizzato, non può cioè assumere valori arbitrariamente piccoli ma soltanto multipli interi di particolari valori, e per le cariche osservabili soltanto multipli interi di una carica pari a quella dell'elettrone, allora quest'ultima definizione è in realtà scorretta ma data la piccolezza della carica dell'elettrone, e la gran quantità di elettroni che tipicamente caratterizzano le correnti con cui avremo a che fare, possiamo assumerla come una buona approssimazione!

L'unità di misura della corrente elettrica nel Sistema Internazionale è l'Ampere (A): 1A = (1 Coulomb)/(1s).

Si trova sperimentalmente che per molti tipi di conduttori vale, almeno approssimativamente, una relazione di proporzionalità tra tensione applicata e corrente che lo attraversa. Questa relazione è nota col nome di legge di Ohm:

$$V(t) = R \cdot I(t) = R\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.15}$$

Il coefficiente di proporzionalità R è detto "resistenza del conduttore" e si misura in Ohm (Ω):

$$1\ \Omega\ =\ (1\ \text{Volt})\,/\,(1\ \text{Ampère})\ =\ (1\ \text{Volt}) \times (1\ \text{sec.})\,/\,(1\ \text{Coulomb})$$

La resistenza R può essere correlata con le caratteristiche geometriche e strutturali del conduttore in questione tramite la relazione (detta 2^a legge di Ohm)

$$R = \int_0^l \frac{\rho(l')}{\Sigma(l')}\mathrm{d}l' \tag{1.16}$$

dove: $\rho(l')$, detta resistività e misurata in (Ohm$\times$metri), è una caratteristica specifica del materiale conduttore, eventualmente dipendente dalla coordinata di posizione l' nel conduttore stesso; l è la lunghezza globale efficace del conduttore; $\Sigma(l')$ è l'area della sezione retta del conduttore in corrispondenza alla coordinata l'.

La resistività ρ di gran parte dei conduttori dipende dalla temperatura assoluta T secondo una legge del tipo $\rho \propto \mu T^{\eta}$. Questa dipendenza, in intervalli

di temperatura specifici per ogni conduttore e per scopi pratici, è spesso approssimata con un andamento lineare. In questi casi si preferisce esprimere la resistività ρ in funzione della temperatura Θ espressa in gradi centigradi, contata a partire da 20 ^{o}C, scrivendo:

$$\rho = \rho_{20}[1 + \alpha \cdot (\Theta - 20)] \tag{1.17}$$

dove ρ = resistività misurata a $\Theta = 20$ ^{o}C, ed α è detto coefficiente termico della resistività.

Resistività e coefficienti termici di alcune sostanze a 20 ^{o}C

Materiale	**Resistività (Ω·m)**	**Coeff. termico (^{o}C^{-1})**
argento	$1.59 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$
rame	$1.68 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$
oro	$2.35 \cdot 10^{-8}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
alluminio	$2.65 \cdot 10^{-8}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$
tungsteno	$5.65 \cdot 10^{-8}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$
zinco	$5.92 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$
nikel	$6.84 \cdot 10^{-8}$	$6.9 \cdot 10^{-3}$
ferro	$9.71 \cdot 10^{-8}$	$6.5 \cdot 10^{-3}$
platino	$10.6 \cdot 10^{-8}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
stagno	$11.0 \cdot 10^{-8}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$
niobio	$12.5 \cdot 10^{-8}$	
piombo	$20.7 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$
mercurio	$98.4 \cdot 10^{-8}$	
carbonio (grafite)	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$-0.5 \cdot 10^{-3}$
germanio	0.46	$-48 \cdot 10^{-3}$
silicio	$2.30 \cdot 10^{3}$	$-75 \cdot 10^{-3}$
acqua	$2 \cdot 10^{5}$	
vetro	$10^{10} \div 10^{14}$	
zolfo	$2 \cdot 10^{15}$	
quarzo fuso	$10^{16} \div 10^{17}$	

Per spostare una carica Q fra due punti tra i quali vi sia una d.d.p. V, si effettua dunque un lavoro $L = Q \cdot V$. Il lavoro effettuato nell'unità di tempo $W = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t$ è detto potenza elettrica e si misura in Watt (W). Poichè inoltre:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = V\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = V \cdot I \tag{1.18}$$

in un ramo di circuito con resistenza R, sottoposto alla d.d.p. V e percorso da corrente continua I, la potenza W dissipata (sotto forma di calore, luce, ecc. ...), è data da:

$$W = V \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{V^2}{R} \tag{1.19}$$

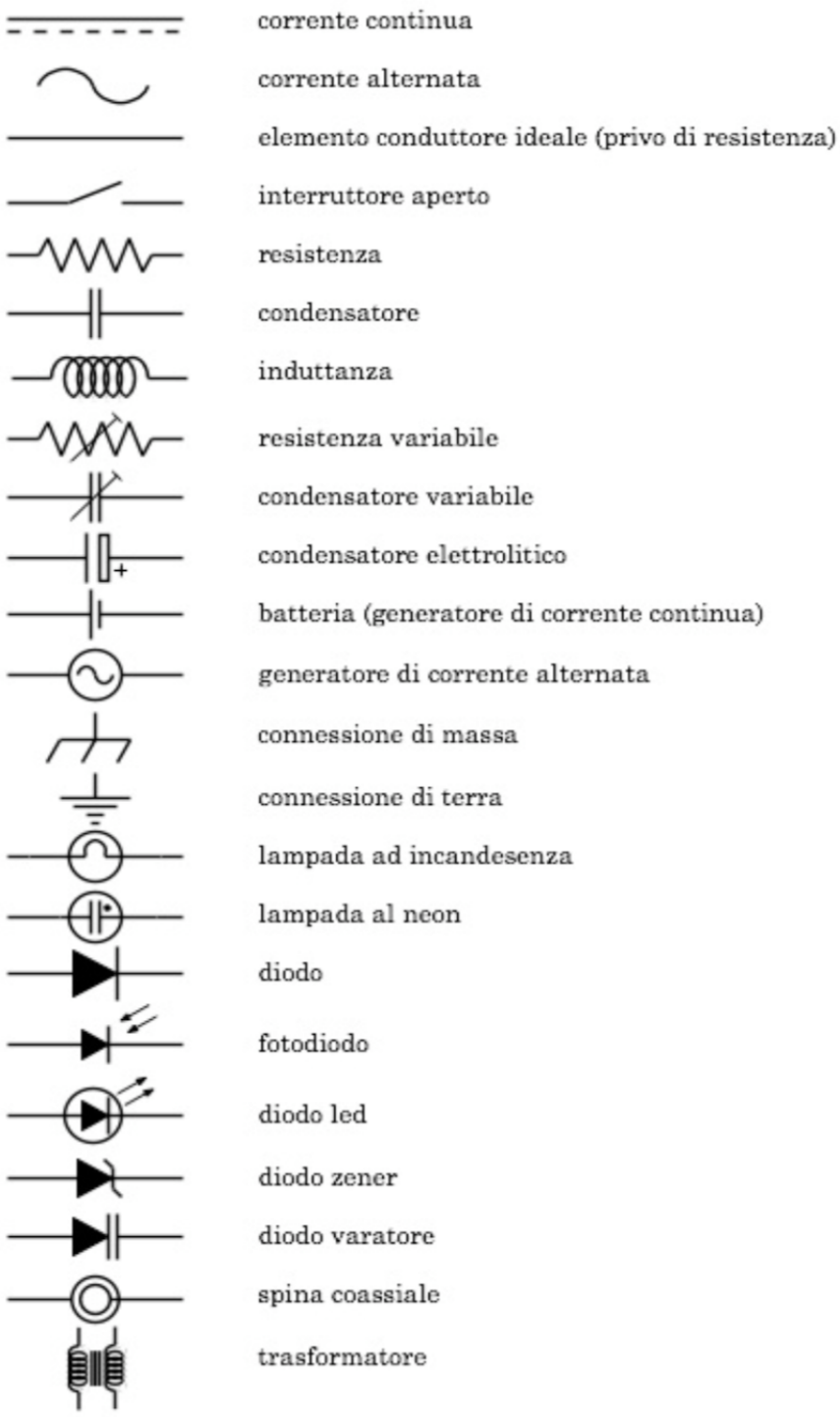


Figura 1.16: Simboli di alcuni comuni elementi circuitali

Quindi:

$$1 \text{ Watt} = (1 \text{ Volt}) \times (1 \text{ Ampere}) = (1 \text{ Ohm}) \times (1 \text{ Ampere})^2 = (1 \text{ Volt})^2 \times (1 \text{ Ohm})^{-1}$$

Sia il generatore di tensione che il filo elettrico sono degli elementi circuitali, e quando si mettono insieme diversi elementi circuitali si costruisce un circuito elettrico. In figura 1.16 sono riportati i simboli di alcuni elementi circuitali che saranno considerati nel corso delle presenti lezioni.

1.3 Strumenti di misura

1.3.1 I multimetri digitali

Gli strumenti con cui si misura la tensione elettrica sono detti voltmetri, quelli con cui si misura la corrente elettrica sono detti amperometri e quelli con cui si misura la resistenza elettrica sono detti ohmetri, ma è più frequente trovare questi strumenti riuniti in un unico oggetto chiamato multimetro o tester. In figura 1.17 è mostrato lo schema di base del funzionamento di un voltmetro digitale: Il cuore di un voltmetro è l'ADC (Analog-to-Digital

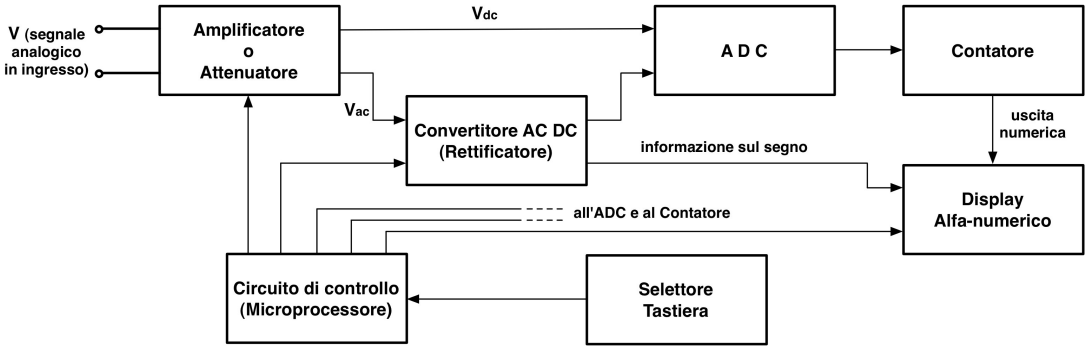


Figura 1.17: Schema voltmetro digitale

Converter) e si tratta di un circuito elettronico che converte una tensione continua, ovvero un segnale analogico, in una sequenza di segnali digitali[6] che rappresentano un numero binario (Appendice 2).
Questi segnali digitali sono poi inviati a un display contenente circuiti logici e uno schermo per la visualizzazione di dati e simboli alfanumerici.
Questi strumenti contengono anche un circuito di condizionamento in ingresso che serve sia a cambiarne il fondo-scala che in alcuni modelli, a modificarlo in modo da poterlo utilizzare come amperometro o ohmetro. Facendo ad esempio passare la corrente esterna attraverso una resistenza nota e misurando la tensione ai capi di questa, si ricava il valore della corrente in base alla legge di Ohm e alla tensione misurata.
Analogamente se lo strumento contiene una pila di f.e.m. nota, si può ottenere una misura di resistenza per mezzo di una misura della corrente estratta da questa pila.
Nelle figure 1.18 e 1.19 sono mostrati due esempi di multimetri digitali commerciali, uno portatile e uno da banco. Per la descrizione dettagliata delle funzioni di tali tipi di strumenti si rimanda alla consultazione degli specifici

[6] Dall'Inglese digit che significa cifra. I segnali digitali si utilizzano per rappresentare numeri interi all'interno dei moderni sistemi di calcolo e in gran parte della strumentazione scientifica. Gli strumenti digitali convertono un segnale analogico in un segnale digitale, ed effettuano l'eventuale successiva elaborazione su questo segnale digitale.

libretti di istruzioni.
è comunque importante osservare che le cifre rappresentate sul display di

Figura 1.18: Multimetro digitale portatile

Figura 1.19: Multimetro digitale da tavolo

strumenti come questi possono non avere sempre ovvia e immediata significatività; a tal proposito si raccomanda di annotare sempre i fondi scala in utilizzo nelle diverse funzioni per cui si li adopera, onde poter risalire

alla precisione effettiva di ogni misura, ed essere eventualmente in grado di apportare le correzioni sistematiche necessarie in funzione della resistenza di ogni fondoscala utilizzato.

1.3.2 Gli strumenti analogici o ad equipaggio mobile

Amperometro a bobina mobile _

La struttura fondamentale di questo strumento è costituita da una bobina piatta di n spire rettangolari, sostenuta da due perni in modo da poter ruotare attorno all'asse di simmetria verticale. La bobina è immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ di intensità costante e direzione radiale in ogni punto rispetto all'asse (Figg. 1.20 e 1.21). Il campo magnetico è realizzato da un

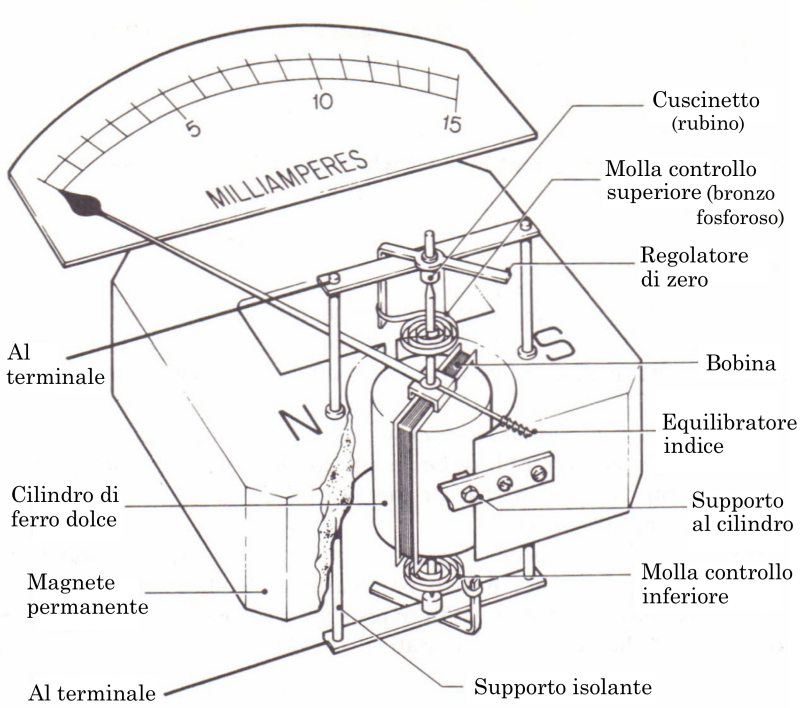


Figura 1.20: Meccanismo di un amperometro ad equipaggio mobile

magnete permanente a ferro di cavallo con espansioni N, S sagomate in modo da definire un volume fra le stesse di forma cilindrica. Tra le espansioni, coassialmente al volume cilindrico da esse definito, è posto un blocchetto di ferro dolce, anch'esso cilindrico, attorno al quale è fissato un telaio rettangolare d'alluminio su cui è avvolto il filo di rame che forma la bobina; al telaio è anche fissato rigidamente l'indice dello strumento. Il tutto costituisce l'equipaggio mobile in grado di ruotare attorno al proprio asse entro il

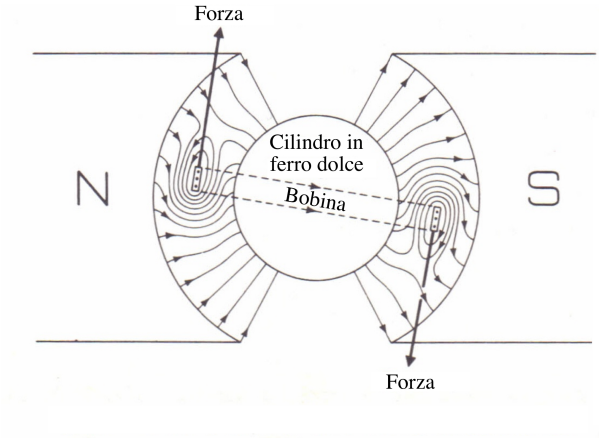


Figura 1.21: Particolare del campo magnetico attorno all'equipaggio mobile in presenza di corrente che percorre la bobina dello stesso

volume definito dalle espansioni N, S. Un opportuno sistema di contrappesi garantisce che il baricentro di tutto l'equipaggio mobile si trovi sull'asse di rotazione, annullando quindi su di esso il momento risultante della forza peso e permettendo così l'ottimale funzionamento dello strumento in qualsiasi posizione.
La corrente I percorre la bobina che tramite il telaio è meccanicamente solidale con due molle a spirale piana, avvolte in senso inverso l'una rispetto all'altra e posizionate simmetricamente una sulla parte superiore ed una su quella inferiore dell'equipaggio mobile. Esse hanno il compito di generare una coppia elastica di torsione il modulo del cui momento è approssimativamente pari ad $M = -h\theta$ (h = costante elastica) in corrispondenza ad ogni rotazione della bobina di un angolo θ rispetto a una determinata posizione di equilibrio corrispondente allo zero. Ciò vale ovviamente, con approssimazione tanto migliore quanto più piccoli sono gli angoli di torsione.
Il passaggio della corrente I provoca un momento di forza elettromagnetica il cui modulo è espresso da:

$$M = nadBI = \Phi^* I \tag{1.20}$$

dove a e d rappresentano le lunghezze dei lati di ogni spira rettangolare, $\Phi^* I = nadB$ è il flusso magnetico concatenato con la bobina. Il momento $\vec{M}$ allontana il telaio della bobina dalla posizione di equilibrio, ovvero dallo zero corrispondente all'assenza di corrente I nella bobina, e conseguentemente le molle esercitano una coppia elastica di richiamo di modulo $M = h\theta$. Si ha nuovamente condizione d'equilibrio quando θ assume il valore θ_{eq} tale che

$$\theta_{eq} = \frac{\Phi^*}{h} I \tag{1.21}$$

L'angolo di rotazione è dunque proporzionale alla corrente I entro i limiti di validità dell'approssimazione lineare per la reazione elastica delle molle. Lo strumento, data la struttura radiale del campo magnetico, ha quindi una scala lineare.

