

## Sistemi di equazioni differenziali

---

Questo capitolo è dedicato allo studio dei sistemi di equazioni differenziali; viene precisata la nozione di stabilità (già incontrata nel Paragrafo 7.1) e si descrivono alcune applicazioni. L'enfasi sarà posta non sulla determinazione esplicita delle soluzioni, operazione che come si è già visto ha raramente successo, ma sulla loro descrizione qualitativa.

Nell'ultima parte vengono presentate alcune applicazioni della teoria delle equazioni differenziali. L'esposizione presuppone una certa "sensibilizzazione" (almeno informale) da parte del lettore nei confronti dei problemi presi in esame e non pretende certo di essere organica.

Ci limiteremo a studiare i sistemi di due equazioni differenziali, sia perché la teoria è in questo caso considerevolmente più completa, sia perché la visualizzazione delle soluzioni nel piano consente di illuminare efficacemente la discussione.

Consideriamo dunque il sistema

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \quad (8.1)$$

ove  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  sono funzioni scalari incognite, mentre  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  sono funzioni assegnate che supporremo differenziabili in una certa regione  $R$  del piano. Un sistema di questo tipo si dice *autonomo* in quanto le funzioni  $f$  e  $g$  non dipendono esplicitamente da  $t$ .

Le (8.1) si possono scrivere in forma vettoriale nel modo seguente

$$\mathbf{u}' = \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad (8.2)$$

ove si è posto  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (f(x,y), g(x,y))$  e si definisce

$$\mathbf{u}'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Una *soluzione* del sistema (8.1) è data da una coppia di funzioni  $x(t)$ ,  $y(t)$  derivabili in un certo intervallo. Come nel caso di una variabile, se  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  sono soluzioni di (8.1), anche  $x = x(t+c)$ ,  $y = y(t+c)$  lo sono, qualunque sia la costante reale  $c$ .

In generale le soluzioni di (8.1) coinvolgono due costanti arbitrarie, per determinare le quali possono essere assegnati valori iniziali, vale a dire si considera il *problema*

di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (8.3)$$

Sussiste un teorema di esistenza e di unicità del tutto analogo al Teorema 7.3:

**TEOREMA 8.1** Se le funzioni  $f$  e  $g$  sono differenziabili in una regione di piano  $R$  esiste unica la soluzione locale del problema (8.3); essa è definita in un intorno di  $t_0$  ed è tale che  $(x(t), y(t))$  appartiene a un opportuno intorno del punto  $(x_0, y_0)$ .

Anche nel caso dei sistemi di equazioni differenziali si può dimostrare che se  $f$  e  $g$  sono  $C^1$  e si sa a priori che la soluzione di (8.3) è limitata, allora tale soluzione esiste per ogni  $t$  (Teorema 7.3).

Al variare di  $t$  ogni soluzione  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  del sistema (8.1) descrive parametricamente nel piano  $x, y$  una curva che viene detta *orbita* o *traiettoria* del sistema.

**PROPOSIZIONE 8.2** Per ogni punto della regione  $R$  passa una orbita e una sola del sistema (questo fatto non è più vero per sistemi di equazioni differenziali in cui il secondo membro dipende esplicitamente da  $t$ ).

**DIMOSTRAZIONE** Se  $C_1 : x = x_1(t)$ ,  $y = y_1(t)$  e  $C_2 : x = x_2(t)$ ,  $y = y_2(t)$  sono due orbite distinte con un punto in comune:

$$(x_0, y_0) = (x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2)),$$

si considerino le funzioni  $\tilde{x}(t) = x_1(t+t_1-t_2)$ ,  $\tilde{y}(t) = y_1(t+t_1-t_2)$ . Esse costituiscono, per l'osservazione precedente, una soluzione del sistema e corrispondono all'orbita  $C_1$ . Siccome  $(\tilde{x}(t_2), \tilde{y}(t_2)) = (x_0, y_0) = (x_2(t_2), y_2(t_2))$ , per il teorema di unicità si deve avere  $\tilde{x}(t) = x_2(t)$ ,  $\tilde{y}(t) = y_2(t)$  e, dunque, le orbite  $C_1$  e  $C_2$  coincidono.

