

CORSO DI GEOMETRIA

PROGRAMMA PRELIMINARE

A.A. 2020/2021

PROF. VALENTINA BEORCHIA

Vettori applicati nel piano e nello spazio reale. Somma e di prodotto per scalari. Proprietà delle operazioni. Relazioni di equivalenza. Relazione di equipollenza tra vettori applicati. Vettori geometrici. Somma e prodotto per scalari. Proprietà delle operazioni. Spazio vettoriale reale. Esempi di spazi vettoriali: vettori geometrici, \mathbb{R}^n , spazio delle funzioni di una variabile reale a valori reali, spazio delle funzioni continue, spazio dei polinomi in una indeterminata a coefficienti reali.

Definizione di campo ed esempi: campo dei numeri razionali \mathbb{Q} , campo dei numeri reali \mathbb{R} , campo dei numeri complessi \mathbb{C} , campi finiti \mathbb{Z}_2 e \mathbb{Z}_3 .

Matrice a coefficienti in un campo. Somma e prodotto per scalari tra matrici. L'insieme delle matrici con m righe e n colonne è uno spazio vettoriale. Matrice trasposta. La trasposta preserva la somma ed il prodotto per scalari. Definizione di matrice diagonale, simmetrica, e matrice unità.

Prodotto righe per colonne tra matrici. Proprietà algebriche del prodotto riga per colonna. La trasposta di un prodotto di matrici è il prodotto delle matrici trasposte nell'ordine inverso. Definizione di matrice invertibile. Unicità della matrice inversa (dimostrazione). Se M è una matrice tale che $A \cdot M = I$ per A invertibile, allora vale anche $M \cdot A = I$ (dimostrazione). Il prodotto di matrici invertibili è una matrice invertibile e la sua inversa è il prodotto delle matrici inverse nell'ordine rovesciato.

Definizione e prime proprietà di sistema di equazioni lineari. Matrice dei coefficienti e matrice completa associate ad un sistema di equazioni lineari. Teorema di struttura per le soluzioni di sistemi di equazioni lineari con dimostrazione.

Matrici a scala. Criterio di compatibilità per sistemi lineari con matrice dei coefficienti a scala, con dimostrazione. Sistemi lineari equivalenti. Operazioni elementari. Proposizione: le operazioni elementari trasformano un sistema lineare in uno equivalente, dimostrazione. Algoritmo di Gauss (Riduzione a scala).

Sistemi lineari omogenei con un numero di incognite maggiore del numero di equazioni ammettono almeno una soluzione non banale.

Definizione di sottospazio vettoriale. Esempi di sottospazi vettoriali: sottospazio banale, insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. L'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale (dimostrazione). L'unione di due sottospazi vettoriali non è, in generale, un sottospazio vettoriale. Sottospazio somma.

Combinazione lineare di vettori. Span di un numero finito di vettori. Lo Span è un sottospazio vettoriale. Definizione di vettori linearmente dipendenti. Esempi: un vettore è linearmente dipendente se e solo se è il vettore nullo. Due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali. Esempi di tre vettori linearmente dipendenti. Vettori linearmente indipendenti e dipendenti. Proposizione: s vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno di loro si può esprimere come combinazione lineare dei rimanenti. Dimostrazione. Definizione di insieme (o sistema) di generatori per uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali finitamente generati. Base di uno spazio vettoriale. Base canonica di \mathbb{K}^n . Base canonica dello spazio delle matrici.

Teorema di esistenza di soluzioni per sistemi lineari.

Teorema: in uno spazio vettoriale finitamente generato n vettori formano una base se e solo se ogni vettore si può scrivere in modo unico come combinazione lineare degli n vettori fissati; con dimostrazione. Coordinate di un vettore rispetto a una data base.

Teorema di estrazione di una base con dimostrazione. Corollario: ogni spazio vettoriale non banale finitamente generato ha una base, dimostrazione. Teorema del completamento: ogni insieme di vettori linearmente indipendenti è contenuto in una base, con dimostrazione. Lemma di Steinitz: se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V e se $p > n$, per ogni scelta di vettori w_1, \dots, w_p in V , essi sono linearmente dipendenti.

Teorema: due basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di elementi; dimostrazione. Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato. Proprietà della dimensione: se $\dim V = n$, allora n vettori linearmente indipendenti sono anche dei generatori, e n generatori sono linearmente indipendenti (con dimostrazioni). Sottospazi vettoriali e dimensione. Generatori del sottospazio somma. Formula di Grassmann con dimostrazione. Conseguenze della Formula di Grassmann. Sottospazi in somma diretta.

Rango di una matrice. Prime proprietà. Metodo per il calcolo del rango utilizzando la riduzione a scala tramite le operazioni elementari. Teorema: il rango di una matrice è uguale al rango della sua trasposta.

Teorema di Rouché-Capelli con dimostrazione. Teorema: una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo; dimostrazione. Teorema di Cramer, con dimostrazione.

Calcolo della matrice inversa con l'algoritmo di Gauss.

Determinante di una matrice 2×2 e sua interpretazione geometrica come l'area (con segno) del parallelogramma generato dalle colonne. Minore di una matrice quadrata. Determinante di una matrice quadrata come sviluppo di Laplace lungo la prima colonna. Regola di Sarrus per il calcolo del determinante di matrici 3×3 . Proprietà caratterizzanti del determinante e Teorema di unicità del determinante. Enunciato della proposizione che permette di calcolare il determinante per mezzo delle operazioni elementari.