Funzionamento di un amperometro _

L'equipaggio mobile dello strumento subisce una rotazione, evidenziata da un indice solidale che si muove lungo un quadrante graduato, in corrispondenza al passaggio di corrente. Un amperometro è caratterizzato dalla portata e dalla resistenza interna; ha una certa rilevanza anche il consumo specifico che è però funzione delle prime due.
La portata o fondo scala dell'amperometro rappresenta il massimo valore I_M di corrente misurabile.
La resistenza interna corrisponde alla resistenza R_i dell'avvolgimento (bobina) in cui viene convogliata la corrente da misurare.
Il consumo specifico P_a, è definito come il prodotto della corrente di fondo scala per la resistenza interna, tipica del valore di fondo scala scelto

$$P_a = R_i I_M = R_i \frac{I_M^2}{I_M} = \frac{W_M}{I_M}$$

e coincide col rapporto tra la potenza massima dissipata nell'avvolgimento e la massima corrente misurabile, ovvero con la massima caduta di potenziale ai capi dello strumento.
Per misurare, con un amperometro, la corrente circolante in un tratto di circuito, lo strumento va inserito in serie nel circuito stesso. Ciò provoca ovviamente una modifica del circuito con una conseguente perturbazione della corrente da misurare. Riferendosi alle figure 1.22 a) e b), detta V la

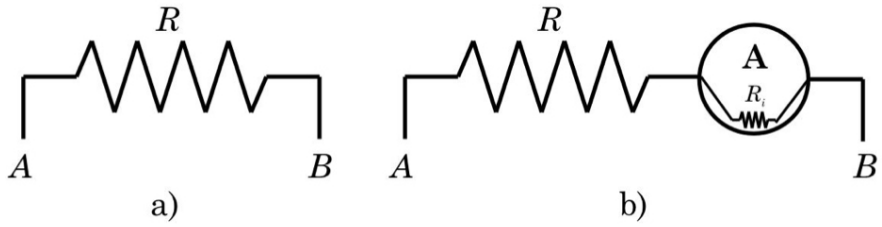


Figura 1.22: Posizionamento di un amperometro in misura

d.d.p. tra i punti A e B, dalla legge di Ohm si ha:

$$I = \frac{V}{R} \text{ (corrente imperturbata)}, \; I^* = \frac{V}{R_i + R} \text{ (corrente perturbata)}$$

da cui:

$$I - I^* = \Delta I = V\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_i + R}\right) = \frac{V R_i}{R(R + R_i)} = I\frac{R_i}{R + R_i}$$

Dunque ΔI rappresenta la correzione sistematica da apportare al valore di corrente letto I^*, per dedurre la corrente I che effettivamente passerebbe nel circuito in assenza dell'amperometro. La corrente perturbata I^* differisce quindi tanto meno da I quanto più vale $R_i << R$. Un amperometro è dunque tanto migliore quanto più è piccola la sua resistenza interna R_i. Naturalmente, se l'amperometro viene lasciato sempre inserito in un ramo di circuito, allora la sua lettura corrisponde all'effettiva corrente che transita in quel ramo di circuito, e nell'amperometro stesso.
La portata nominale di un amperometro è limitata dal suo fondo scala; per ovviare a ciò si ricorre all'inserzione di opportune resistenze tarate, dette *shunt*, in parallelo all'amperometro. Applicando le leggi di Kirchhoof al

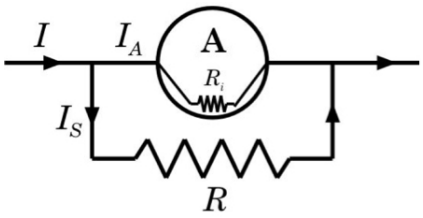


Figura 1.23: Schema circuitale di un amperometro

circuito di figura 1.23 si ha:

$$\left.\begin{matrix} I = I_A + I_S \\ RI_S = R_i I_A \end{matrix}\right\} \Rightarrow I - I_A = I_A \frac{R_i}{R} \Rightarrow I_A\left(1 + \frac{R_i}{R}\right) = I \Rightarrow I_A = \frac{1}{1 + R_i/R} I$$

che fornisce la frazione della corrente totale I che attraversa l'amperometro in funzione della resistenza di shunt R. Da ciò si ottiene che per aumentare di un fattore n la portata d'un amperometro, bisogna porre in parallelo ad esso uno shunt R_n pari alla $(n-1)^{ma}$ parte della sua resistenza interna R_i, ovvero: $R_n = R_i/(n-1)$.

Galvanometro _

I galvanometri sono strumenti in grado di misurare correnti di ridottissima intensità (sino a 10^{-11} A). Il loro funzionamento è analogo a quello degli amperometri, salvo per il fatto che la coppia elastica non è generata da molle ma dalla torsione di un sottile filo, che può essere di bronzo fosforoso, rame, oro o quarzo, cui è sospeso l'equipaggio mobile e che, tranne nel caso del quarzo, ha anche il compito di convogliare la corrente nella bobina.
La lettura non viene fatta traguardando la posizione di un indice, ma col metodo della leva ottica.
Data l'estrema sensibilità, e la delicatezza del meccanismo, questi strumenti, per esprimere al massimo le proprie potenzialità, vanno utilizzati su postazioni il più possibile stabili ed esenti da vibrazioni meccaniche, quali ad esempio colonne ad isolamento sismico.

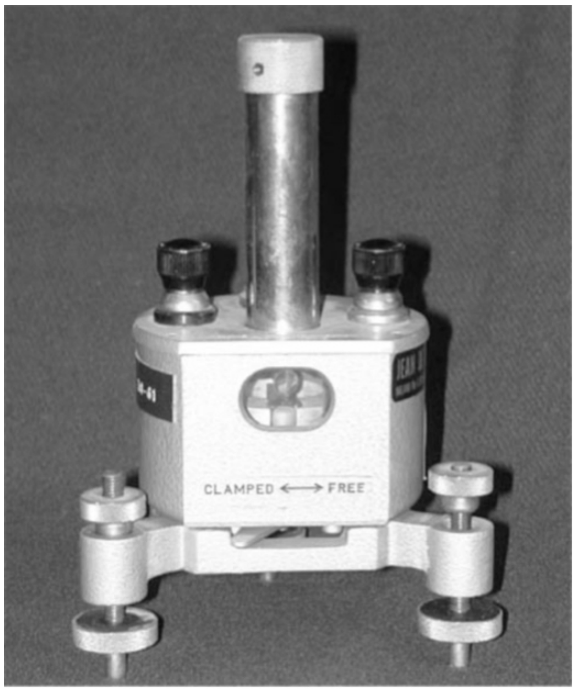


Figura 1.24: Galvanometro di D'Arsonvaal

Voltmetro _

Si ricordi che le misure di d.d.p. o tensione, sono sempre misure relative e la tensione va comunque sempre riferita a un certo terminale.
Utilizzando la legge di Ohm si può ricondurre una misura di d.d.p. a una misura di corrente. Si ottiene ciò collegando in parallelo i due punti di un circuito tra i quali si vuol misurare la d.d.p. mediante un amperometro la cui resistenza interna R_i sia stata fortemente aumentata tramite l'aggiunta in serie di una resistenza R'. La d.d.p. cercata è allora approssimativamente

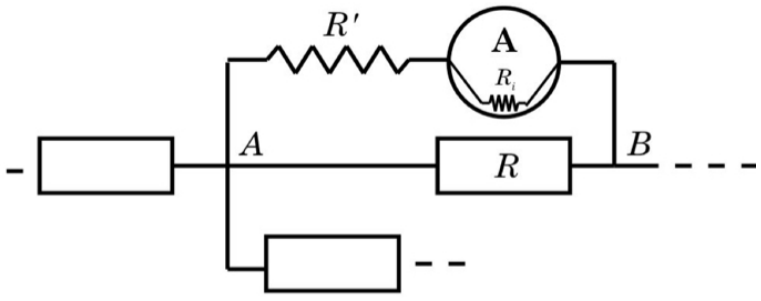


Figura 1.25: Schema circuitale di un voltmetro

data da:

$$V'_{AB} = V'_A - V'_B = (R' + R_i)I_G$$

dove I_G rappresenta l'intensità della corrente che attraversa lo strumento, ed $(R' + R_i)$ è detta *resistenza interna* del voltmetro.
Si osservi che come l'amperometro, anche il voltmetro altera col suo inserimento il circuito in esame. Se la corrente totale che scorre tra i punti A e B del circuito è sempre la stessa, prima e dopo l'inserimento del voltmetro, detta V_{AB} la tensione ai capi di R prima dell'inserimento dello strumento si ha: $V_{AB} = IR$. Dopo l'inserimento dello strumento invece:

$$V'_{AB} = I\frac{R(R' + R_i}{R + (R' + R_i)} = V_{AB}\frac{R' + R_i}{R + (R' + R_i)}$$

che è la d.d.p. dedotta dalla misura della corrente I_G che attraversa lo strumento. Dunque:

$$V_{AB} = \frac{V'_{AB}[R + (R' + R_i)]}{R' + R_i}$$

La differenza relativa per la tensione fra i punti A e B in presenza dello strumento è quindi:

$$\frac{V_{AB} - V'_{AB}}{V_{AB}} = \frac{\Delta V_{AB}}{V_{AB}} = 1 - \frac{R' + R_i}{R + (R' + R_i)} = \frac{R}{R + (R' + R_i)}$$

$\Delta V_{AB}/V_{AB}$ è quindi tanto più trascurabile quanto più vale $R < (R' + R_i)$.
ΔV_{AB} rappresenta dunque la correzione sistematica da apportare al valore misurato per ottenere l'effettiva d.d.p. tra i punti A e B in assenza del voltmetro ma nell'ipotesi che la sua introduzione non modifichi l'entità della corrente nel circuito.
Per aumentare di n volte la *portata* o $fondo\ scala$ dello strumento, bisogna quindi aggiungergli in serie una resistenza R' pari ad $(n - 1)$ volte la sua resistenza interna specifica R_i.
Viceversa, ponendo in serie allo strumento una resistenza R' qualunque, la portata sarà corrispondentemente aumentata di un fattore x pari a: $x = 1 + R'/R_i$.
Per quanto possa dunque essere grande la resistenza interna $(R' + R_i)$ dello strumento, è però inevitabile che la sua inserzione in un circuito ne perturbi in modo a volte non trascurabile le caratteristiche, falsando di conseguenza il risultato della misura stessa.
Ciò non avverrebbe se la resistenza interna $(R' + R_i)$ fosse infinita.
Uno strumento che in certe condizioni approssima abbastanza bene questa caratteristica è il *voltmetro elettrostatico.*

Voltmetro elettrostatico _

Si tratta sostanzialmente di un elettrometro senza campo ausiliario (Appendice 4). Esso è costituito da un condensatore realizzato con tre lamine,

due delle quali, indicate con M_0, sono fra loro identiche e rigidamente fissate in modo da lasciare libero uno spazio d'aria che permette la penetrazione parallela della terza lamina M_1, solidale a un equipaggio mobile che può ruotare intorno ad un perno O.
Quest'ultimo è connesso ad una molla a spirale piana m di costante elastica h (figura 1.26). La penetrazione più o meno profonda della lamina M_1 fra

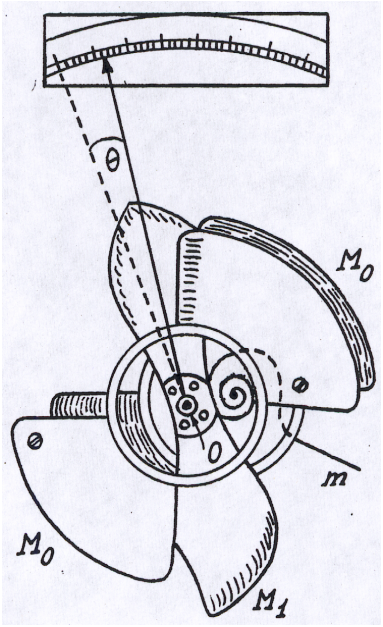


Figura 1.26: Schema del meccanismo di un volmetro elettrostatico

le due lamine fisse M_0, conseguente alla rotazione di un angolo θ dell'equipaggio mobile, determina la variazione della capacità $C(\theta)$ del condensatore $M_0 - M_1$, in modo approssimativamente proporzionale a θ, data l'opportuna sagomatura di M_1: $C(\theta) \propto K \cdot \theta$.
Se ai capi del condensatore si applica una d.d.p. V, l'equipaggio mobile sarà soggetto a un momento di forza di modulo M tendente a far aumentare l'angolo θ.
Supponendo il sistema isolato, quindi costante la carica elettrica Q sulle lamine, si ha, detta E l'energia elettrostatica del condensatore:

$$M = \frac{\partial E}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{[C(\theta)]^2}\frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{1}{2}V^2\frac{\partial C}{\partial \theta}$$

Assumendo $C(\theta) \propto K \cdot \theta$, si ha $dC/d\theta \propto K$, da cui:

$$M \propto \frac{1}{2}KV^2$$

Poichè infine ad M fà riscontro una coppia elastica il cui momento ha modulo pari ad $h\theta$, esercitata dalla molla piana a spirale, la condizione d'equilibrio dà:

$$\theta \propto \frac{K}{2h} V^2$$

Quindi, nell'ipotesi $C(\theta) \propto K \cdot \theta$, lo strumento ha una scala quadratica.

Ohmetro _

L'Ohmetro è uno strumento a lettura diretta, di rapido impiego, che permette misure di valori di resistenze con incertezze tipiche di qualche unità percentuale. Gli elementi costitutivi essenziali di un Ohmetro sono una pila, di resistenza interna R_i e f.e.m. $\mathcal{E}$, e un milliamperometro S di resistenza interna R; R_2 rappresenta l'eventuale resistenza di shunt. Il circuito viene chiuso sulla resistenza da misurare R_x, in modo che la corrente I^* misurata da S sia una funzione ben definita di R_x.
Si consideri ad esempio come possibile schema operativo quello in figura 1.27.

Indicando con I la corrente che attraversa il ramo $MABN$, e con I^* la

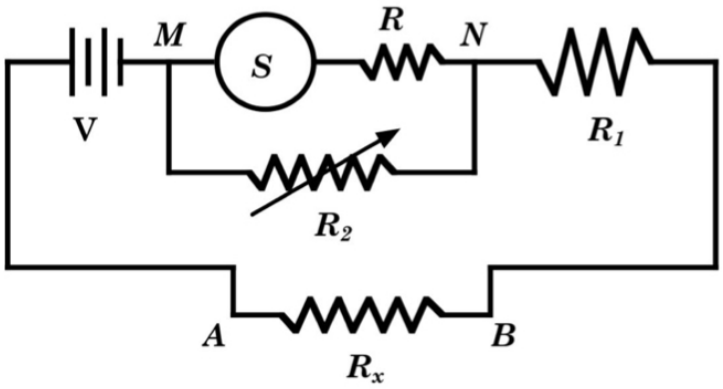


Figura 1.27: Schema circuito interno di un Ohmetro

corrente che attraversa il milliamperometro, si ha che attraverso R_2 passa la corrente $I_2 = I - I^*$. Quindi $I = I^* + I_2$; $I^* R = I_2 R_2 = (I - I^*) R_2$ da cui:

$$I^* = \frac{R_2}{R + R_2} I \;\Rightarrow I = I^* \left(1 + \frac{R}{R_2}\right)$$

Inoltre:

$$I = \frac{V}{R_x + R_1 + RR_2/(R + R_2)}$$

da cui,

$$I^*(V,R,R_1,R_2,R_x) = \frac{\dfrac{V}{1+R/R_2}}{R_x+R_1+\dfrac{RR_2}{R+R_2}} = \frac{\dfrac{\mathcal{E}-IR_i}{1+R/R_2}}{R_x+R_1+\dfrac{RR_2}{R+R_2}}$$

$$R_x = \frac{\dfrac{\mathcal{E}-IR_i}{1+R/R_2}}{I^*} - \left(R_i + \frac{RR_2}{R_1+R_2}\right)$$

Quindi I^* è funzione di R_x e degli altri parametri che però, una volta determinata la posizione di misura dell'ohmetro, restano costanti. Ciò permette quindi di affermare che $I^* = I^*(R_x)$, e tracciare di conseguenza una scala delle resistenze che per quanto visto, risulterà inversa e di forma iperbolica rispetto alla corrente I^*.
Per poter utilizzare tutta la scala a disposizione del milliamperometro S, i parametri vanno scelti in modo che $I^*(0)$ coincida con la corrente I_{max} di fondo scala.
La scala di un ohmetro va da $R_x = 0$ $[I^*(0) = I_{max}]$, ad $R_x = \infty$ $[I^*(\infty) = 0]$; non si può dunque parlare di un vero e proprio fondo scala. La dipendenza $R_x \propto 1/I^*$ fa inoltre sì che l'incertezza relativa $\Delta R_x/R_x$ diverga rapidamente sia in corrispondenza ai valori bassi che a quelli alti della scala effettiva sullo strumento. Si può verificare che per mantenere $\Delta R_x/R_x < 0.05$ ci si deve limitare a un intervallo di lettura centrale pari a circa metà della scala completa compresa fra 0 e 1 per I^*/I^*_{max}; bisogna cioè evitare che R_x diventi sensibilmente diverso da R.
Si ovvia a questo inconveniente realizzando diverse disposizioni di lavoro per l'ohmetro, corrispondenti a diversi valori dei parametri, tali da portare il tratto quasi lineare della curva in differenti intervalli di variazione della resistenza, possibilmente ognuno sul prolungamento dell'altro.
Per l'adeguata taratura di ogni scala dell'ohmetro bisogna naturalmente che esso registri una lettura pari a 0 Ohm per ognuna di esse, in corrispondenza ad $R_x = 0$ Ohm, ovvero ponendo A e B in cortocircuito. A tale scopo si può opportunamente agire sulla resistenza variabile R_2.

Strumento Universale _

In figura 1.28 è mostrato un tipico strumento universale a bobina mobile. Esso permette di effettuare misure di tensioni in corrente continua e in corrente alternata; misure d'intensità di corrente in continua e in alternata; misure di resistenza per valori sino a 0.1 Ohm, in corrente continua; misure di resistenza in corrente alternata; misure di capacità; prova diodi e transistor e grazie all'utilizzo di uno specifico cavo di connessione, misure di frequenza. Quanto detto sinora sul funzionamento degli strumenti analogici, e non strettamente legato alla struttura meccanica del loro funzionamento, vale ovviamente anche per gli strumenti digitali.