Si faccia attenzione a non confondere le orbite con le soluzioni; una orbita è una curva  $\Gamma$  che è rappresentata parametricamente da più di una soluzione:  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $x(t+c)$ ,  $y(t+c)$  con  $c \neq 0$  sono soluzioni distinte ma individuano la stessa orbita.

Le orbite possono essere *orientate* pensando di percorrerle nel verso crescente di  $t$ .

Come nel caso delle equazioni autonome lo studio qualitativo delle soluzioni del sistema (8.1) inizia determinando i *punti critici* o *stazionari*, cioè le soluzioni del sistema algebrico

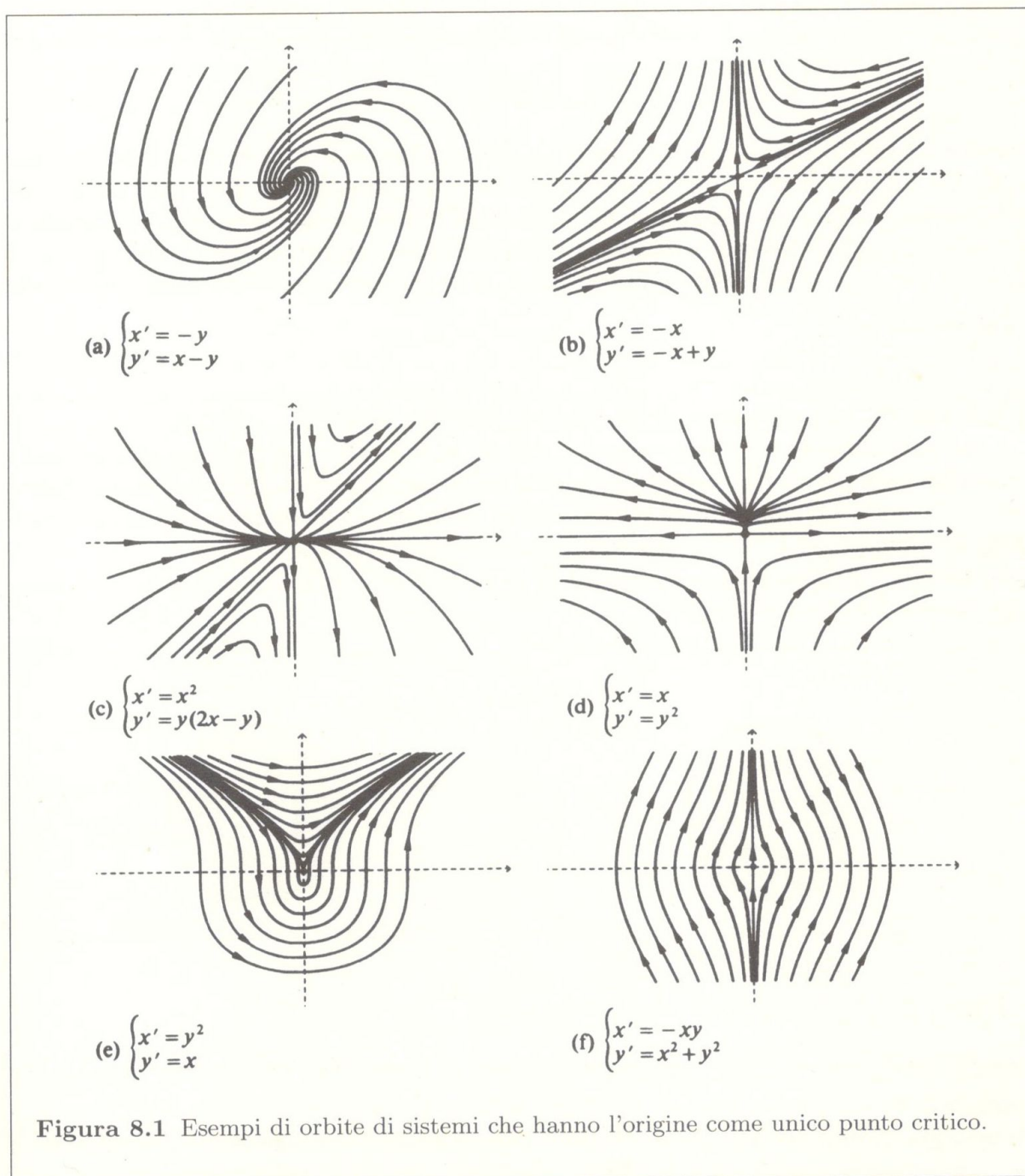
$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

Se  $(x_0, y_0)$  è soluzione di (8.4), allora  $x(t) = x_0$ ,  $y(t) = y_0$  è soluzione del sistema (8.1) per ogni  $t$ ; l'orbita che passa per  $(x_0, y_0)$  coincide con il punto stesso. A differenza, però, del caso delle equazioni, il comportamento delle orbite "vicine" al punto critico può essere di tipo molto differente, come mostrano gli esempi seguenti (Figura 8.1) nei quali il punto  $(0,0)$  è critico (ed è l'unico punto critico).