Teorema: una matrice quadrata ha rango massimo se e solo se il suo determinante è non nullo. Applicazioni al calcolo del rango di una matrice qualsiasi. Sviluppo di Laplace per colonne. Sviluppo di Laplace del determinante lungo le righe. Formula di Binet (enunciato). Corollario: se una matrice è invertibile, il determinante della sua inversa è l'inverso del suo determinante. Teorema: il determinante della trasposta di una matrice coincide con il determinante della matrice stessa.

Matrice dei cofattori. Calcolo dell'inversa per mezzo della matrice dei cofattori. Formula di Cramer con dimostrazione.

Prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n e sue proprietà algebriche. Norma standard e sue proprietà. Angolo convesso tra due vettori. Vettori ortogonali.

Prodotto vettoriale (o esterno) di due vettori di \mathbb{R}^3 e sue proprietà algebriche e geometriche.

Spazio affine su uno spazio vettoriale. Proprietà ed esempi. Dimensione di uno spazio affine. Riferimento affine e definizione di coordinate di un punto. Sottospazio affine e definizione di giacitura. Dimensione di un sottospazio affine. Definizione di sottospazi affini paralleli, incidenti e sghembi.

Teorema: l'insieme delle soluzioni un sistema lineare compatibile è un sottospazio affine: dimostrazione.

Equazioni cartesiane e equazioni parametriche per un sottospazio affine. Passaggio da equazioni cartesiane a parametriche e viceversa. Proposizione: ogni iperpiano può essere descritto da una equazione cartesiana (con dimostrazione). Definizione di sottospazi paralleli, sghembi, ed incidenti.

Geometria del piano affine: equazioni cartesiane e parametriche delle rette nel piano. Condizioni di parallelismo ed incidenza. Esempi. Fasci propri ed impropri di rette.

Geometria dello spazio affine tridimensionale: equazioni parametriche e cartesiane di piani e rette. Piani coordinati. Condizioni di parallelismo e di incidenza. Condizioni di sghembità tra rette nello spazio. Fasci propri ed impropri di piani.

Applicazione e operatore lineare. Prime proprietà delle applicazioni lineari. Esempi: applicazioni lineari associate a matrici; l'identità; la funzione nulla; proiezioni. Funzione coordinate. Rotazioni nel piano.

L'immagine e la controimmagine di sottospazi vettoriali sono ancora sottospazi vettoriali. Nucleo ed immagine e loro proprietà. Rango di una applicazione lineare. Il teorema della dimensione con dimostrazione. Applicazioni agli operatori lineari. Teorema: due spazi vettoriali sullo stesso campo di dimensione finita sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione; dimostrazione. Il teorema di struttura per applicazioni lineari, con dimostrazione. Teorema di esistenza di applicazioni lineari, con dimostrazione.

Matrice che rappresenta una applicazione lineare rispetto a due basi fissate. Espressione dell'immagine e del nucleo di una applicazione lineare mediante una matrice che la rappresenta. La matrice che rappresenta la composizione di due applicazioni lineari è il prodotto delle matrici che rappresentano le due applicazioni. Matrice del cambiamento di base. Relazione tra due matrici che rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a due coppie di basi diverse. Matrici simili. Due matrici simili hanno lo stesso determinante. Determinante di un operatore.

Definizione di operatore diagonalizzabile e di matrice diagonalizzabile. Definizione di autovalore, di spettro e di autovettore. Prime proprietà degli autovalori e degli autovettori. Autospazio. Proprietà del polinomio caratteristico. Il numero degli autovalori di un endomorfismo è minore o uguale alla dimensione dello spazio.

Primo criterio di diagonalizzabilità: un operatore è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni degli autospazi coincide con la dimensione dello spazio. Procedimento per diagonalizzare un endomorfismo.

Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Lemma: per ogni autovalore la molteplicità algebrica è maggiore o uguale alla molteplicità geometrica. Secondo criterio per la diagonalizzabilità di un endomorfismo: un operatore è diagonalizzabile se e solo se il polinomio caratteristico fattorizza nel prodotto di fattori lineari, e per ogni autovalore, le sue molteplicità algebrica e geometrica coincidono. Corollario: se un operatore ha $n = \dim(V)$ autovalori distinti, allora è diagonalizzabile.

Forme bilineari, prodotti scalari e norme. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ed angolo convesso tra due vettori di uno spazio euclideo.

Basi ortogonali e basi ortonormali. Procedimento di Gram-Schmidt. Teorema: ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.

Spazi affini euclidei, distanza tra due punti. Proprietà della distanza. Angolo acuto tra rette, tra piani, e tra rette e piani. Condizioni di ortogonalità tra rette, tra piani, e tra rette e piani.

Operatori autoaggiunti o simmetrici. Matrici simmetriche. Ogni endomorfismo autoaggiunto ha almeno un autovalore reale; dimostrazione. Teorema Spettrale con dimostrazione. Corollario: ogni matrice simmetrica a coefficienti reali è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale. Algoritmo per trovare una base ortonormale che diagonalizza un dato operatore.

Libri di testo consigliati:

Appunti della docente accessibili alla pagina Moodle del Corso.

Geometria analitica con elementi di algebra lineare. Marco Abate e Chiara de Fabritiis, Mc Graw Hill, 2015.

Algebra lineare e geometria, Enrico Schlesinger, Zanichelli, Seconda edizione Geometria 1. Edoardo Sernesi, Bollati Boringhieri, 1989.