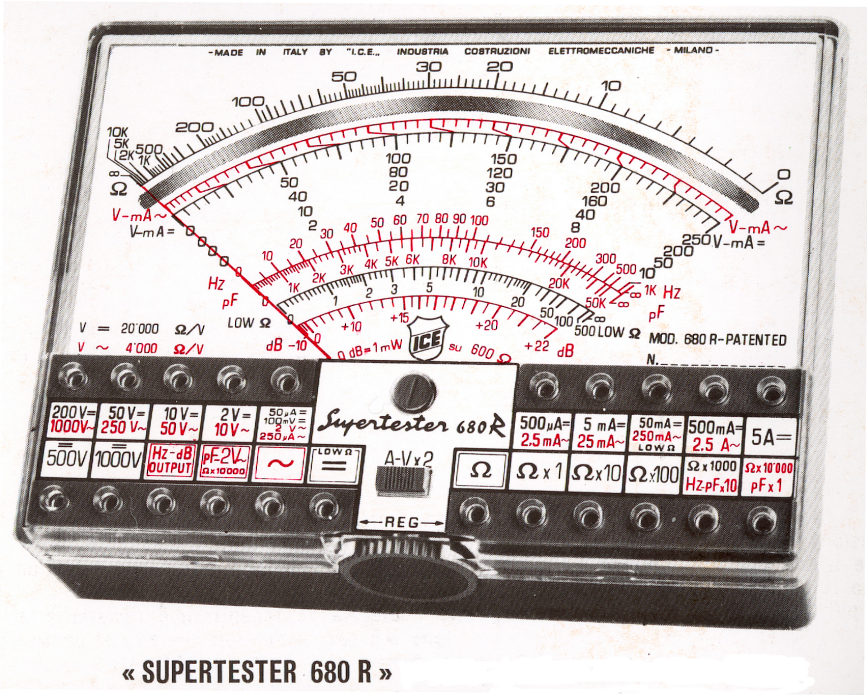


Figura 1.28: Strumento universale analogico

1.4 Resistenze elettriche e codice dei colori

La realizzazione di circuiti elettrici richiede praticamente sempre l'introduzione di conduttori con valori ben definiti della resistenza. Le resistenze più comuni sono solitamente costituite da cilindretti contenenti polvere di grafite compattata, oppure da pellicole metalliche depositate su un substrato isolante (par. 2.8).
Per la rapida individuazione del valore delle resistenze prodotte commercialmente, si utilizza la tecnica di marcarle con delle strisce colorate. In figura 1.29 è illustrato questo *codice dei colori*.

Le resistenze sono costruite con una precisione definita (specificata dalla tolleranza), e non ha quindi senso commercializzare resistenze con valori che differiscono fra loro meno della tolleranza costruttiva, ad esempio non ha senso commercializzare resistenze da 1000 Ω e da 1001 Ω se la tolleranza di costruzione è 1% (che in questo caso corrisponde a 10 Ω). Nella lista seguente sono indicati i valori commerciali per resistenze con tolleranza del 10%: 10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 39, 47, 56, 68, 82, 100 (ovviamente moltiplicando per i successivi ordini di grandezza si ottiene la totalità dei valori di resistenza disponibili, sempre al 10%). Ciò significa che si possono ad esempio acquistare resistenze al 10% con valori da 22 Ω o da 33 Ω, ma non da 25 Ω.

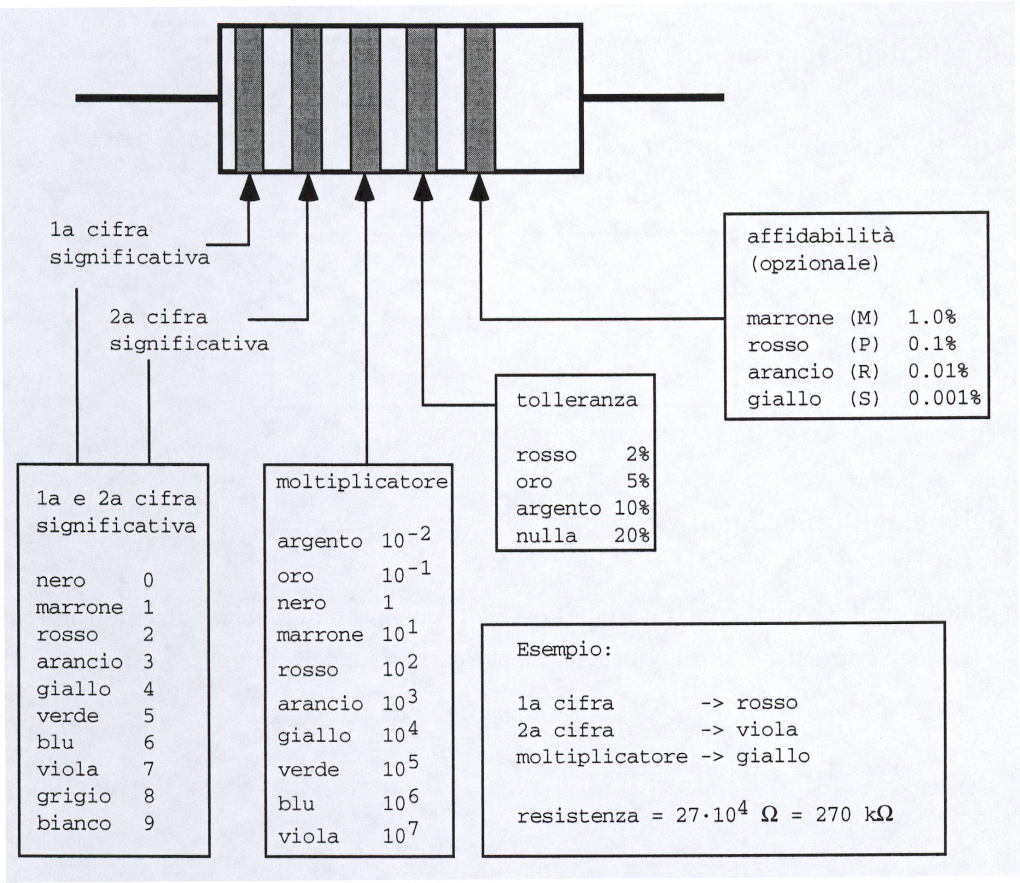


Figura 1.29: Codice dei colori

Osservazioni _

Si ricordi di tener sempre in debito conto delle resistenze (in genere delle impedenze) introdotte dai cavi di connessione, dai contatti, dagli strumenti di misura utilizzati (per un amperometro ad esempio dipendono dalla scala di misura impostata), ed eventualmente dall'ambiente circostante. Qualora se ne trascuri l'influenza, bisogna sempre cercare di giustificarlo quantitativamente.
Inoltre, ogni valore misurato o quotato dovrà essere sempre accompagnato dal proprio livello di incertezza ed eventualmente da un'indicazione su come questo sia stato stimato, distinguendo, se ne fosse il caso, fra contributi statistici, sistematici e di sensibilità della strumentazione.

È ora il momento di cominciare a mettere mano davvero all'attività di laboratorio esercitandosi, per verificare in pratica quanto descritto e quanto verrà presentato in seguito e anche sperimentando, per rimisurare costanti

fisiche già note o per studiare l'andamento di certi fenomeni in funzione di osservabili che li caratterizzino.
Da qui in poi ci saranno quindi, intervallati al richiamo di alcuni propedeutici argomenti fondamentali e di complemento ad essi, dei paragrafi intitolati come Esercitazione o Esperienza, che proporranno delle specifiche misure da effettuarsi in laboratorio da parte di gruppi di tre o al massimo quattro persone, e riporteranno anche numerose indicazioni e suggerimenti pratici. A conclusione di alcune di queste esercitazioni o esperienze si richiederà, come parte della fase didattica, una relazione scritta completa di analisi dei dati raccolti, frutto dell'attività congiunta di tutti i componenti di ogni gruppo.

1.5 Generatori reali

Ricordando che $W = V^2/R$, si deduce che un generatore di tensione ideale dovrebbe essere in grado di erogare una potenza arbitrariamente grande pur di chiuderlo su una resistenza R opportunamente piccola.
Considerando poi che si ha anche $W = I^2R$, si deduce similmente che un generatore di corrente ideale dovrebbe poter erogare una potenza arbitrariamente grande, pur di chiuderlo su una resistenza R opportunamente grande. Quanto detto non è però fisicamente realizzabile, i generatori reali si comportano infatti in modo alquanto diverso.

1.5.1 Generatori reali di tensione

Un generatore reale di tensione è un dispositivo che genera una d.d.p. V ma offre nel contempo una resistenza finita R_i (resistenza interna) al passaggio della corrente. La resistenza interna R_i è una caratteristica costruttiva intrinseca di ogni generatore, dunque ineliminabile. Un generatore reale di

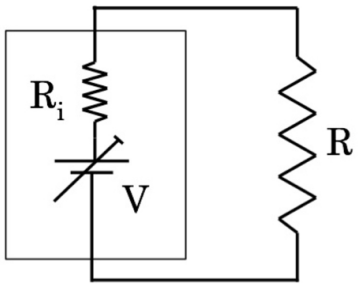


Figura 1.30: Equivalente circuitale di un generatore reale di tensione

tensione può dunque essere schematizzato come in figura 1.30.
Ne consegue che la d.d.p. da esso fornita non è costante, come per un generatore ideale, ma dipende dal carico resistivo esterno R. Detta infatti V_R la d.d.p. ai capi di tale carico, se V è la tensione ai capi del generatore nudo, ovvero la f.e.m. $\mathcal{E}$, si ha:

$$\mathcal{E} = V = I(R + R_i) = V_R + IR_i$$

$$V_R = V - IR_i = V - \frac{VR_i}{R + R_i} = V\left(1 - \frac{R_i}{R + R_i}\right) = \frac{VR}{R + R_i}$$

cioè:

$$V_R = V\frac{1}{1 + R_i/R} \tag{1.22}$$

da confrontarsi con $V_R = V$ per il corrispondente generatore ideale.
Si ha che $V_R \to V$ per $R_i/R \to 0$. Ovvero il generatore reale di tensione tende a quello ideale quanto minore è il rapporto fra la sua resistenza interna

R_i e quella di carico R.
Siccome poi V ed R_i sono caratteristiche costruttive intrinseche del generatore reale, l'approssimazione del suo comportamento ideale dipende sostanzialmente dalla resistenza di carico R.

1.5.2 Generatori reali di corrente

Un generatore reale di corrente è un dispositivo che genera una corrente I ma nel contempo assorbe una parte I_i di tale corrente sulla propria resistenza interna R_i. Esso può quindi essere schematizzato come un generatore

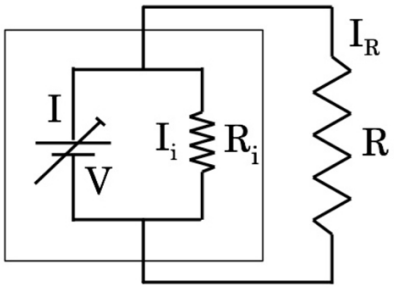


Figura 1.31: Equivalente circuitale di un generatore reale di corrente

ideale posto in parallelo alla propria resistenza interna R_i.
I ed R_i sono caratteristiche costruttive intrinseche del generatore e la corrente da esso fornita non è costante, ma dipende dal carico resistivo esterno R. Detta infatti I_R la corrente che scorre in R, si ha:

$$I_R = V/R$$

$$I = I_i + I_R = V\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R}\right) = V\frac{R+R_i}{RR_i} = I_R\frac{R+R_i}{R_i}$$

da cui:

$$I_R = I\frac{1}{1+R/R_i} \tag{1.23}$$

da confrontarsi con $I_R = I$ per il corrispondente generatore ideale.
Si ha che $I_R \to V$ per $R_i/R \to 0$. Ovvero il generatore reale di corrente tende a quello ideale quanto minore è il rapporto fra la resistenza di carico R e la sua resistenza interna R_i.
Siccome poi I ed R_i sono caratteristiche costruttive intrinseche del generatore reale, anche in questo caso l'approssimazione del suo comportamento ideale dipende sostanzialmente dalla resistenza R di carico.
Un generatore reale di corrente si comporta quindi approssimativamente come un generatore ideale se la potenza che eroga è piccola rispetto a quella massima che è in grado di erogare.

1.5.3 Potenza erogabile dai generatori

Analizziamo i rapporti tra la potenza totale prodotta e quella erogabile, sia per un generatore di tensione che per un generatore di corrente.

Generatore di tensione _
Per un generatore di tensione si ha:

$$W_{Tot} = \frac{V^2}{R_i + R} = \frac{V^2}{R_i} \frac{1}{1 + R/R_i}$$

Detto $W_{Max} = V^2/R_i$, si ha che $W_{Tot} \to W_{Max}$ per $R/R_i \to 0$.
Per la potenza W_{est} utilizzabile dalla resistenza R di carico si ha invece:

$$W_{est} = V_R I = RI^2 = R\left(\frac{V}{R + R_i}\right)^2 = \frac{RR_i}{R_i}\left(\frac{V}{R + R_i}\right)^2 = \frac{V^2}{R_i}\frac{RR_i}{(R + R_i)^2} =$$
$$= W_{Max}\frac{RR_i}{(R + R_i)^2} = W_{Max}\frac{R/R_i}{(1 + R/R_i)^2}$$

che come si può facilmente verificare presenta, per $R/R_i = 1$ un valore massimo pari a $W_{Max}/4$.
Si ottiene dunque, per la potenza W_{int} dissipata all'interno del generatore:

$$W_{int} = W_{Tot} - W_{est} = W_{Max}\left(\frac{R_i}{R + R_i} - \frac{RR_i}{(R + R_i)^2}\right) = W_{Max}\frac{R_i^2}{(R + R_i)^2} =$$
$$= W_{Max}\frac{1}{(1 + R/R_i)^2}$$

Quindi W_{int}, come W_{Tot}, presenta un andamento decrescente al crescere di R, ma è comunque sempre minore di W_{Tot} per ogni scelta di R e per $R/R_i = 1$ vale W_{Max}, come W_{est}. Definita l'efficienza η_V di un generatore di tensione come:

$$\eta_V = \frac{W_{est}}{W_{Tot}} = \frac{R}{R + R_i} = \frac{1}{1 + R_i/R} \tag{1.24}$$

si vede che essa tende al valore massimo, pari ad 1, per $R/R_i \to \infty$, che corrisponde però a $W_{est} = W_{int} = 0$.
Il modo per estrarre la massima potenza possibile da un generatore di tensione è quindi porre $R = R_i$, in tal modo metaà della potenza totale prodotta dal generatore saraà disponibile per il carico esterno R e l'altra metà sarà assorbita dal generatore stesso.
Per un generatore di tensione ideale, in cui $R_i = 0$, sarebbe stato:

$$W_{int}^{(id)} = 0,\ W_{Tot}^{(id)} = W_{est}^{(id)} = \frac{V^2}{R},\ \eta_V^{(id)} = 1$$

Le differenze fra generatore reale e generatore ideale sono ovviamente dovute alla resistenza interna R_i del primo.
Si possono presentare casi in cui R_i non sia costante nel tempo. Per le batterie R_i aumenta all'aumentare dell'energia totale erogata. La batteria tenderà dunque a scaricarsi non perchè V diminuisce ma piuttosto perchè all'aumentare di R_i la potenza corrispondentemente assorbibile dal carico esterno R diminuisce.

Generatore di corrente _
Per un generatore di corrente valgono considerazioni analoghe:

$$W_{Tot} = IV = I^2 R_i \frac{1}{1 + R_i/R} = W_{Max} \frac{1}{1 + R_i/R}$$

$$W_{est} = I^2 \frac{R R_i^2}{(R + R_i)^2} = W_{Max} \frac{R R_i}{(R + R_i)^2}$$

In questo caso W_{Tot} ha un andamento in funzione di R/R_i opposto a quanto era invece per un generatore di tensione; l'andamento di W_{est} è invece lo stesso che nel caso di un generatore di tensione. Per l'efficienza di un generatore di corrente si ha quindi:

$$\eta_I = \frac{W_{est}}{W_{Tot}} = \frac{1}{1 + R/R_i} \tag{1.25}$$

L'andamento di η_I è dunque opposto a quello di η_V.
Per un generatore di corrente ideale, in cui $R_i = \infty$, sarebbe stato:

$$W_{Tot}^{(id)} = W_{est}^{(id)} = I^2 R, \; \eta_I^{(id)} = 1$$

Un generatore di corrente o uno di tensione, si comportano quindi allo stesso modo, dal punto di vista della potenza utilizzata da una resistenza di carico R (ciò è desumibile anche dalla regola di Norton[7]).
La potenza sviluppata all'interno del generatore stesso è invece molto diversa nei due casi: essa tende infatti a 0 per $R/R_i \to \infty$ in un generatore di tensione, mentre tende a 0 per $R/R_i \to 0$ in un generatore di corrente.
Il comportamento di un generatore dipende quindi essenzialmente dalla resistenza di carico R e si può schematizzare come segue:

$R/R_i \to \infty$	buon generatore di tensione
$R/R_i \approx 1$	buon generatore di potenza
$R/R_i \to 0$	buon generatore di corrente

[7] Per la regola di Norton vedi a pag. xy, paragrafo 1.6.3.

1.6 Esercitazione 1 _ Misura di forze elettromotrici e di resistenze interne di pile e accumulatori

Si scelga una pila (o un accumulatore), si ponga un voltmetro su una scala DC adeguata e si premano i puntali sui morsetti della pila, leggendo la tensione rilevata e valutando sensibilitaà e accuratezza della misura. Se il voltmetro è un buon voltmetro, assorbe una corrente piccolissima (la si valuti), quindi la tensione misurata sarà di poco (quanto ?) inferiore alla forza elettromotrice $\mathcal{E}$ della pila. Si ripeta la misura con altre pile e accumulatori confrontando i risultati con i valori nominali forniti dal costruttore. Se i valori misurati sono maggiori o uguali a quelli nominali è probabile che la pila sia carica, altrimenti è probabile che sia scarica. Questa ovvia osservazione è però solamente indicativa in quanto, come visto nel paragrafo precedente...(1.5.1), la forza elettromotrice dipende tutto sommato poco dallo stato di carica.
Si proceda quindi selezionando su un amperometro il fondo-scala di 10 A e con cavetti di collegamento e morsetti si costruisca un circuito ponendo in serie l'amperometro, un reostato con cursore a centro corsa e un alloggiamento per pile/accumulatori. Inserita una pila (o un accumulatore) nell'alloggiamento si misuri la corrente che attraversa l'amperometro. Poichè il circuito non ha biforcazioni, la prima regola di Kirchhoof assicura che la corrente è uniforme lungo tutto il circuito, quindi la corrente letta dall'amperometro attraversa anche la pila, la resistenza e i cavetti di collegamento. Si aggiusti la scala dell'amperometro in funzione del valore di corrente letto per ottimizzare la sensibilità della misura. Il cambio di scala potrebbe modificare la corrente in quanto la resistenza interna dell'amperometro dipende dalla scala usata, tuttavia la misura dell'amperometro non richiede correzioni: la corrente misurata è proprio quella che attraversa ogni elemento di circuito, amperometro compreso, finchè questo è parte del circuito.
Circolando quindi con i puntali del voltmetro sempre nello stesso verso ed evitando di scambiarne l'ordine (per non determinare ambiguità nel segno del valore letto), si misurino le tensioni ai capi della resistenza, ai capi di ciascun cavetto di collegamento, dell'amperometro e della pila.
Si controlli se nel corso di tali misure la corrente varia; ciò potrebbe avvenire per tre ragioni:

- percheè i contatti sono "ballerini" (ossidati, sporchi, non ben premuti); toccandoli con i puntali del voltmetro potrebbero migliorare (aumento di corrente) o peggiorare; ci si assicuri che ciò non avvenga;

- se la resistenza interna del voltmetro non è sufficientemente maggiore rispetto a quella dell'elemento circuitale analizzato, il collegamento

del voltmetro fornisce un'ulteriore via non trascurabile alla corrente; questo effetto non dovrebbe essere significativo nelle nostre condizioni se la resistenza interna del voltmetro è grande rispetto a quelle dei vari componenti della maglia (par. 1.3.2);

- se la pila o l'accumulatore non fossero ben carichi, la corrente potrebbe avere un picco iniziale seguito da un rapido decadimento.