## STABILITÀ E STABILITÀ ASINTOTICA

Le equazioni (8.1) si possono interpretare da un punto di vista cinematico nel modo seguente: si consideri sulla regione  $R$  un campo di vettori di componenti  $f(x,y)$ ,  $g(x,y)$ ; il sistema di equazioni differenziali (8.1) descrive il moto di una particella  $(x,y)$  la cui velocità  $(x',y')$  è data in ogni punto di  $R$  da  $(f(x,y), g(x,y))$ . Le orbite del sistema sono le traiettorie descritte dalla particella e i punti critici sono i punti di equilibrio. Il piano  $x, y$  viene anche detto *piano delle fasi*.

Si dicono *isolati* quei punti critici tali che in un loro intorno non ve ne siano altri. La precedente analogia meccanica conduce naturalmente alla definizione seguente.



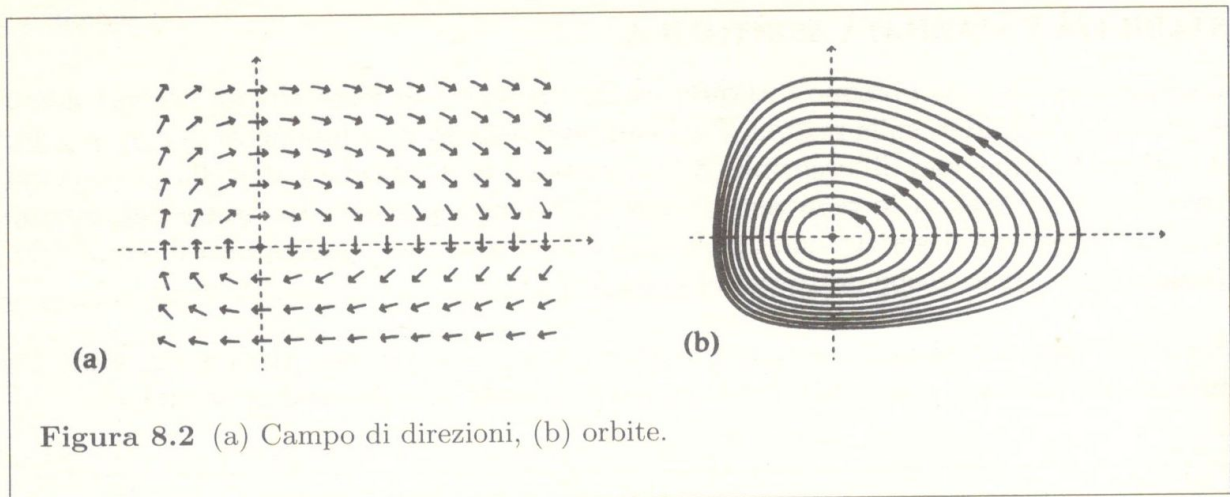


Figura 8.2 (a) Campo di direzioni, (b) orbite.

**DEFINIZIONE 8.3** Un punto critico isolato  $(x_0, y_0)$  del sistema (8.1) si dice *stabile* se per ogni suo intorno  $I$  se ne può trovare un altro,  $I'$ , contenuto in  $I$  in modo che ogni soluzione  $x(t), y(t)$  che passa per un punto di  $I'$  rimanga in  $I$  per ogni  $t$  successivo. Il punto  $(x_0, y_0)$  si dice poi *asintoticamente stabile* se è stabile e vi è un suo intorno  $I$  tale che per ogni orbita  $x(t), y(t)$  che passa per un punto di  $I$  si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0$ .

Un punto critico isolato che non è stabile si dice *instabile*.

In altri termini un punto critico è stabile se le orbite che partono vicino a esso rimangono sempre vicine, è asintoticamente stabile se le orbite tendono al punto critico per  $t \rightarrow +\infty$ . Ovviamente si possono dare definizioni analoghe quando interessi il comportamento per  $t \rightarrow -\infty$ , anziché per  $t \rightarrow +\infty$ .

La Figura 8.3 illustra geometricamente le nozioni di stabilità e di stabilità asintotica.

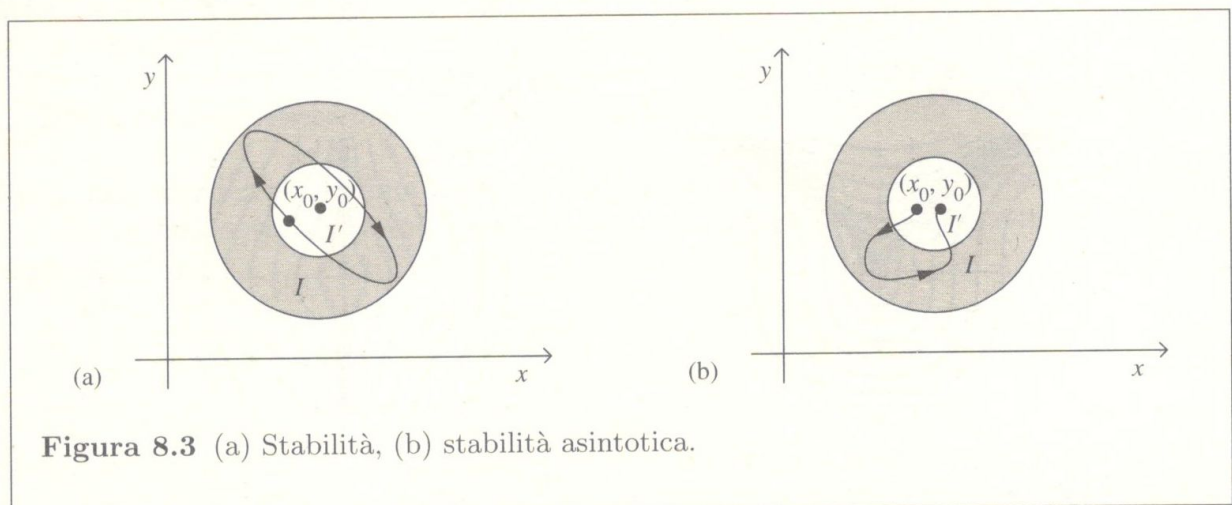


Figura 8.3 (a) Stabilità, (b) stabilità asintotica.

Allo scopo di individuare alcuni comportamenti tipici delle traiettorie nell'intorno di un punto stazionario conviene studiare dapprima i sistemi lineari a coefficienti costanti.

## 8.1 Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti

Sono i sistemi della forma

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (8.5)$$

in cui  $a, b, c, d$  sono numeri assegnati.

Il punto  $(0,0)$  è un punto critico per il sistema considerato e, se  $ad - bc \neq 0$ , non ve ne sono altri. Studieremo solo questo caso lasciando al lettore l'analisi del caso in cui  $ad - bc = 0$  (Esercizio 8.1.4).

Non è difficile ottenere la soluzione esplicita del sistema (8.5) ma, dato che il nostro obiettivo prevalente è lo studio qualitativo delle soluzioni, conviene seguire un'altra strada. Anzitutto osserviamo che se  $x(t), y(t)$  è una soluzione di (8.5), derivando la prima equazione e usufruendo della seconda si ha

$$x'' = ax' + bcx + bdy; \quad (8.6)$$

ma, dalla prima equazione si ricava  $by = x' - ax$  e sostituendo in (8.6) otteniamo  $x'' = (a + d)x' + (bc - ad)x$ . Pertanto  $x(t)$  è soluzione dell'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti

$$z'' - (a + d)z' + (ad - bc)z = 0; \quad (8.7)$$

in modo analogo si verifica che anche  $y(t)$  è soluzione di (8.7). Abbiamo così dimostrato che se  $x(t), y(t)$  è una soluzione del sistema lineare (8.5) allora le funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  risolvono l'equazione (8.7).