In condizioni quasi stazionarie si verifichi che la tensione misurata ai morsetti della pila sia uguale alla somma delle tensioni misurate ai capi dei vari cavetti, della resistenza variabile e dell'amperometro, ovvero si verifichi la validità delle regole di Kirchhoof per le tensioni. Si valutino quindi, sulla base della legge di Ohm, $R = VI$, la "resistenza per metro" dei vari cavetti di collegamento e la "resistenza interna" dell'amperometro sulle varie scale selezionabili, annotandosi i risultati (le sensibilità dell'amperometro e del voltmetro utilizzati permettono di valutare la resistenza per metro dei cavi utilizzati?).
Si sposti quindi il cursore reostatico[8] successivamente in nuove posizioni (si osservi che non è necessario conoscere il valore di resistenza inserito, è sufficiente che tale valore si mantenga stabile durante ogni singola misura) misurando di volta in volta la corrente I e la tensione V ai morsetti della pila. Riportando i risultati su un opportuno grafico $I-V$ si ottengono alcuni punti della cosiddetta curva di scarica della pila (figura 1.28).
Approssimando con una retta la curva che interpola questi punti sperimentali, si può valutare la resistenza interna della pila come pendenza di tale retta, ovvero:

$$R_i = \frac{\mathcal{E} - V}{I} \quad ; \quad \mathcal{E} = V + IR \quad ; \quad V = \mathcal{E} - IR \tag{1.26}$$

La resistenza interna R_i è un indice affidabile dello stato di invecchiamento della pila (accumulatore): è piccola, dai decimi di Ohm sino a pochi Ohm, quando la pila è giovane e aumenta man mano che la pila invecchia, ovvero man mano che con l'utilizzo le sue parti costituenti si deteriorano (ossidazioni, essicamento delle soluzioni gelificate, ...).
Infatti, come accennato in precedenza, la diminuzione della tensione erogata è dovuta più ad un aumento della resistenza interna che non a una diminuita efficacia della sorgente di tensione.

[8] In mancanza di un reostato si può utilizzare una "scatola di resistenze" che permette, tramite chiusura o apertura di interruttori, l'inserzione o disinserzione di resistenze in serie. Al momento dell'uso si apra e chiuda più volte ogni interruttore onde ripulirlo, per strofinio, da eventuali depositi di ossido che potrebbero determinare cattivi contatti con conseguenti instabilità non valutabili per il valore di resistenza inserito.

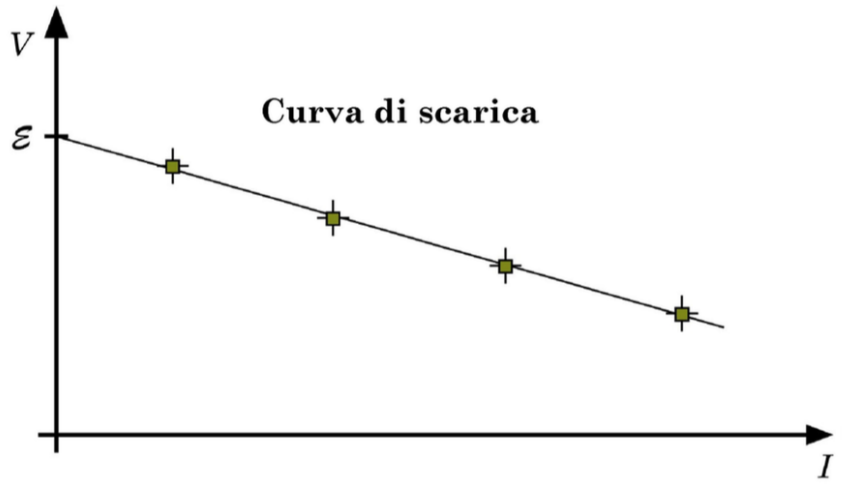


Figura 1.32: Curva di scarica di una pila

Si vede altresì che l'estrapolazione della retta al valore di corrente nulla, corrispondente all'inserimento di una resistenza infinita, ovvero a circuito aperto, fornisce il valore stimato della forza elettromotrice della pila come intercetta sull'asse V delle ordinate.

Per valutare la resistenza interna di altre pile senza dover usare l'amperometro, si può porre l'alloggiamento della pila in serie a una resistenza campione R_C, del valore di pochi Ohm; si misuri la forza elettromotrice $\mathcal{E}$ della pila prima di inserirla nell'alloggiamento, e si misuri la tensione V ai morsetti dopo aver inserito la pila nell'alloggiamento.
La resistenza interna si ottiene allora come:

$$R_i = R_C \frac{\mathcal{E} - V}{V} \tag{1.27}$$

1.7 Misure di resistenza elettrica

1.7.1 Metodo voltamperometrico

Tale metodo si basa sullo schema circuitale illustrato in figura 1.33. Con

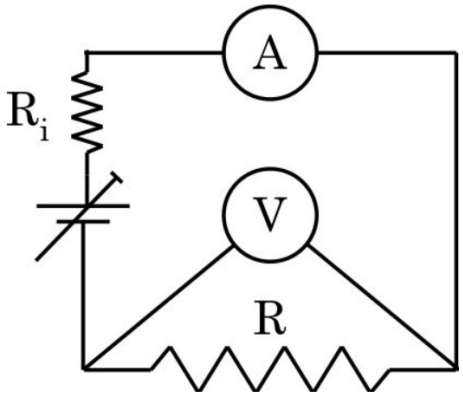


Figura 1.33: Circuito per l'implementazione del metodo volt-amperometrico

questo tipo di collegamento, detto "voltamperometrico", il voltmetro misura la tensione V ai capi della resistenza incognita R, purchè i cavetti di collegamento abbiano resistenza molto minore di quella del voltmetro, e l'amperometro misura la corrente I che scorre nella resistenza incognita R, purchè la via fornita alla corrente dal voltmetro sia trascurabile; se si volesse tenerne conto si potrebbe valutare la corrente nella resistenza incognita come $I - V/R_V$, essendo R_V la resistenza interna del voltmetro, ma nella gran parte dei casi la correzione sarebbe molto minore della sensibilità dell'amperometro.
Si osservi che per ottenere indicazioni preliminari sul valore di una resistenza incognita può essere usato un singolo multimetro posto su scale ohmmetriche. In tal caso, all'interno del multimetro, una pila e una resistenza calibrata R_C, dipendente dalla scala scelta, vengono collegate in serie tra i morsetti dello strumento; quando la resistenza incognita viene collegata ai morsetti, il multimetro misura la corrente I e la converte in una misura di resistenza sulla base della relazione

$$R = \frac{\mathcal{E}}{I} - R_C - R_i \tag{1.28}$$

dove $\mathcal{E}$ ed R_i si riferiscono alla pila interna al multimetro. Ma se la resistenza R da misurare non è ben maggiore di R_i , il multimetro usato come ohmetro risulta ovviamente non accurato, come anche discusso nel precedente paragrafo 1.3.2, alle pagg. 30-31. In tal caso le "misure" di resistenza eseguite direttamente con normali multimetri devono essere considerate alla stregua di indicazioni puramente preliminari, essendo il metodo voltamperometrico

di gran lunga più accurato.
Ovviamente un'unica misura di una coppia di valori (I, V) fornisce anch'essa un valore solamente indicativo di R: il modo adeguato di operare consiste nel raccogliere svariate coppie di valori (I_i, V_i) e costruire una curva tensione-corrente per la resistenza in esame. Verificatane l'ohmicità si deduce quindi il valore dalla pendenza della retta ottenuta come regressione lineare sui dati sperimentali (figura 1.34).

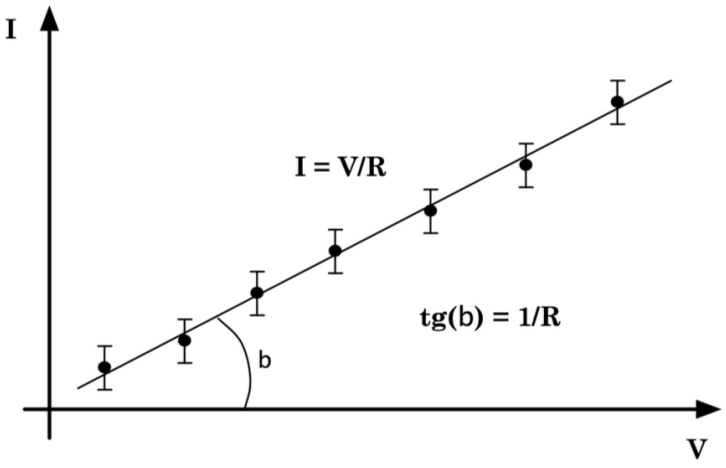


Figura 1.34: Curva volt-amperometrica per una resistenza ohmica

1.7.2 Metodo del "Ponte di Wheatstone"

Lo schema operativo del ponte di Wheatstone è mostrato in figura 1.35.
Per trovare il valore della resistenza incognita R_X si regolano le resistenze R_1 , R_2 , R_3 sino ad azzerare la corrente I_A nell'amperometro A. Si dice allora che il ponte è ,Äúequilibrato,Äù. Se $I_A = 0$ dalla prima regola di Kirchhoof si ha,

$$I_X = I_3 \qquad \text{e,} \qquad I - 1 = I_2 \tag{1.29}$$

e per la legge di Ohm,

$$\mathcal{E} = I_1 (R_1 + R_2) = I_X (R_X + R_3) \tag{1.30}$$

dove $\mathcal{E}$ indica il valore della forza elettromotrice che alimenta il ponte. Applicando la seconda regola di Kirchhoof alla maglia AOO'A' e alla maglia OBB'O' si avrà, poichè I_A è nulla,

$$\begin{aligned} R_1 \cdot I_1 &= I_X \cdot R_X \\ R_2 \cdot I_2 &= I_3 \cdot R_3 \end{aligned} \tag{1.31}$$

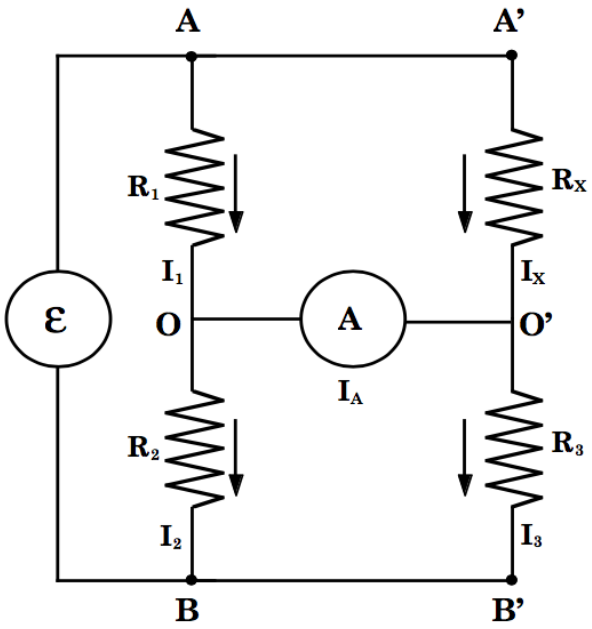


Figura 1.35: Schema circuitale del ponte di Wheatstone

da cui, dividendo membro a membro e ricordando che è $I_1 = I_2$; $I_3 = I_X$, si ricava:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_X}{R_3} \qquad \text{da cui infine,} \qquad R_X = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} \tag{1.32}$$

È dunque chiaro che l'incertezza associabile alla misura di R_X dipende sia dalla sensibilitaà dell'amperometro utilizzato che dall'incertezza associata alla conoscenza di R_1, R_2 ed R_3. Bisognerà inoltre evitare, in fase di misura, il riscaldamento delle resistenze che ne altererebbe il valore.
Un accorgimento che garantisce precisione e rapidità nell'ottenimento dell'equilibrazione del ponte di Wheatstone consiste nel fare in modo che il rapporto R_1/R_2, che all'equilibrio deve coincidere con R_X/R_3 , non sia troppo diverso dall'unità. Così infatti si riducono le incertezze relative su ogni valore di R_1, R_2 ed R_3 dovute ad esempio alle resistenze dei fili di connessione e dei contatti presenti nel circuito a ponte. Ciò si ottiene con un'opportuna scelta di R_3 : quanto più R_3 approssima R_X tanto meglio è garantita la condizione di cui sopra. Ciò richiede ovviamente di disporre di un'ampia scelta di resistenze calibrate da usarsi come R_3.

Sulla natura della forza elettromotrice $\mathcal{E}$ non è stato necessario porre alcuna limitazione. Essa può essere quindi di qualsiasi natura (continua, alternata sinusoidale, di forma qualunque) purchè le resistenze presentino, al passaggio di quel segnale in corrente, sempre lo stesso valore, e non entrino

apprezzabilmente in gioco gli effetti dell'induttanza L^* e della capacità C^* parassite, associate alla resistenza stessa. Infatti, a rigore, ogni elemento indicato con R_1, R_2, R_3, R_X, dovrebbe essere rappresentato come mostrato in figura 1.35.
Una resistenza reale corrisponde quindi all'insieme d'un elemento resistivo puro R, di uno induttivo L^* in serie ad R, e uno capacitivo C^* in parallelo ad entrambi (vedi paragrafo 2.8) Questo fatto, come si vedrà in seguito,

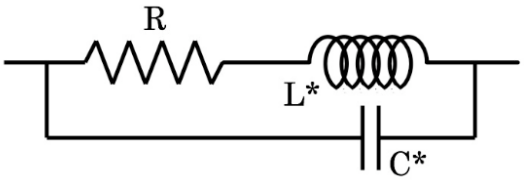


Figura 1.36: Schema circuitale effettivo di una resistenza reale

permette di sfruttare la configurazione a ponte per ottenere anche raffinate misure di capacità, tramite il ponte di Sauty (par. 2.6.2).

1.7.3 Conseguenze delle regole di Kirkhhoof

Come conseguenza della linearità delle regole di Kirkhhoof si hanno le seguenti ulteriori regole di cui si tralascia la dimostrazione.

- Regola di sovrapposizione: la corrente che scorre in ogni ramo di una rete è data dalla sovrapposizione delle correnti che ciascun generatore produrrebbe da solo in quel ramo.

- Regola di reciprocità: se un generatore posto in un dato ramo produce una certa corrente in un altro ramo, allora lo stesso generatore, posto nel secondo ramo, produrrà la stessa corrente nel ramo precedente.

Le regole indicate permettono sostanzialmente di risolvere qualsiasi rete, anche se talvolta con calcoli piuttosto complicati, in relazione alla complessità della rete stessa.
A questo proposito vi sono due ulteriori regole, dovute a Thevenin e Norton e che permettono in alcuni casi di semplificare i calcoli:

- Regola di Thevenin: data una rete comunque complessa, ai soli fini di una utilizzazione al suo esterno a partire da due suoi punti A e B, essa equivale ad un generatore di tensione V_0 in serie ad una resistenza R_0, dove $V_0 = V_A - V_B$, cioè V_0 è la d.d.p. tra i punti A e B quando all'esterno della rete il circuito è aperto e si ha $R_0 = V_0/I_0$, con I_0 pari alla corrente che si avrebbe all'esterno del circuito con una connessione

di corto circuito ($R = 0$) tra A e B.

- Regola di Norton: data una rete comunque complessa, ai soli fini di una utilizzazione al suo esterno a partire da due suoi punti A e B, essa equivale ad un generatore di corrente I_0 in parallelo alla resistenza R_0 , dove $I_0 R_0 = V_0$, con V_0 la d.d.p. del circuito equivalente alla Thevenin.

1.8 Esercitazione 2 _ Verifica delle regole di Kirkhhoof

Con questa esercitazione si vogliono sottoporre a verifica le leggi di Kirkhhoof per le tensioni e le correnti su un certo insieme di circuiti, costituiti sostanzialmente da maglie più o meno complesse di elementi resistivi e generatori.
La strumentazione in uso sarà quindi costituita da generatori di tensione/corrente, cavi di connessione con relativi spinotti e coccodrilli, resistenze (note o incognite), tester.
Disponendo preliminarmente dei valori di f.e.m. erogata e delle resistenze in gioco, è importante dedurre i valori di tensione e corrente che caratterizzano rispettivamente i rami e i nodi del circuito risolvendo le opportune equazioni: si tratta di un utile esercizio di algebra lineare! Successivamente si passerà alla verifica sperimentale.
A tal proposito è importante ricordare che:
- percorrendo una maglia con i puntali del tester, misurando sia tensioni che correnti, è bene non invertire mai l'ordine dei puntali stessi;
- bisogna sempre tener conto di ogni eventuale cambio di fondo-scala effettuato sul tester;
- bisogna tener conto dell'influenza del tester stesso sul circuito, come resistenza aggiuntiva in parallelo o in serie a seconda che lo si utilizzi come voltmetro o amperometro;
- è bene misurare le cadute di potenziale anche ai capi dei fili di connessione, a patto di disporre di un tester di adeguata sensibilità;
- bisogna verificare la stabilità e la bontà dei contatti;
- non bisogna superare le potenze massime assorbibili da ogni elemento del circuito, pena il loro danneggiamento irreversibile.

Spesso si vogliono poter assegnare valori specifici di tensione a punti diversi di un circuito, senza dover ricorrere ad altrettanti diversi generatori. In tal caso è sufficiente disporre di un generatore che eroghi una f.e.m. superiore al massimo valore di tensione richiesto per il circuito in questione e ricorrere a un'opportuna combinazione di resistenze in serie, detta partitore di tensione, per ottenere i valori desiderati. a) In figura 1.37 è riportato un esempio di partitore di tensione. Lo si realizzi praticamente e si misurino direttamente i valori di tensione V_1, V_2, V_3, $\Delta V_1 = V_1 - V_2$, $\Delta V_2 = V_2 - V_3$, $\Delta V_3 = V_3$, per diverse combinazioni di valori della f.e.m. V_0, di R_1, R_2 ed R_3.
Si confrontino i valori misurati con quelli calcolati sulla base dei valori di R_1, R_2 ed R_3 noti tramite il codice cromatico e/o perchè precedentemente misurati ad esempio con metodo voltamperometrico; nel primo caso si verifichi il rispetto o meno delle tolleranze dichiarate.