Si noti che l'equazione caratteristica di (8.7) (Paragrafo 7.2) è

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0, \quad (8.8)$$

e coincide con il polinomio caratteristico della matrice dei coefficienti del sistema assegnato:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}.$$

Dunque le radici

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}[(a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}]$$

di (8.8) sono gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ricordando quanto si è visto circa la soluzione delle equazioni lineari a coefficienti costanti risulta che il comportamento delle soluzioni del sistema dato dipende dalla natura di tali autovalori; occorrerà distinguere i casi in cui tali autovalori sono reali distinti, reali coincidenti oppure complesso-coniugati.

### CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI CRITICI

Per semplificare la descrizione del comportamento delle orbite attorno al punto critico, conviene effettuare una opportuna trasformazione lineare del tipo

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \delta y \end{cases}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \quad (8.9)$$

Tale trasformazione è biunivoca, manda il punto  $(0,0)$  in sé, gli intorno di  $(0,0)$  in intorno di  $(0,0)$ , modifica le orbite deformandole ma ne mantiene inalterato il comportamento qualitativo nelle vicinanze dell'origine. Sarà nostra cura scegliere, nei vari casi che si presenteranno, i parametri  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  in modo che, assoggettando il sistema (8.5) a tale trasformazione, esso si riduca a un sistema più semplice, in modo che lo studio delle traiettorie risulti pressoché immediato.

**1° caso.** Gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$  sono reali, distinti e non nulli. In questo caso si ha dunque

$$(a - d)^2 + 4bc > 0,$$

e supporremo  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

Scambiando eventualmente  $x$  con  $y$  si può ritenere  $c \neq 0$ . Allora la trasformazione

$$\begin{cases} \xi = cx + (\lambda_1 - a)y \\ \eta = cx + (\lambda_2 - a)y \end{cases} \quad (8.10)$$

manda il sistema (8.5) nel sistema

$$\begin{cases} \xi' = \lambda_1 \xi \\ \eta' = \lambda_2 \eta. \end{cases}$$

Infatti, essendo  $\lambda_1 \lambda_2 = ad - bc$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ , si ha

$$\begin{aligned} \xi' &= cx' + (\lambda_1 - a)y' = cax + cby + (\lambda_1 - a)(cx + dy) = \\ &= \lambda_1 cx + (-\lambda_1 \lambda_2)y + \lambda_1 dy = \lambda_1 cx + \lambda_1(\lambda_1 - a)y = \lambda_1 \xi \end{aligned}$$

e analogamente per  $\eta$ .

Studiamo, dunque, il sistema

$$x' = \lambda_1 x; \quad y' = \lambda_2 y \quad (8.11)$$

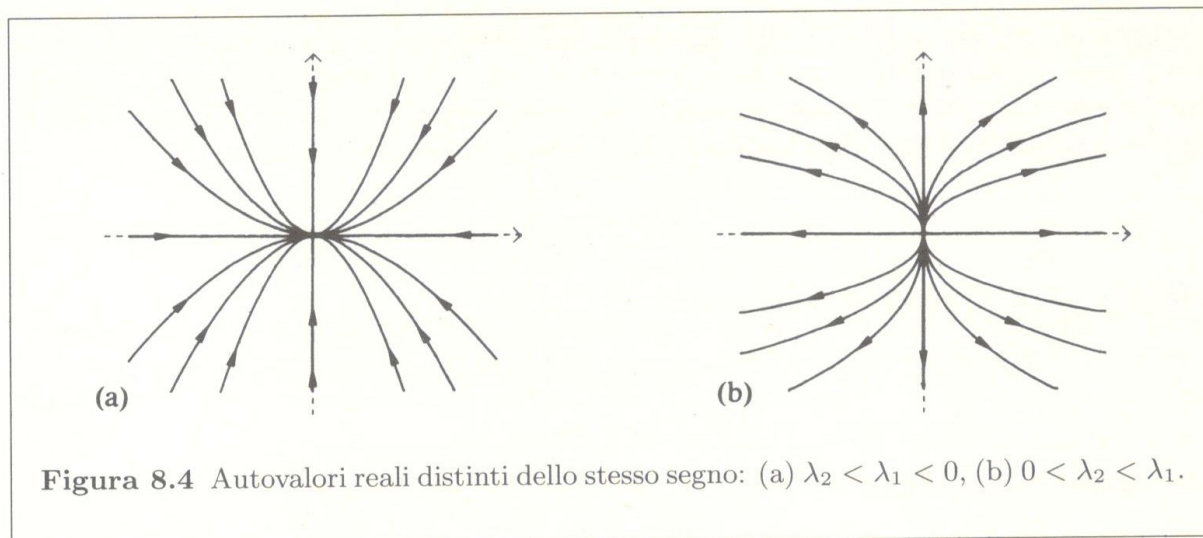
(ove  $\lambda_1, \lambda_2$  sono numeri reali, distinti e non nulli) che chiameremo *sistema canonico*. Le soluzioni di (8.11) sono date da