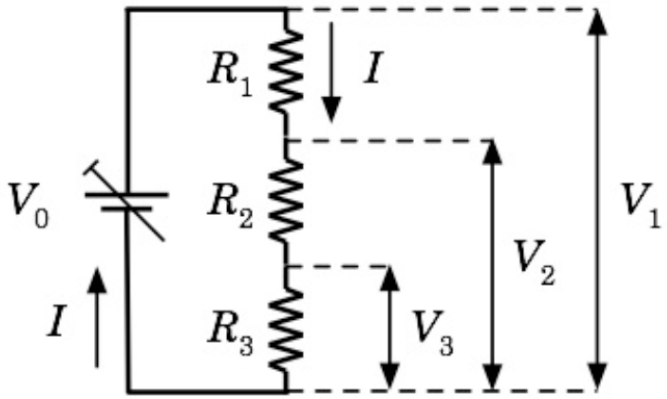


Figura 1.37: Esempio di partitore di tensione

Una volta misurata la corrente I si verifichino anche le relazioni:

$$\begin{aligned}
&V_1 = I\,(R_1 + R_2 + R_3) = IR_1 + IR_2 + IR_3 = \Delta V_1 + V_2 + \Delta V_3 \\
&V_2 = \Delta V_2 + \Delta V_3 \\
&\Delta V_1 = IR_1 = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} R_1 \\
&\Delta V_2 = IR_2 = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} R_2 \\
&\Delta V_3 = V_3 = IR_3 = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3} R_3 \\
&V_2 = IR_1 = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + R_3}\,(R_2 + R_3)
\end{aligned} \tag{1.33}$$

tenendo sempre conto dell'influenza del tester, dei cavi di connessione, dell'incertezza sui valori misurati di R_1, R_2 ed R_3 (o delle tolleranze, se si utilizzano i valori di resistenza dichiarati in base al codice cromatico).
Naturalmente, per il corretto funzionamento degli apparati che saranno alimentati tramite il partitore di tensione, e anche necessario che la corrente erogabile dall'alimentatore ad esso collegato sia almeno pari (meglio maggiore) alla totalità delle correnti assorbite dagli apparati collegati.

b) Similmente a quanto visto per le tensioni, ricorrendo a un'opportuna disposizione di resistenze in parallelo si può ottenere una partizione di correnti. Si consideri ad esempio il circuito di figura 1.38. Per la corrente totale I che scorre nel circuito si ha:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} \qquad \text{con} \qquad R_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \right)^{-1} \qquad \text{da cui} \qquad V = IR_{eq} \tag{1.34}$$

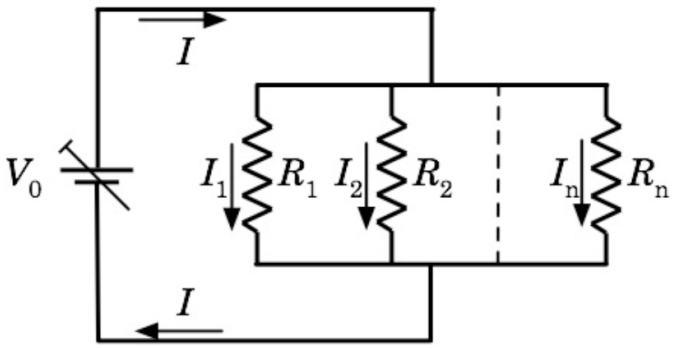


Figura 1.38: Esempio di partitore di corrente

Detta I_j la corrente che scorre nella resistenza R_j del circuito, siha dunque:

$$I_j \;=\; \frac{V}{R_j} \;=\; \frac{IR_{eq}}{R_j} \;=\; \frac{(\sum_{i=1}^{n} 1/R_i)^{-1}}{R_j} \tag{1.35}$$

Scegliendo quindi opportunamente i valori delle resistenze R_j, si può ottenere qualsiasi valore di corrente purchè inferiore ad I.
Osservando quanto ottenuto ora per le correnti e nell'esempio precedente per le tensioni, si vede che moltiplicando i valori di ogni resistenza per uno stesso fattore non si modificano né la partizione della tensione né quella della corrente; si influisce invece sull'assorbimento di potenza da parte delle resistenze presenti nei partitori.

c) Come terzo esempio si considerino i circuiti nelle figure 1.39 (a) e 1.39 (b): È interessante studiare questi circuiti anche dal punto di vista delle loro

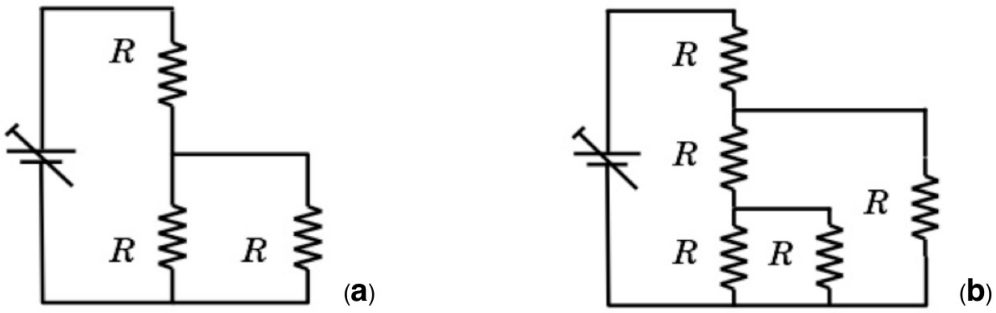


Figura 1.39: Cascate di resistenze

resistenze equivalenti. Dette queste rispettivamente R_{2eq} ed R_{3eq}, si verifichi che:

$$R_{2eq} \;=\; 3R/2 \qquad\qquad R_{3eq} \;=\; 8R/5 \tag{1.36}$$

Si dimostri inoltre che se si conosce $R_{(n)eq}$, allora:

$$R_{(n+1)eq} = \frac{R^2 + 2RR_{(n)eq}}{R + R_{(n)eq}} \tag{1.37}$$

Si calcoli anche il valore limite $R_{(\infty)eq}$.
Mediante l'uso di tester si verifichino altresì le leggi di Kirchhoof per entrambi i circuiti delle figure 1.39 (a) e (b). Sfruttando il metodo volt-amperometrico, si misurino singolarmente gli effettivi valori di tutte le resistenze in gioco e si misurino direttamente anche R_{2eq} ed R_{3eq}, confrontandone quindi i valori misurati con quelli deducibili sostituendo nelle formule teoriche gli effettivi valori misurati di ogni singola resistenza, o i valori desumibili dal codice cromatico. Si tenga sempre opportunamente conto delle incertezze in gioco.
Si valuti se esiste un valore di n oltre il quale, a causa delle incertezze sperimentali, le misure non sono più in grado di distinguere senza ambiguità tra $R_{(n)eq}$ ed $R_{(n+1)eq}$.

d) Come quarto esempio si consideri il circuito tetraedrico in figura, in cui tutte e nove le resistenze hanno lo stesso valore R. Si calcolino e quindi

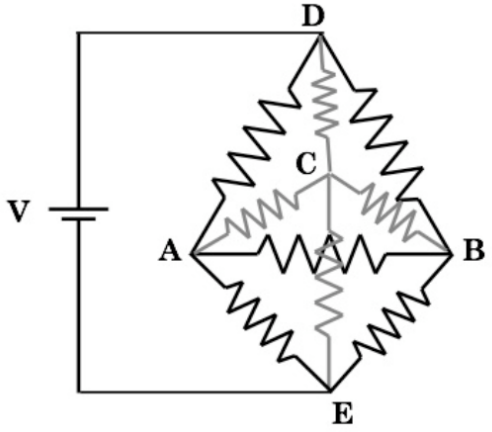


Figura 1.40: Doppio tetraedro di resistenze

si misurino i valori delle tensioni nei punti A, B, C, E.
Si calcolino e si misurino anche le correnti nei rami, DA, DB, DC, AB, BC, CA, AE, BE, CE.
Si valuti la resistenza equivalente fra i punti D ed E e la si confronti col valore misurato.
In tutte le operazioni si tenga sempre conto delle incertezze sperimentali.
Si consideri anche un circuito con 12 resistenze uguali sistemate come i lati di un cubo e si valuti la resistenza equivalente fra due spigoli di una qualunque delle diagonali del cubo. Si verifichi quindi sperimentalmente il risultato

conseguito.
Per affrontare e risolvere questo tipo di problemi è utile considerare le particolari simmetrie dei sistemi in esame!

e) Come ulteriore esempio si consideri il circuito rappresentato nella figura seguente, che contiene più sorgenti di f.e.m.. Il lavoro fatto per spostare

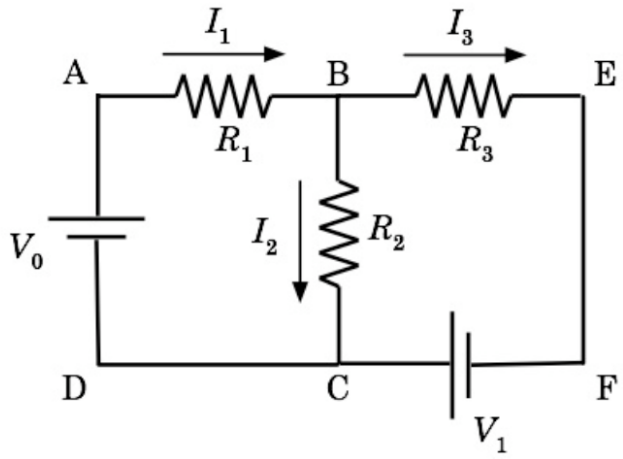


Figura 1.41: Circuito a più maglie con alimentatore

una carica lungo la maglia ABCDA equivale all'energia ceduta dal generatore, quindi la somma delle tensioni relative ad ogni ramo AB, BC, CD, DA, uguaglia la tensione ai capi del generatore.
Dalla legge di Ohm: $\Delta V_{AB} = I_1 R_1$, $\Delta V_{BC} = I_2 R_2$, per cui $V_0 = I_1 R_1 + I_2 R_2$.
Considerazioni analoghe valgono per le due maglie restanti: BEFCB e ABEFCDA.
Si osservi ancora che la carica che entra nel nodo B durante l'arco di tempo Δt è la somma delle cariche provenienti dai tre rami AB, BC e BE e deve essere nulla in virtù della conservazione della carica totale e in quanto non vi è modo di accumularla nel nodo, quindi: $\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 = 0$. Dividendo tutto per Δt si ottiene: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ (la convenzione di segno mostrata in figura indica I_1 entrante nel nodo, I_2 e I_3 uscenti).
Note le tensioni dei generatori si calcolino le correnti:

$$V_0 = I_1 R_1 + I_2 R_2 \qquad \text{maglia ABCDA}$$
$$V_1 = I_3 R_3 - I_2 R_2 \qquad \text{maglia BEFCB}$$
$$V_0 + V_1 = I_1 R_1 + I_3 R_3 \qquad \text{maglia ABEFCDA}$$
$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad \text{nodo B}$$
$$I_2 + I_3 = I_1 \qquad \text{nodo C}$$

Si hanno tre maglie e due nodi in totale per cui si possono scrivere cinque equazioni; ma vi sono soltanto tre variabili indipendenti, quindi tre equazioni linearmente indipendenti che possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con soluzione

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{R_3 (R_1 + R_2) + R_1 R_2} \begin{bmatrix} (R_3 + R_2) V_0 + R_2 V_1 \\ R_3 V_0 - R_1 V_1 \\ R_2 V_0 + V_1 (R_1 + R_2) \end{bmatrix}$$

Si è ipotizzato che i generatori siano ideali, privi cioè di resistenza interna (come si modificherebbero le equazioni se si tenesse conto anche di ciò?).
Supponendo d'aver preventivamente misurato sia i valori delle resistenze che le f.e.m. dei generatori utilizzati, si misurino sul circuito, con un tester, le grandezze calcolate in base alle regole di Kirkhhoof e si confrontino i valori sperimentali con quelli teorici, tenendo conto sia delle incertezze sperimentali che dell'eventuale influenza del tester.
Si cerchi di valutare anche il contributo dovuto alla potenza ceduta per effetto Joule e la sua influenza sui risultati finali.

1.9 Esperienza 1 _ Misura della resistività e del coefficiente termico di un filo conduttore

Scopo di questa esperienza è verificare se la resistività elettrica ρ di un conduttore metallico segue con buona approssimazione la legge fenomenologica (1.17): $\rho = \rho_{20}\,[1 + \alpha \cdot (\vartheta - 20)]$, per temperature ϑ comprese nell'intervallo $0\ ^oC \leq \vartheta \leq 100\ ^oC$.
A tale scopo conviene scegliere un conduttore di forma opportuna, per il quale sia facile esprimere la resistenza elettrica R in funzione degli altri parametri che lo caratterizzano.
Si utilizzi un filo di rame smaltato con vernice isolante, di lunghezza l e sezione retta di forma circolare e diametro D (a meno dello spessore della smaltatura). Detta $S = \pi\,(D/2)^2$ l'area di tale sezione retta, la resistenza R del filo può essere scritta come:

$$R\ = \rho\frac{l}{S}\ =\ \rho\frac{4l}{\pi D^2} \qquad \text{da cui:} \qquad \rho\ = \frac{\pi}{4}\frac{D^2 R}{l}$$

ρ risulta quindi espressa in funzione di quantità misurabili.
Il filo sarà poi inserito, come elemento resistivo, in una maglia contenente un generatore di tensione e un amperometro. Ponendo un voltmetro in parallelo ai capi del filo e agendo sul generatore si potranno effettuare delle misure voltamperometriche allo scopo di costruire la curva tensione- corrente $I - V$ del filo e dedurne di conseguenza la resistenza. Ciò dovrà però essere fatto in condizioni di valori di temperatura ϑ noti, costanti e uniformi per l'intero filo durante ogni set di misure per la costruzione delle curve tensione-corrente $I - V$.
Per rendere più agevole ed efficace l'uniforme termostatazione dell'intero filo conviene avvolgerlo a formare una bobina di dimensioni sufficientemente ridotte da poter essere completamente immersa in un bagno termico. Sarà opportuno inoltre evitare di sovrapporre l'uno all'altro strati successivi di spire di filo, in quanto in tal modo le spire più interne risulterebbero parzialmente isolate dal bagno termico. D'altronde potrebbe essere utile evitare effetti induttivi (ciò nel caso si utilizzasse corrente alternata a bassa frequenza) costruendo la bobina in modo che ogni sua spira percorsa da corrente in un senso, sia il più adiacente possibile ad un'altra sua spira percorsa dalla corrente in senso opposto (paragrafo 2.8).
Bisogna prestare attenzione, nel manipolare il filo e nell'avvolgerlo, a non danneggiarne la smaltatura isolante, infatti la conseguenza potrebbe essere la presenza di cortocircuiti che introdurrebbero un errore sistematico che si rifletterebbe sul dato della lunghezza l del filo stesso.
Anche la misura del diametro effettivo D richiede una certa cura in quanto bisogna prescindere dallo spessore dello strato isolante (un modo potrebbe essere quello di eliminarlo bruciandolo con l'aiuto di un fiammifero e asportandone poi con cura i residui combusti, onde lasciare libero un tratto di filo

di rame nudo ma geometricamente e dimensionalmente indenne).
Alternativamente si potrebbe usare filo non smaltato ma bisognerebbe prestare un'attenzione assoluta nell'evitare cortocircuiti o conduzioni spurie all'interno del liquido di termostatazione. Il diametro del filo potrà quindi essere misurato con un calibro Palmer cinquantesimale. Si veda dunque

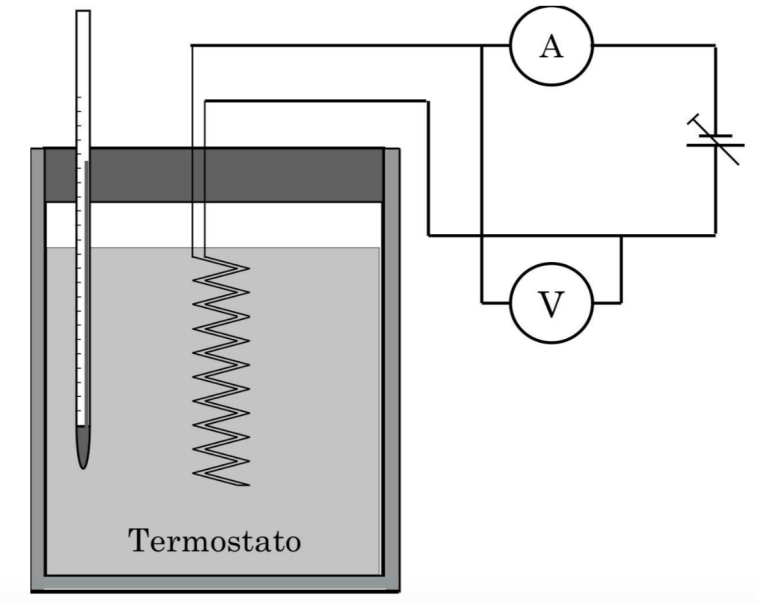


Figura 1.42: Shema della disposizione di misura

l'elenco del materiale necessario per eseguire l'esperienza:

- alcuni metri di filo conduttore a sezione circolare e diametro costante
- un generatore a bassa tensione, regolabile
- un voltmetro e un amperometro
- un calorimetro
- un termometro
- cavi di rame e morsetti per i collegamenti elettrici
- un calibro Palmer
- un metro a nastro
- un tubicino in plastica a sezione circolare

Si proceda quindi realizzando la bobina, eventualmente anti-induttiva, col filo di rame a disposizione e aiutandosi col tubicino in plastica. Si metta a

nudo il metallo dei due estremi liberi del filo della bobina onde permettere la connessione al resto del circuito di misura. Si tenga conto del punto/zona di contatto di tali capi di filo col resto del circuito onde evitare errori sistematici sull'effettivo valore della lunghezza l del filo.
A questo punto si immerga la bobina nel bagno termico e si attenda un tempo sufficiente alla sua termostatazione (come può essere controllata l'avvenuta termostatazione basandosi su misure voltamperometriche?).
Si effettuino le misure necessarie a costruire una curva $I - V$ mantenendo opportunamente sotto controllo le modificazioni termiche che potrebbero insorgere anche per effetto Joule e tenendo anche conto delle posizioni in cui è attuata la contattazione con il voltmetro.
Si iteri dunque la sequenza con nuovi bagni termici a temperature diverse.
Si dispone a questo punto di un certo numero di coppie di valori tensione-corrente $[V_{\vartheta_i,j} \pm \Delta(V_{\vartheta_i,j}); I_{\vartheta_i,j} \pm \Delta(I_{\vartheta_i,j})]$, con le relative incertezze strumentali associate, corrispondente ognuno a un diverso e misurato valore $\vartheta_i \pm \Delta(\vartheta_i)$ di temperatura. L'indice j corre sulle diverse misure per ogni singola curva $I - V$.