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (8.12)$$

ove  $C_1$  e  $C_2$  sono delle costanti. Distinguiamo due sottocasi.

**A)**  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  hanno lo stesso segno.

La forma della traiettoria è individuata dal rapporto  $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$ , in quanto  $x^{\lambda_2}$  è proporzionale a  $y^{\lambda_1}$ , mentre il verso di percorrenza è individuato dal segno di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Le orbite hanno il comportamento riportato in Figura 8.4.



Il punto critico  $(0,0)$  si dice *nodo*; se le orbite sono orientate verso l'origine (caso (a)) esso è *asintoticamente stabile*, in caso contrario (caso (b)) è *instabile*.

Quattro particolari orbite sono date dalle semirette che individuano gli assi cartesiani. Si noti che risulta

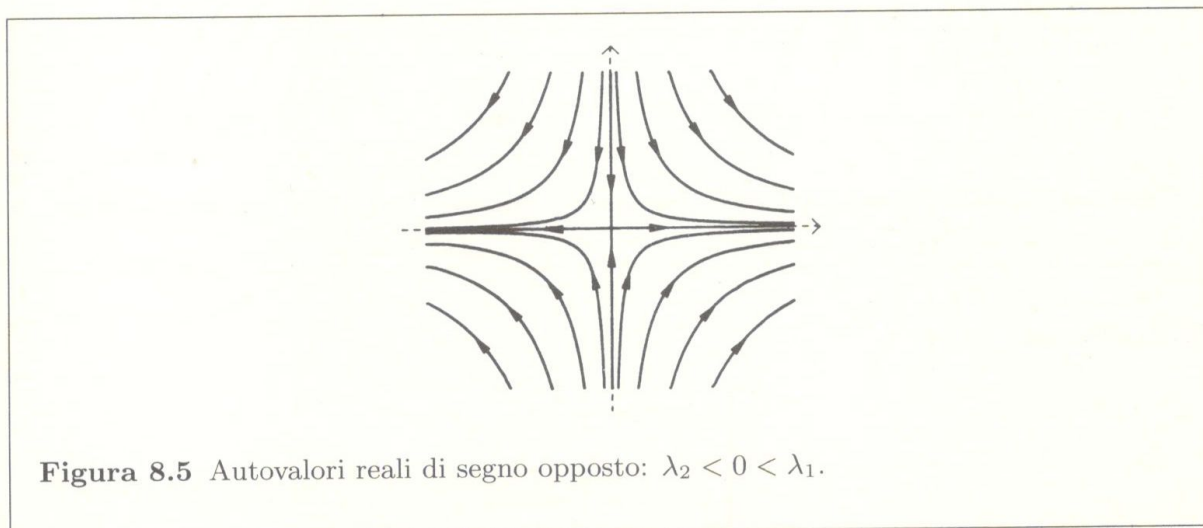
$$\frac{dy}{dx} = kx^{\gamma-1}$$

con  $k = \gamma \frac{C_2}{C_1}$  e, dunque, per  $x \rightarrow 0$  si ha

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma > 1 \\ \infty & \text{se } \gamma < 1. \end{cases}$$

**B)**  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  hanno segno opposto.

Le traiettorie hanno la forma riportata nella Figura 8.5.



L'origine si dice *punto di sella* ed è instabile. Gli assi coordinati contengono, ciascuno, una coppia di orbite che sono dirette verso l'origine o in direzione opposta a seconda che il corrispondente autovalore sia quello positivo o quello negativo; tali traiettorie si dicono *separatrici*. Ogni altra orbita ha tali separatrici come asintoti.



**ESEMPI 8.4 (a)** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + \frac{1}{2}y \\ y' = 2x - 2y. \end{cases} \quad (8.13)$$

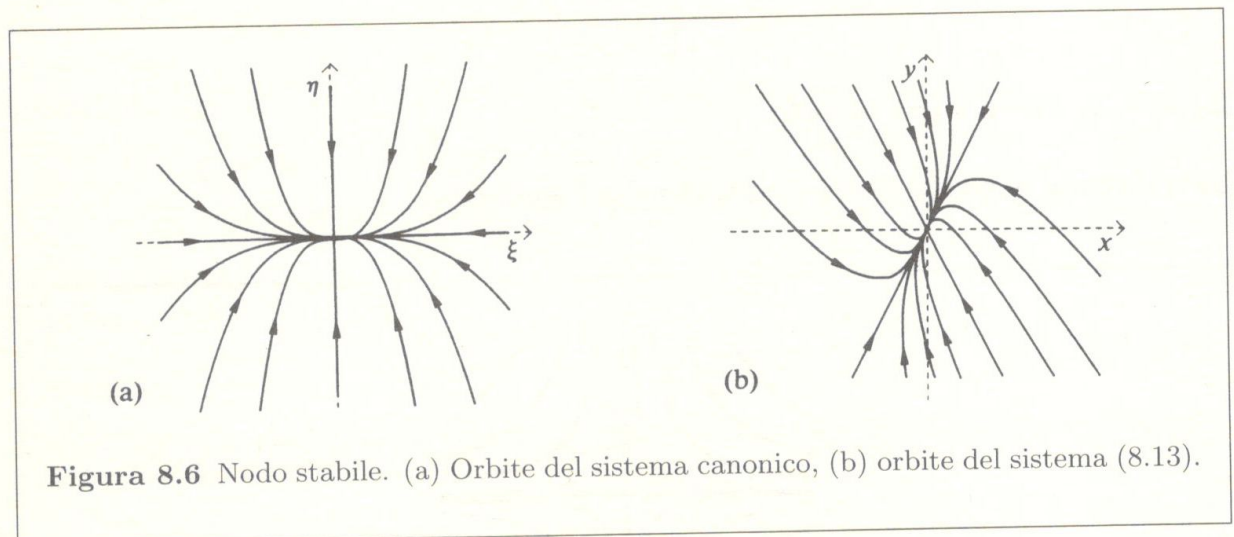
L'equazione caratteristica è

$$\det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 1/2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 + \lambda)^2 - 1 = 0$$

e, dunque,  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -3$  sono gli autovalori. L'origine è allora un *nodo stabile*. La trasformazione (8.10) si scrive

$$\begin{cases} \xi = 2x + y \\ \eta = 2x - y \end{cases}$$

e, dunque, manda la retta  $y = 2x$  nell'asse delle ascisse  $\eta = 0$  e la retta  $y = -2x$  nell'asse delle ordinate  $\xi = 0$ . Le soluzioni del sistema canonico  $\xi' = -\xi$ ,  $\eta' = -3\eta$  sono del tipo  $\xi(t) = c_1 e^{-t}$ ,  $\eta(t) = c_2 e^{-3t}$  e, dunque, le orbite giacciono sulle curve  $\eta = K\xi^3$ . Dall'andamento delle orbite di tale sistema (Figura 8.6 (a)) si ricava allora il comportamento di quelle del sistema originario (Figura 8.6 (b)).