Effettuando, per queste coppie di valori, regressioni lineari pesate con la

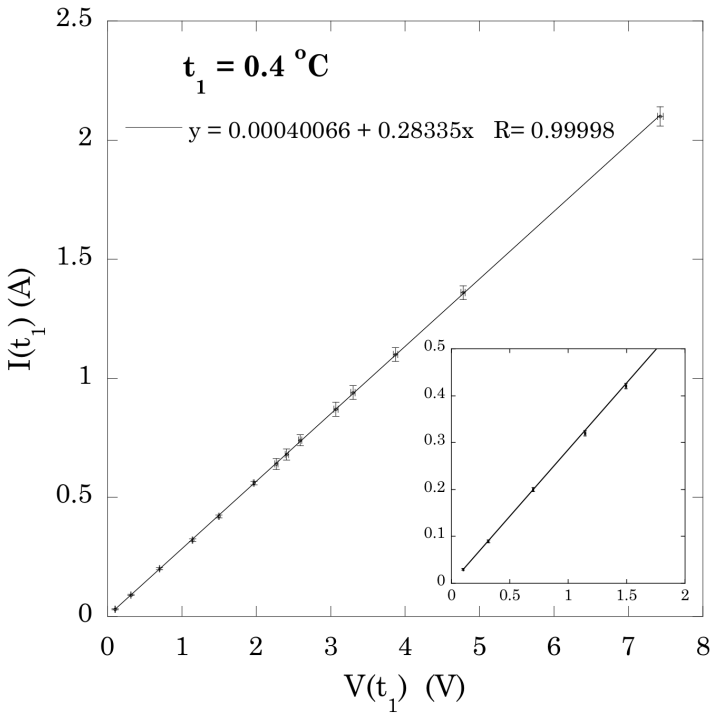


Figura 1.43: Le incertezze indicate sono quelle strumentali divise per $\sqrt{3}$

funzione $I(V) = I(0) + \sigma(\vartheta_i) V$, si ottiene quanto ad esempio mostrato per due diversi valori delle temperature nelle figure 1.43 e 1.44 per un par-

ticolare caso concreto in cui $l = 10.00 \pm 0.01$ m, $D = (2.5 \pm 0.1) \times 10^{-4}$ m. Supponendo la completa ohmicità della bobina di filo in esame si ha:

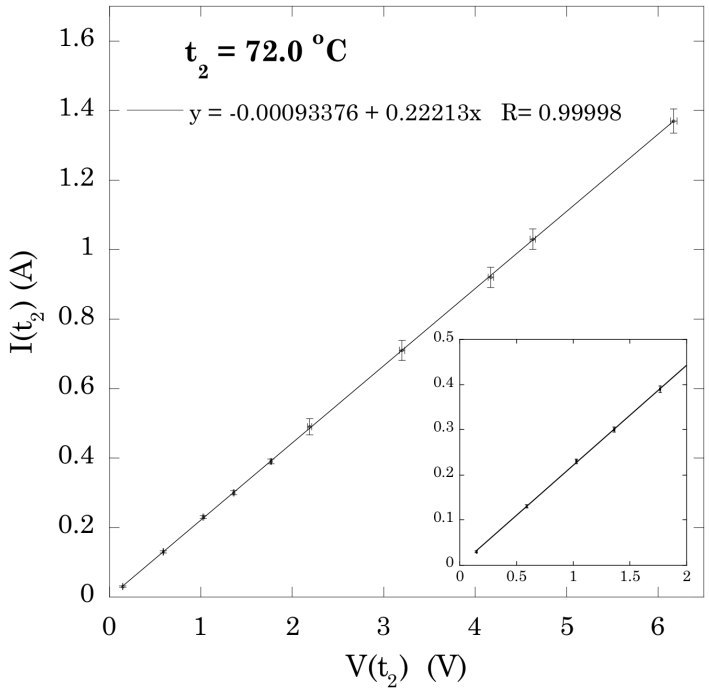


Figura 1.44: Le incertezze indicate sono quelle strumentali divise per $\sqrt{3}$

$R(\vartheta_i) = 1/\sigma(\vartheta_i)$, con $R(\vartheta_i)$ la resistenza del filo alla temperatura ϑ_i. L'incertezza sul valore di $R(\vartheta_i)$ è dunque

$$\delta R(\vartheta_i) = \left[\frac{\delta\sigma(\vartheta_i)}{\sigma(\vartheta_i)}\right] R(\vartheta_i) = \frac{\delta\sigma(\vartheta_i)}{\sigma^2(\vartheta_i)}$$

Nella tabella seguente sono riportati i valori di $R(\vartheta_i)$ per sette valori di temperatura

ϑ °C	$\delta\vartheta$ °C	R (Ω)	δR (Ω)
0.04	0.01	3.53	0.06
12.0	0.1	3.73	0.08
20.5	0.1	3.77	0.08
22.8	0.2	3.85	0.13
39.0	0.2	4.03	0.14
59.4	0.3	4.35	0.12
72.0	0.4	4.50	0.13

Si possono quindi ora calcolare i corrispondenti valori di $\rho(\vartheta_i)$ e dell'incertezza

$$\delta\rho(\vartheta_i) = \left[\left(\frac{2\Delta D}{D\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\delta R}{R}\right)^2\right]^{1/2} \frac{\pi D^2 R}{4l}$$

associata ad ognuno di essi, sostituendo quanto trovato per $R(\vartheta_i)$ e sommando in quadratura, data la mutua indipendenza dei vari termini

ϑ ^{o}C	$\delta\vartheta$ ^{o}C	$\rho(\vartheta_i)$ $(\Omega \times m)$	$\delta\rho(\vartheta_i)$ $(\Omega \times m)$
0.04	0.01	1.732×10^{-8}	0.09×10^{-8}
0.04	0.01	1.831×10^{-8}	0.09×10^{-8}
12.0	0.1	1.851×10^{-8}	0.09×10^{-8}
20.5	0.1	1.89×10^{-8}	0.10×10^{-8}
22.8	0.2	1.99×10^{-8}	0.11×10^{-8}
39.0	0.2	2.13×10^{-8}	0.11×10^{-8}
59.4	0.3	2.21×10^{-8}	0.12×10^{-8}

Si dispone ora di un set di dati costituito dalle corrispondenti coppie di valori $[\vartheta_i, \rho(\vartheta_i)]$ con le relative incertezze associate, utilizzabili per verificare il grado di attendibilità della relazione (1.17).

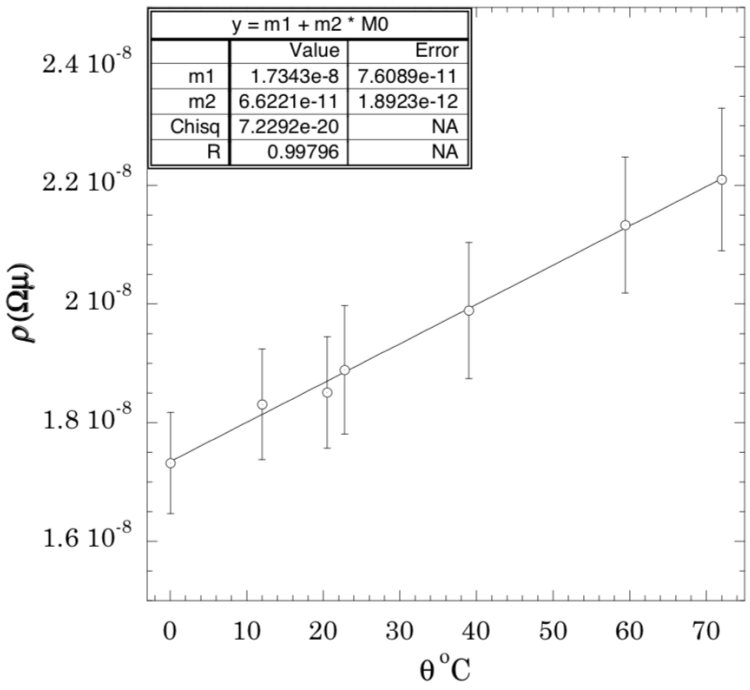


Figura 1.45:

$$\rho_{20} = 1.73 \times 10^{-8} \pm 0.08 \times 10^{-8}\ \Omega \times \mathrm{m}$$
$$\alpha = 3.8 \times 10^{-3} \pm 1.3 \times 10^{-3}\ {}^{o}\mathrm{C}^{-1}$$

Entro una deviazione standard, entrambi i risultati sperimentali sono in accordo con i risultati accettati per il rame

$$\rho_{20} = 1.68 \times 10^{-8}\ \Omega \times \mathrm{m}$$
$$\alpha = 4.2 \times 10^{-3}\ {}^{o}\mathrm{C}^{-1}$$

L'incertezza associata alla resistività permette inoltre di identificarla univocamente, entro una deviazione standard, rispetto a quelle di altri materiali; così non è per il coefficiente α che è stato determinato con un'incertezza relativa non trascurabile: $\delta\alpha/\alpha = 0.34$.

Suggerimenti:

1. Estrapolare alla temperatura dell'azoto liquido in ebollizione a una atmosfera di pressione ($\vartheta \simeq -199\ {}^{o}\mathrm{C}$), confrontare con l'eventuale curva $I - V$ ottenuta a tale temperatura e trarne le conseguenze.

2. Discutere l'utilità di considerare il punto $(0, 0)$ come appartenente ad ogni curva $I - V$, anche per valutare la presenza di eventuali sistematicità.

3. Tener conto anche del contributo sistematico dovuto alla variazione di l e D con la temperatura $x(\vartheta \pm \delta\vartheta) \simeq x(\vartheta)(1 \pm \lambda \cdot \delta\vartheta)$, con λ coefficiente di dilatazione termica lineare, e discuterne le conseguenze.

4. Indicare su quali termini bisognerebbe agire e come, per migliorare sensibilmente la misura (D, R...).

1.10 Esperienza 2 _ Misura della curva caratteristica di una lampadina a incandescenza

La legge di Ohm è un caso particolare di caratteristica tensione-corrente, ovvero della relazione che intercorre fra la tensione ai capi di un certo componente elettrico e la corrente che contemporaneamente scorre in esso. Come vedremo, una lampadina a incandescenza, nel suo normale regime di funzionamento, non obbedisce alla legge di Ohm.
Ci si propone quindi di misurare la caratteristica tensione-corrente per una lampadina a incandescenza a bassa tensione, analizzando poi entro quali limiti essa segua la legge di Ohm.
Dalla caratteristica tensione-corrente si dedurranno quindi anche la *resistenza equivalente* e la *resistenza dinamica* della lampadina a incandescenza.

_ Materiale occorrente:

- una lampadina a incandescenza a bassa tensione
- un portalampada
- una scatoletta rigida a tenuta di luce
- un fotodiodo con segnale amplificato (Appendice 3)
- nastro adesivo nero opaco
- un generatore di c.c. a bassa tensione, regolabile
- due voltmetri e un amperometro
- filo di rame e morsetti per i collegamenti elettrici

_ Montaggio dell'esperienza
Si realizzi il circuito mostrato in figura

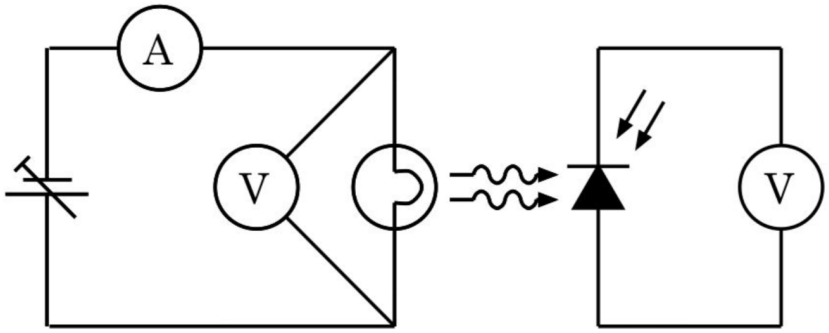


Figura 1.46:

_ Esecuzione della misura
La curva caratteristica tensione-corrente per una resistenza che obbedisca alla legge di Ohm ha l'andamento mostrato in Fig 1.47. Per caratterizzare

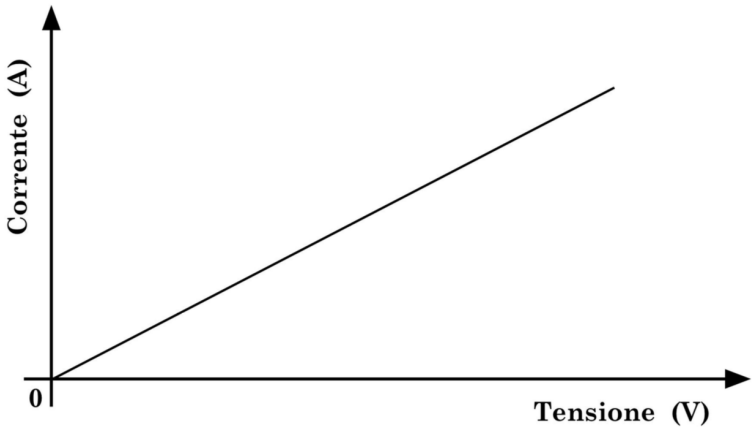


Figura 1.47:

la lampadina bisogna dunque costruire la sua curva tensione-corrente, bisogna cioè misurare la corrente che la attraversa in funzione della tensione applicata ai suoi terminali.
Siccome oltretutto la lampadina è un oggetto atto ad emettere luce, può essere interessante studiare come la curva caratteristica tensione-corrente dipenda dalla quantità di luce emessa dalla lampadina (la luce emessa è chiaramente funzione dell'energia rilasciata nel filamento della lampadina dalla corrente elettrica che l'attraversa, oltre che della composizione, forma e dimensioni del filamento e del suo potere emissivo.
Si monti quindi il fotodiodo su un lato aperto della scatola a tenuta di luce, entro la quale sarà stata sistemata la lampadina alloggiata nel portalampada, e con il nastro adesivo nero si fissi tutto avendo cura di oscurare in modo che il fotodiodo non possa vedere altra luce che quella eventualmente prodotta dalla lampadina.
A questo punto si legga l'uscita in corrente (tensione) del fotodiodo che corrisponderà al suo segnale in assenza di luce.
Si proceda quindi ad alimentare con tensioni via via crescenti la lampadina, effettuando di volta in volta la lettura della sua tensione di alimentazione, della corrente che l'attraversa e del segnale in corrente (tensione) corrispondentemente fornito dal fotodiodo.

Prima di procedere è bene avere già un'idea di massima della progressione con cui fornire gli incrementi di tensione, e ciò può essere dedotto dalla conoscenza della tensione operativa per la lampadina, fornita dal costruttore, e dalla conoscenza della tensione di bruciamento della lampadina. Il

secondo dato può chiaramente essere ottenuto solo in modo distruttivo, dopodichè la lampadina in questione non è più utilizzabile. Conviene quindi supporre che le lampadine fornite dal costruttore come equivalenti si somiglino effettivamente al punto da avere circa lo stesso valore di tensione di bruciamento, sacrificare dunque alcune lampadine per valutarne la tensione di bruciamento e considerare il valore medio che così se ne deduce per quel tipo di lampadine, ai fini di una predeterminazione del numero e dell'entità degli incrementi di tensione da apportare per l'effettuazione della misura.
Ovviamente l'indicazione sul numero minimo di punti sperimentali necessari ad una adeguata caratterizzazione della lampadina verrà in prima istanza da un confronto fra considerazioni statistiche e risoluzioni degli strumenti di misura, unitamente all'andamento che si comincia a individuare per la curva $I(V)$, man mano che si raccolgono i dati.
Una accortezza da mantenere è quella di procedere all'inizio con incrementi di tensione minimi, compatibili con i minori valori possibili fornibili dall'alimentatore, tenendo nel contempo sotto stretto controllo la risposta sia in V che in I del fotodiodo. Ciò allo scopo di evidenziare l'eventuale dipendenza della curva caratteristica tensione-corrente dalla graduale accensione della lampadina. Non appena si nota che la risposta del fotodiodo comincia a saturare, questo va spento e fisicamente sconnesso dalla lampadina, assieme alla scatoletta a tenuta di luce. Il calore prodotto e la grande intensità luminosa potrebbero, infatti, danneggiare il fotodiodo.
Da qui in poi si può quindi procedere con successivi incrementi di tensione secondo quanto predeterminato in base alle considerazioni suggerite dalla conoscenza del valor medio della tensione di bruciamento.
È bene che la lampadina utilizzata per la misura della caratteristica tensione-corrente non venga sottoposta ad incrementi e successivi decrementi di tensione, soprattutto quando la tensione raggiunta è prossima o superiore a quella operativa consigliata dal costruttore: la sua struttura potrebbe infatti subire modificazioni tali che la curva caratteristica ne risulterebbe irreversibilmente alterata rispetto a quanto si otterrebbe con una progressione unica di tensione da zero Volt fino al valore di bruciamento.
Un'ulteriore accortezza da utilizzare, specie quando le tensioni applicate sono maggiori di quella operativa, è di procedere con una certa solerzia alle misure impiegando possibilmente tempi comparabili per ogni incremento di tensione; al crescere della temperatura del filamento infatti, quest'ultimo comincia ad evaporare e quindi modifica col tempo la sua forma e dimensioni, nonchè le sue caratteristiche resistive.

Come si spiega l'annerimento della superficie interna del vetro di lampadine vecchie? Perchè esso è presente in particolare in certe zone della superficie interna dell'ampolla?

Potrebbe avere senso effettuare un controllo della temperatura della lampa-

dina (o del suo filamento) in funzione delle diverse tensioni applicate? Come lo si potrebbe attuare?

_ Analisi dei dati raccolti
I dati raccolti costituiranno una tabella a quattro colonne relative rispettivamente ai valori di tensione V e corrente I letti sul circuito con la lampadina, e ai valori di corrente (tensione) corrispondentemente letti dal fotodiodo (finchè questo è utilizzato). Riportando in un grafico le coppie di valori (V, I) per la lampadina esaminata se ne ottiene la caratteristica tensione-corrente. In figura 1.48 è riportato un tipico esempio, evidenziando la zona a più bassa tensione. La si studi e si provi a individuare l'eventuale presenza di zone a

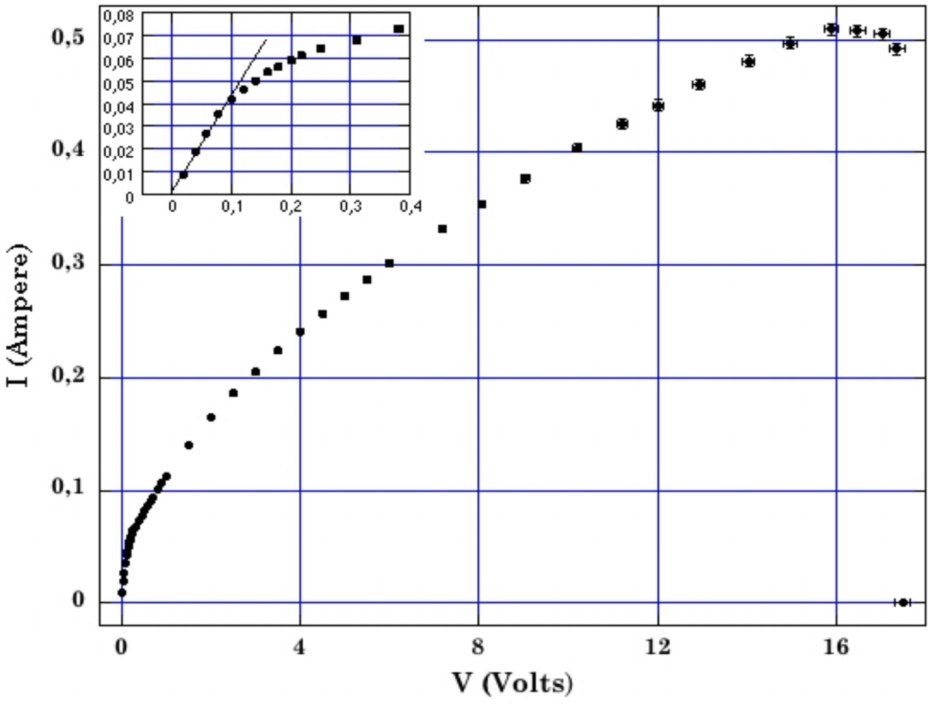


Figura 1.48:

diverso regime di funzionamento per la lampadina , correlandole anche con quanto fornito in proposito dal fotodiodo.
Si cerchi anche di capire, sulla base di ragionevoli considerazioni in merito ai fenomeni che coinvolgono il filamento durante tutte le fasi dell'esperimento, se vi sono delle funzioni analitiche semplici e fisicamente plausibili che possono approssimarne l'andamento trovato nella sua globalità, o in sue zone diverse, e se ne cerchi l'eventuale intervallo di raccordo.
Se si unisce il generico punto (V_i, I_i) del grafico tensione-corrente con l'origine $(V = 0, I = 0)$, si ottiene un segmento che dovrebbe rappresentare la curva caratteristica della lampadina, se questa fosse un elemento circuitale

che rispetta la legge di Ohm con valore della resistenza pari ad $R_i = V_i/I_i$. Facendo lo stesso per ogni altro punto del grafico si può costruire l'andamento della cosiddetta resistenza equivalente per la lampadina, in funzione della tensione applicata; se ne discuta il significato.
Si può anche definire la resistenza dinamica R_d di un componente circuitale come

$$R_d \;=\; \mathrm{d}V/\mathrm{d}I$$

Si proceda quindi a valutare e graficare opportunamente la resistenza dinamica della lampadina analizzata, sia come rapporto incrementale che come derivata dell'eventuale funzione analitica approssimante la curva caratteristica. Se si sono utilizzate differenti funzioni analitiche approssimanti in diversi intervalli di tensione, se ne tenga conto. Si rammenti che i raccordi analitici tra andamenti diversi in intervalli contigui si possono ottenere imponendo la continuitelle funzioni e delle loro derivate prime nei punti di raccordo.
Cosa si può dire, sulla base dei risultati ottenuti, circa il comportamento della lampadina in funzione della sua emissione luminosa e del suo approssimarsi al punto di bruciamento? Una migliore analisi di quest'ultimo potrebbe richiedere un infittimento delle misure in prossimità della presunta tensione di bruciamento, la cui attuazione è però fuori dalla portata degli strumenti disponibili nel laboratorio didattico. È significativa, ai fini della misura, la perturbazione dovuta all'introduzione del voltmetro in parallelo alla lampadina?

_ Addendum
Osservando il tipico grafico (I, V) per una lampadina sottoposta all'intervallo di tensioni da 0 V sino al punto di bruciamento, si nota che esso può essere grosso modo suddiviso in tre zone: la prima, in cui la lampadina non emette ancora luce percepibile dal fotodiodo e che sembra seguire un andamento lineare crescente quasi ohmico; la seconda, estesa per la gran parte dell'intervallo di tensioni applicate a partire dai valori ai quali il fotodiodo comincia a rilevare luce emessa dalla lampadina, con un andamento monotono crescente ma meno ripido di quello rettilineo; la terza, eventualmente caratterizzata da fluttuazioni e che diviene rapidamente decrescente in prossimità del punto di bruciamento del filamento. Un più attento esame evidenzia come la prima zona sia caratterizzata da un regime transiente dal comportamento quasi ohmico a quello tipico della seconda zona.
È interessante analizzare in particolare la seconda zona: si ricordi che la resistività ρ di un conduttore metallico dipende dalla temperatura di quest'ultimo secondo una legge del tipo

$$\rho \propto \mu T^{\eta} \qquad \text{e quindi anche} \qquad R = \frac{V}{I} \propto T^{\eta}$$

con η costante caratteristica del tipo di metallo. Si ricordi anche la legge di Stefan-Boltzmann

$$W \;=\; e\sigma A\left(T^4 - T_0^4\right)$$

per la potenza W irradiata, con e emissività del materiale, σ costante di Stefan-Boltzmann, A superficie emittente, T temperatura del conduttore e T_0 temperatura ambiente da cui, per $T \gg T_0$, segue $W \propto T^4$.
Dalle leggi di Ohm e Joule si ha

$$R \;=\; V/I \;\propto T^{\eta} \qquad \text{e} \qquad W \;=\; V\,I \propto T^4$$

da cui infine si ottiene

$$I \;\propto\; V^{4-\eta/4+\eta}$$

Per descrivere l'andamento della curva caratteristica nella seconda zona si potrà quindi utilizzare una legge della forma $I \;=\; kV^{\beta}$, dove k e β sono parametri da determinare tramite best-fit sui dati.

1.11 Il diodo: generalità sui semiconduttori

I semiconduttori sono materiali che a temperatura ordinaria (300 ^{o}K) hanno una conduttività inferiore a quella dei conduttori, ma superiore a quella degli isolanti. A differenza di quanto avviene nei conduttori, nei semiconduttori la conduttività aumenta all'aumentare della temperatura. Le caratteristiche indicate si spiegano tenendo presente il tipo di legame cui gli elettroni sono sottoposti.
In un conduttore vi sono circa 10^{28} elettroni liberi (di conduzione) per m^3, pressochè indipendentemente dalla temperatura. Questi sono in continuo stato d'agitazione termica e possono muoversi derivando sotto l'effetto di campi elettrici, dando così luogo a conduzione. L'agitazione termica cresce con la temperatura e ciò ostacola il loro moto di deriva riducendo la conduttività elettrica (formula 1.17).
Nei semiconduttori gli elettroni di valenza sono legati molto debolmente (silicio e germanio sono tetravalenti). A temperature basse essi si comportano alla stregua di isolanti, ma già a temperature ordinarie l'energia termica in gioco è sufficiente a rompere legami favorendo la conduzione elettrica (l'energia necessaria a liberare un elettrone rompendo un legame è di 0.75 eV nel germanio e di 1.12 eV nel silicio; per confronto in un materiale isolante sono necessari circa 10 eV). Il numero degli elettroni liberi cresce esponenzialmente con la temperatura e quindi anche la conduttività (nel germanio circa il 5% per grado).
Bisogna inoltre tener presente che nei semiconduttori la conduzione è un processo che non coinvolge solamente gli elettroni, ma anche le cosiddette lacune, ovvero i "buchi" lasciati nel reticolo cristallino dagli elettroni che rotto il legame, si sono staccati dagli atomi cui appartenevano. La lacuna può infatti essere riempita da un elettrone di un atomo adiacente, dando cosi luogo ad una nuova lacuna traslata; questo processo può essere indirizzato da un campo elettrico che determina lo spostamento della lacuna in un verso preferenziale, che è opposto a quello degli elettroni.
Quello ora descritto si dice semiconduttore intrinseco e a temperatura ordinaria presenta valori di resistività molto diversi a seconda del materiale: 0.46 $\Omega \times$ m per il germanio e 2.5 K$\Omega \times$ m per il silicio puro.

Il semiconduttore intrinseco svolge, nei dispositivi a semiconduttore, il ruolo che nei tubi elettronici svolge lo spazio vuoto, ovvero quello di mezzo in cui si muovono le cariche.
Aggiungendo a un semiconduttore intrinseco tetravalente piccolissime dosi di impurità (drogaggio) pentavalente (antimonio, fosforo, arsenico), dette donatori o di tipo n, gli atomi di queste si inseriscono nel reticolo utilizzando quattro dei loro elettroni di valenza per formare legami covalenti. Il quinto elettrone resta legato all'atomo d'origine con un'energia molto piccola, dell'ordine di 0.01 eV, e a temperatura ordinaria può considerarsi libero.

Aggiungendo invece ad un semiconduttore intrinseco tetravalente piccolissime dosi di impurità trivalente (boro, gallio, indio), dette accettori o di tipo p, gli atomi di queste si inseriscono nel reticolo completando solamente tre legami covalenti e generando la mancanza di un elettrone, ovvero una lacuna. Anche l'energia necessaria allo spostamento delle lacune è molto piccola cosicché a temperatura ordinaria le lacune sono in gran parte libere.

1.11.1 La giunzione p-n

La giunzione p-n è costituita da un cristallo semiconduttore drogato con impurità p da un lato ed n dal lato opposto (figura 1.43a). Gli ioni donatori

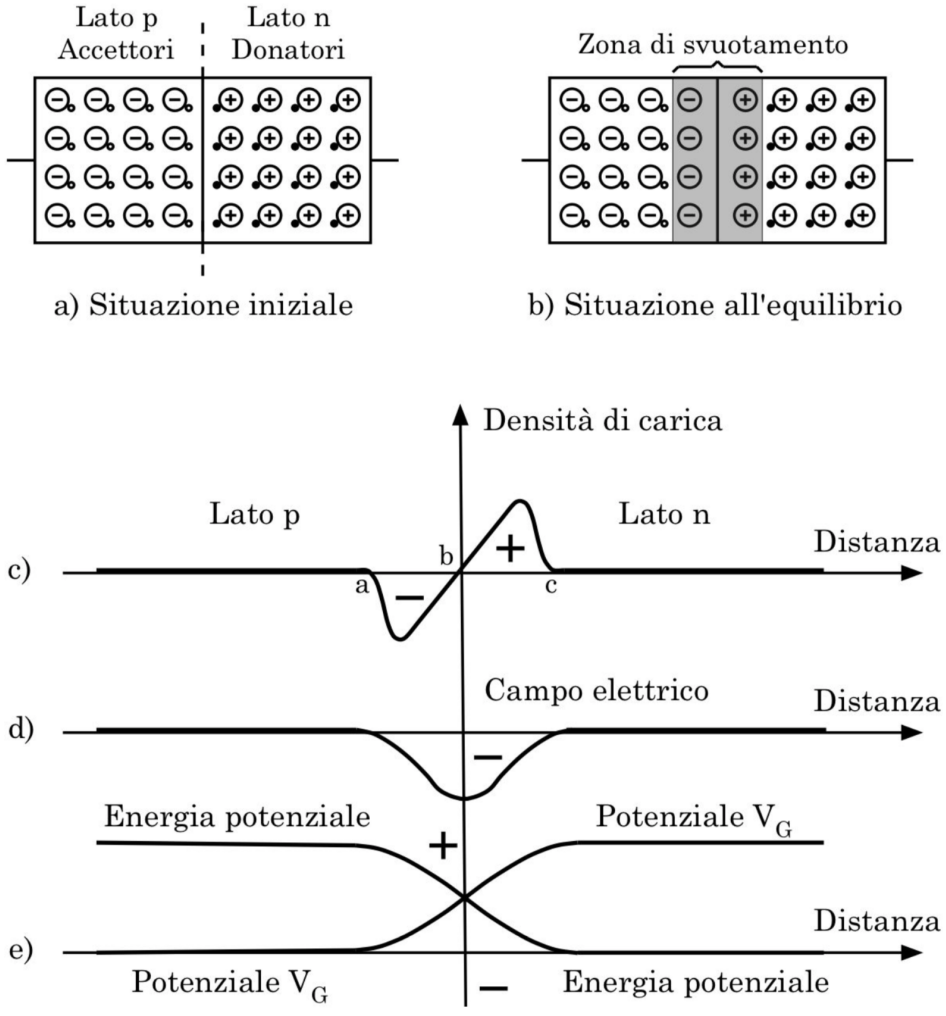


Figura 1.49:

sono positivi, avendo liberato un elettrone, gli accettori sono invece negativi,

avendone acquisito uno. A causa delle impurità quindi, nel lato p vi sono lacune libere e nel lato n elettroni liberi; a ciò si aggiunge un certo numero di lacune ed elettroni termici provenienti dal semiconduttore di supporto. Lato p ed n presentano quindi cariche libere di entrambi i segni, ma da un lato prevalgono quelle di un segno e dall'altro quelle di segno opposto. Le cariche prevalenti da ogni lato vengono dette *di maggioranza* , quelle minoritarie vengono dette *di minoranza*. Queste ultime, che sono uniformemente distribuite nell'intero semiconduttore, sono in equilibrio.

Al momento della realizzazione della giunzione, gli eccessi iniziali di elettroni e lacune determinano invece una corrente transiente diffusiva di elettroni verso il lato p e viceversa per le lacune, che prosegue sino a che la d.d.p. che si instaura non bilancia il tutto in una condizione di equilibrio dinamico, con un residuo e costante scambio di cariche attraverso la giunzione, in prossimità della quale si viene quindi a creare una zona pressochè priva di cariche libere, detta zona di transizione, o di carica spaziale o di svuotamento, con spessori dell'ordine di 10^{-6} m, cui contribuisce maggiormente il materiale di tipo p. Nella zona di svuotamento restano le cariche fisse dovute agli ioni, positive sul lato n e negative sul lato p (figura 1.43b,c).
Dopo questa fase transiente iniziale, se il semiconduttore è isolato e non gli è applicata alcuna d.d.p. dall'esterno, non scorre in esso alcuna corrente netta.
Dette $\rho_{n(n)}$ e $\rho_{n(p)}$, le densità di elettroni rispettivamente ai confini delle zone n e p della giunzione, e $\rho_{p(n)}$, $\rho_{p(p)}$ le corrispondenti densità di lacune, si trova che all'equilibrio:

$$\rho_{n(p)} \;=\; \rho_{n(n)} e^{-eV_g/kT} \qquad , \qquad \rho_{p(n)} \;=\; \rho_{p(p)} e^{-eV_g/kT} \tag{1.38}$$

dove e è la carica elementare ($e \approx 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb), V_G è il potenziale di gap della giunzione ($V_G = 0.785$ V per il germanio, $V_G = 1.21$ V per il silicio), k è la costante di Boltzmann $\left(k \approx 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J} \times \mathrm{K}^{-1}\right)$, T è la temperatura assoluta.
Si ottiene quindi per la corrente totale all'equilibrio dovuta agli elettroni

$$I^{(-)}_{tot} \;=\; I^{(-)}_{n\to p} - I^{(-)}_{p\to n} \;\propto\; \rho_{n(n)} e^{-eV_G/kT} - \rho_{n(p)} \;=\; 0$$

e similmente per quella dovuta alle lacune

$$I^{(+)}_{tot} \;=\; I^{(+)}_{n\to p} - I^{(+)}_{p\to n} \;\propto\; \rho_{p(n)} - \rho_{p(p)} e^{-eV_G/kT} \;=\; 0$$

Se si applica alla giunzione una tensione con **polarità inversa** (figura 1.44a), ovvero positiva al lato n rispetto al lato p, si estraggono lacune dal lato p ed elettroni dal lato n determinando un ampliamento dell'estensione della zona di svuotamento. Il valore della barriera di potenziale aumenterà conseguentemente fino a bilanciare l'effetto della tensione applicata

dall'esterno, e non si avrà l'insorgenza di conduzione per quanto concerne le cariche di maggioranza, ma solo un loro temporaneo riassestamento. Le cariche di minoranza (elettroni nel lato p e lacune nel lato n), la cui entità dipende dalla temperatura, trovano le condizioni della barriera di potenziale ora favorevoli al loro passaggio quindi attraversano la giunzione dando luogo a una debole corrente I_0 detta *corrente inversa di saturazione*, sostanzialmente indipendente dal valore della tensione applicata ed espressa da:

$$I_0 \;=\; KT^m e^{-eV_G/kT} \tag{1.39}$$

con $K = \text{cost.}$, $m = 2$ per il germanio ed $m = 1.5$ per il silicio. Applicando

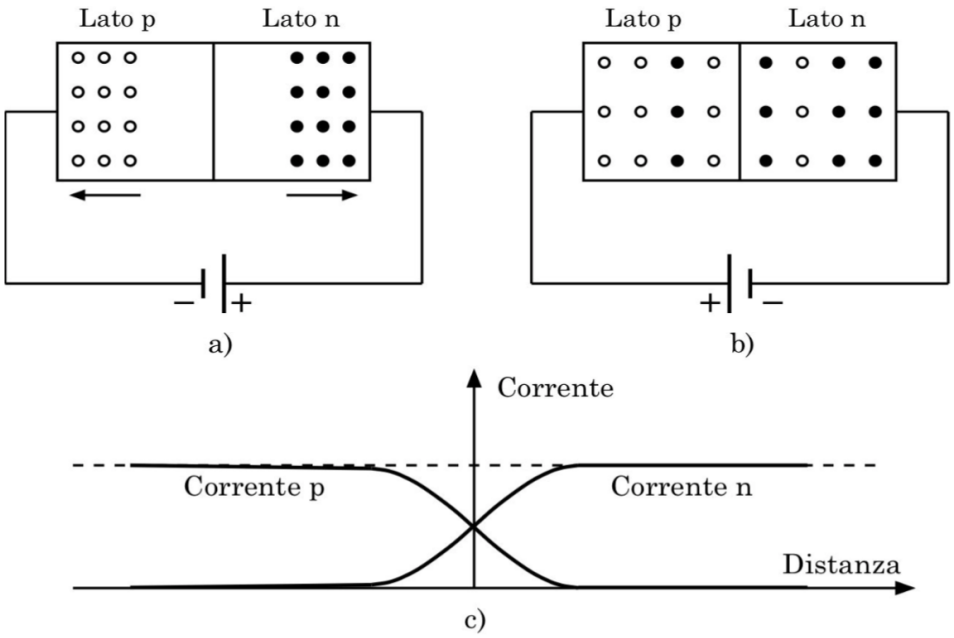


Figura 1.50:

invece alla giunzione una tensione V con polarità diretta (figura 1.44b) si riduce il valore della barriera di potenziale in prossimità della giunzione favorendone il passaggio da parte dei portatori di maggioranza e determinando l'insorgenza di una corrente netta rilevante. All'interno della giunzione lacune ed elettroni si intersecano e si neutralizzano gradatamente: la corrente risulta costituita all'inizio della zona p da lacune che si dirigono verso la zona n; nella zona di giunzione le lacune scompaiono a poco a poco e la corrente corrispondente diminuisce (figura 1.44c) mentre insorge una corrente concorde, ma dovuta ad elettroni che si dirigono verso la zona p, che cresce gradualmente in modo da mantenere costante la corrente totale; nella zona n la corrente è costituita esclusivamente da elettroni.

In questo caso si ottiene quindi, per la corrente totale dovuta agli elettroni

$$I_{tot}^{(-)} = I_{n\to p}^{(-)} - I_{p\to n}^{(-)} \propto \rho_{n(n)} e^{-e(V_G-V)/kT} - \rho_{n(p)} =$$
$$= \rho_{n(n)} e^{-e(V_G-V)/kT} - \rho_{n(n)} e^{-eV_G/kT} = \rho_{n(n)} e^{-eV_G/kT} \left(e^{eV/kT} - 1\right)$$

e similmente per quella $I_{tot}^{(+)}$ dovuta alle lacune. Per la corrente totale che attraversa la giunzione polarizzata direttamente si ottiene quindi

$$I_{tot} = I_{tot}^{(-)} + I_{tot}^{(+)} = I_0 \left(e^{eV/kT} - 1\right) \tag{1.40}$$

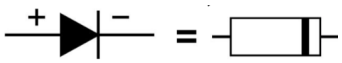
detta legge di conduzione di una giunzione p-n ideale.

1.11.2 Il diodo a semiconduttore (a giunzione)

Per quanto detto sopra la giunzione p-n è una struttura che presenta una forte diversitaà di conduzione nei due sensi e ciò permette di utilizzarla come diodo[9].
Il diodo semiconduttore si presenta come un dispositivo elettronico a due terminali, il cui simbolo circuitale è

Esso è dunque un buon conduttore quando la sua polarizzazione è del tipo

ovvero diretta.
Un diodo polarizzato inversamente, data la particolare struttura della sua distribuzione di carica, può essere usato anche come condensatore a capacità variabile in funzione della tensione (per i condensatori si veda il par. 2.8), e in tal caso è detto diodo vario-cap (Appendice F).
Esteriormente i diodi si presentano solitamente come cilindretti con due terminali, e il terminale negativo è identificato da una strisciolina



Il diodo semiconduttore ideale ha una caratteristica tensione-corrente non

[9] I primi tipi di diodo furono realizzati sfruttando un altro fenomeno fisico, legato all'emissione termoionica in tubi a vuoto, le cosiddette "valvole". Per una concisa presentazione del loro principio di funzionamento si veda l'Appendice 5 _ Diodo a valvola termoionica.

lineare espressa dalla legge di conduzione di una giunzione p-n ideale. Le equazioni di Kirchhoof per circuiti che contengono diodi semiconduttori sono dunque equazioni non lineari, spesso difficili da analizzare.
I circuiti contenenti un solo elemento non lineare possono essere analizzati grazie al metodo della retta di carico.
Per il caso di un circuito costituito ad esempio da un diodo e due resistenze, come mostrato in figura 1.45, detto rettificatore a semionda (si veda l'Esperienza 11),

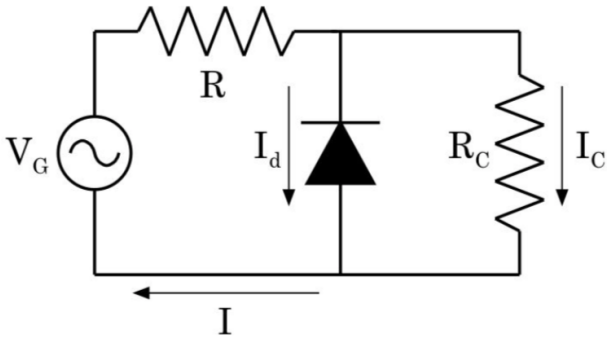


Figura 1.51: Rettificatore a semionda

il sistema completo di equazioni di Kirchhoof è dato da:

$$\begin{cases} V_G &= IR + V_d \\ V_d &= I_C R_C \\ I &= I_d + I_C \\ V_d &= V_d(I_d) \end{cases} \tag{1.41}$$

che combinando le prime tre si riduce alla coppia di equazioni:

$$\begin{cases} V_G &= I_d R + V_d\,(1 + R/R_C) \\ V_d &= V_d(I_d) \end{cases} \tag{1.42}$$

La prima rappresenta una retta nel piano (V_d, I_d), mentre la seconda non è altro che l'inverso della curva caratteristica $I_d = I_d(V_d)$ del componente non lineare (in questo caso il diodo), e la coppia soluzione (V_d^*, I_d^*), si può trovare come intersezione geometrica delle due curve.
Ciò permette dunque di dedurre la corrente I_d^* che attraversa il diodo in funzione della tensione V_G applicata.
Per un diodo reale bisogna tener conto anche delle caratteristiche specifiche del materiale semiconduttore con cui è realizzato e ciò si ottiene, in prima approssimazione, aggiungendo un fattore η a denominatore dell,ÄôesponenteÄô;

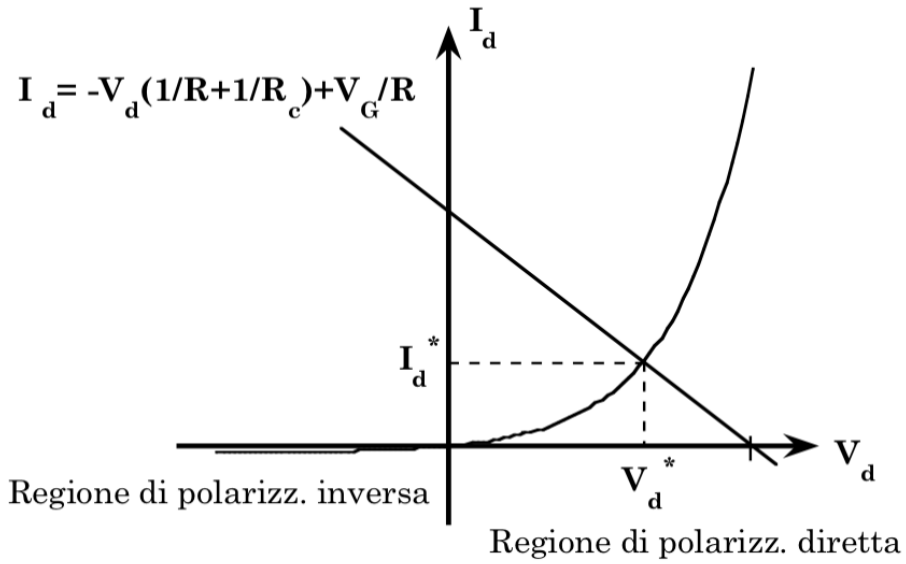


Figura 1.52:

l'equazione caratteristica assume quindi la forma:

$$I_{tot} \;=\; I_0 \left(e^{qV/\eta kT} - 1 \right) \tag{1.43}$$

Per piccole correnti si ha $\eta \simeq 1$ per diodi al germanio ed $\eta \simeq 2$ per diodi al silicio. Al crescere delle correnti $\eta \to 1$ anche per diodi al silicio.
Prendendo il logaritmo naturale di entrambi i membri della 1.33 e trascurando l'unità rispetto al termine esponenziale che a temperatura ordinaria vale circa 36, si ottiene la formula approssimata

$$\ln I_{tot} \;=\; \ln I_0 + \ln \left(e^{qV/\eta kT} - 1 \right) \;\simeq\; \ln I_0 + \frac{qV}{\eta kT} \tag{1.44}$$

che rappresenta una retta intersecante l'asse delle correnti in $\ln I_0$ sia nel piano $(\ln(I_{tot}), V)$ che in quello $(\ln(I_{tot}), 1/T)$. Dalle pendenze di tali rette si può estrarre il coefficiente η.
Per meglio valutare I_0 si può sostituire il valore η_{fit} di η trovato dal fit, nella formula non approssimata ed esplicitare in funzione di I_0:

$$I_0 \;=\; I_{tot} \Big/ \left(e^{qV/\eta kT} - 1 \right) \tag{1.45}$$

In figura 1.47 sono riportati come esempio gli andamenti qualitativi delle curve caratteristiche, nella regione di polarizzazione diretta, per un diodo al germanio (1N270) e per un diodo al silicio (1N3605) alla temperatura di 25 ^{o}C.

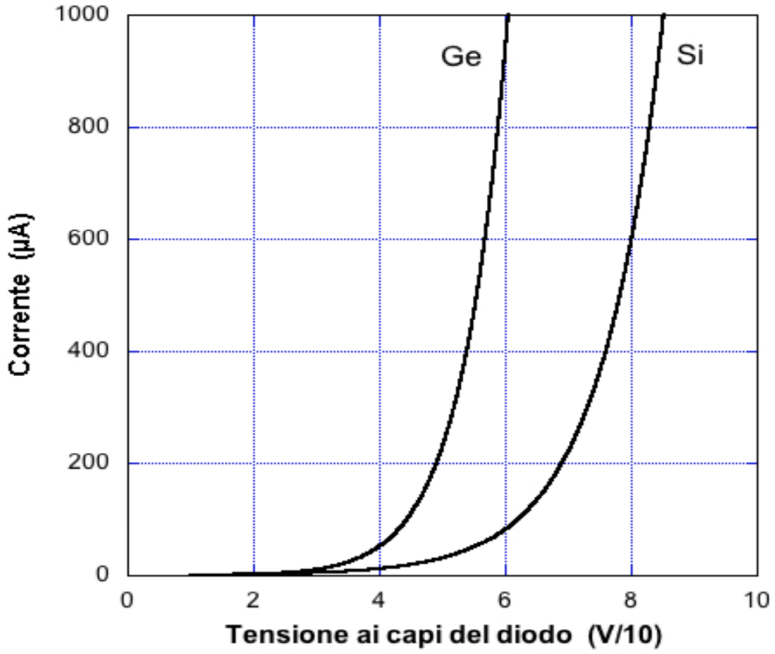


Figura 1.53:

Un diodo reale, se sottoposto a una tensione di polarizzazione inversa sufficientemente elevata, superiore in valore assoluto a un'opportuna soglia V_{ZK}, manifesta una conducibilità elettrica molto maggiore di quella descritta dall'equazione (1.33) della caratteristica $I - V$ di un diodo. L,Äôandamento tipico è quello mostrato in figura 1.48.
Il fenomeno che ha luogo all'aumentare della tensione di polarizzazione inversa viene detto di break-down. Per capire in cosa consista si osservi che in alcuni casi elettroni e lacune generati termicamente acquisiscono, dal potenziale applicato, energia sufficiente a produrre nuovi portatori rimuovendo dai loro legami elettroni di valenza. Questi contribuiscono a creare nuovi portatori iterando a loro volta il processo e dando luogo al fenomeno di moltiplicazione a valanga. Quando il diodo si trova in questa condizione è caratterizzato da forti correnti inverse e si dice che lavora nella regione di break-down a valanga.
Qualora i portatori di cariche inizialmente disponibili non riescano ad acquisire sufficiente energia per iniziare il processo di moltiplicazione, è possibile innescarlo comunque, rompendo direttamente i legami degli elettroni di valenza grazie ad un opportuno campo elettrico. In tal caso si parla di break-down Zener.
Se un diodo viene progettato con caratteristiche di dissipazione di potenza adeguate a lavorare nella regione di break-down, viene detto ‚Äúdiodo Ze-

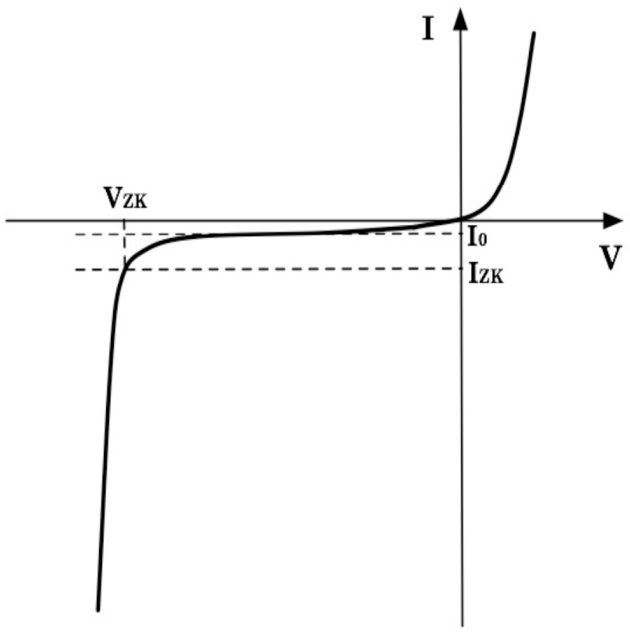


Figura 1.54:

ner,Äù e può essere proficuamente utilizzato come riferimento di tensione ovvero come stabilizzatore di tensione.
Un suo impiego tipico è illustrato in figura 1.49.

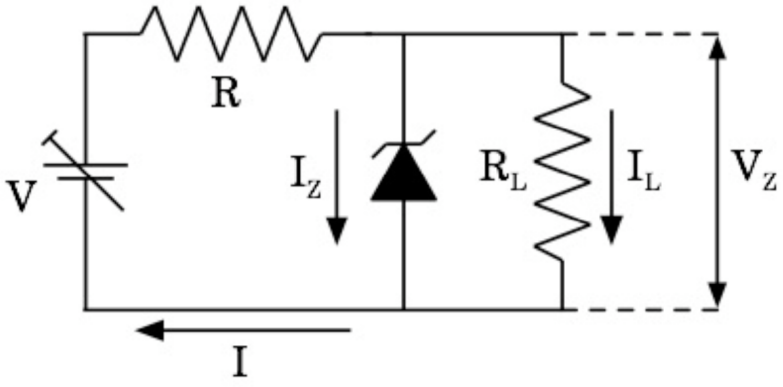


Figura 1.55:

V ed R sono scelti in modo da far lavorare il diodo in regione di break-down. La tensione ai capi del diodo Zener coincide sempre con V_Z, ovvero quella ai capi del carico R_L, ed I_Z è la corrente nel diodo Zener. In questa condi-

zione il diodo è in grado di mantenere stabile la tensione del carico rispetto a modificazioni di corrente nello stesso e/o a variazioni della tensione d'alimentazione. Nella regione di break-down infatti, forti variazioni di corrente nel diodo causano piccole variazioni di tensione ai suoi capi (e quindi ai capi di R_L); variazioni di corrente nel carico o della tensione d'alimentazione, modificano quindi la corrente nel diodo in modo da ridurre le corrispondenti variazioni di tensione sul carico.
L'intervallo di tensioni entro cui il diodo svolge efficacemente il ruolo di ‚Äúregolatore‚Äù è definito, come limite inferiore, dal valore di corrente I_{ZK} che caratterizza il ‚Äúginocchio‚Äù dell'inizio della zona di break-down, e come limite superiore dai limiti d'impiego per dissipazione di potenza.
Per quanto concerne le differenze fra le curve caratteristiche I/V di un diodo semiconduttore al Germanio, rispetto a quello al Silicio, si considerino le differenze strutturali del Germanio rispetto al Silicio.
Qualitativamente, in primo luogo l'atomo di Germanio, essendo più grande dell'atomo di Silicio, ha gli orbitali più esterni a una maggior distanza dal nucleo dell'atomo, rispetto al Silicio, e nella struttura cristallina del semiconduttore risulta che basta meno energia, e quindi meno tensione di polarizzazione diretta, per liberare cariche e per cominciare quindi a percepire una corrente. A parità di tensione di polarizzazione diretta, per piccoli valori di questa tensione, la pendenza positiva della curva I/V del Germanio è maggiore di quella del Silicio.
Inoltre, essendo il numero atomico del Germanio 32, rispetto a 14 del Silicio, succede che una corrente che si instaura in un cristallo di Germanio sente, a parità di altri fattori, una maggior "resistenza" a scorrere nel cristallo stesso, rispetto a quanto non avvenga per il Silicio, data la maggior densità di elettroni in assenza di un corrispondente significativo aumento del passo del reticolo cristallino.
Si può quindi dire che per il Germanio comincia abbastanza rapidamente a dominare un effetto di tipo ohmico/resistivo, al crescere dell'intensità della corrente che lo percorre, rispetto al Silicio, e ciò ovviamente si ripercuote in una modifica della forma della curva I/V che al crescere di V tende a un aspetto più ohmico (meno pendente) rispetto a quello esponenziale di un diodo ideale.

1.11.3 Il LED

Il LED, dall'Inglese Light Emitting Diode (diodo emettitore di luce), è costituito da una giunzione p-n che può ad esempio essere realizzata in arseniuro di gallio (GaAs), in grado di emettere luce di colore rosso, o in fosfuro di gallio (GaP), in grado di emettere luce di colore giallo o verde. L'emissione di luce ha luogo quando la giunzione, polarizzata direttamente, è percorsa da corrente elettrica. Essa è dovuta al fenomeno di ricombinazione radiativa spontanea fra elettroni e lacune iniettate dalla corrente nella zona di

svuotamento e viene detta elettro-luminescenza. La frequenza ν associata ai fotoni emessi dipende dal valore E_g del gap energetico fra la banda di valenza e quella di conduzione del semiconduttore:

$$\nu = E_g/h \tag{1.46}$$

dove $h = 6.62606 \times 10^{-34}$ J·s $= 4.13566 \times 10^{-21}$ MeV·s, è la costante di Plank.
I LED sono oggi impiegati in numerosissime situazioni al posto di altre sorgenti più comuni di luce e posseggono inoltre, rispetto a queste, la pregevole caratteristica di un bassissimo rapporto fra la potenza consumata e la potenza luminosa corrispontemente emessa.
Per evitare il danneggiamento che ne deriverebbe se fossero attraversati da intensità eccessive di corrente, si pone sempre in serie ad essi un'opportuna resistenza limitatrice che mantenga la corrente entro pochi milli-ampère.
La luce prodotta fuoriesce quindi dalle pareti laterali della regione di giunzione rendendosi visibile a occhio nudo, se di frequenza opportuna.

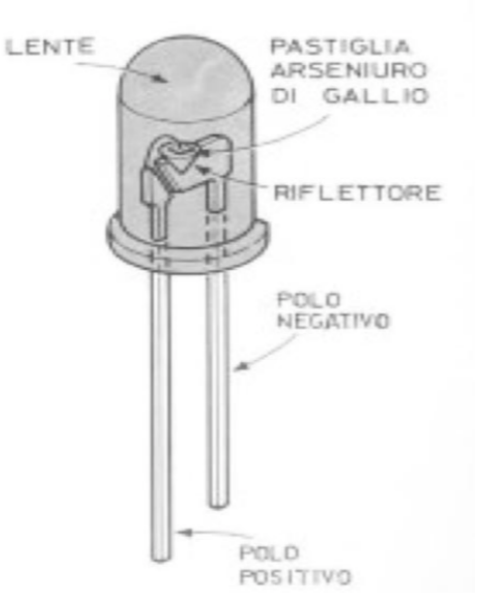


Figura 1.56:

Lavorando opportunamente a specchio le pareti laterali della zona di giunzione di un LED si può creare una cavità ottica simile a quella di un laser. Ciò ha permesso effettivamente di realizzare laser a semiconduttore, quali ad esempio i piccoli laser utilizzati come puntatori.