**Figura 8.6** Nodo stabile. (a) Orbite del sistema canonico, (b) orbite del sistema (8.13).

(b) Il sistema

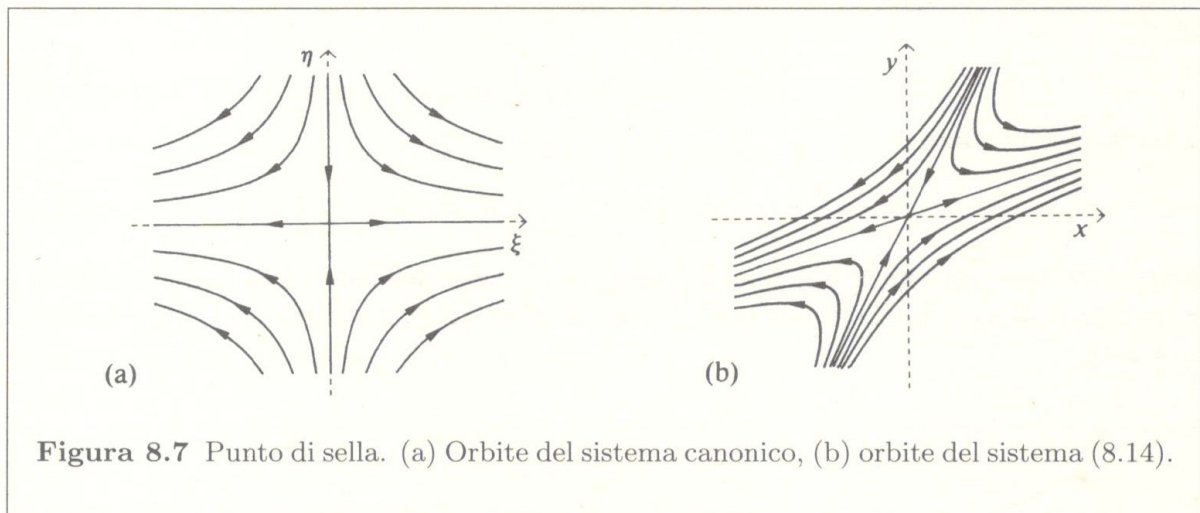
$$\begin{cases} x' = 2x - \frac{3}{2}y \\ y' = x - \frac{3}{2}y \end{cases} \quad (8.14)$$



ha autovalori  $\lambda_1 = 3/2$ ,  $\lambda_2 = -1$ . L'origine è, dunque, un punto di sella. La trasformazione (8.10) in questo caso è

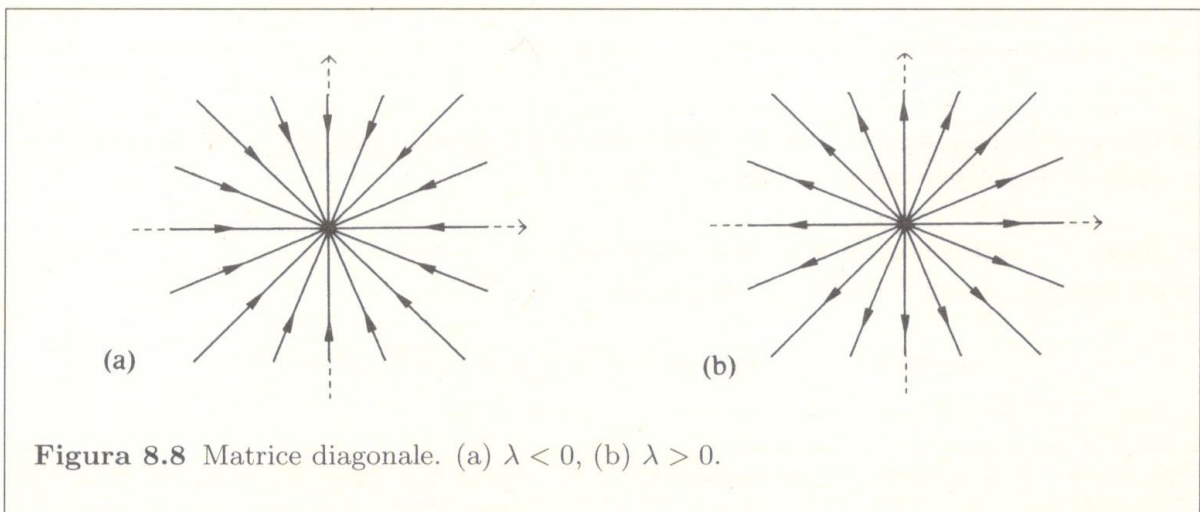
$$\begin{cases} \xi = x - \frac{1}{2}y \\ \eta = x - 3y \end{cases}$$

e manda il sistema (8.14) nel sistema canonico  $\xi' = \frac{3}{2}\xi$ ,  $\eta' = -\eta$ . Le separatrici  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  di quest'ultimo corrispondono alle rette  $y = 2x$ ,  $y = \frac{1}{3}x$  (Figura 8.7).



**2° caso.** Un solo autovalore  $\lambda = \frac{a+d}{2} \neq 0$ .

Si ha  $(a-d)^2 + 4bc = 0$ . Se  $b = c = 0$  (la matrice  $A$  è diagonale) il sistema è del tipo  $x' = \lambda x$ ,  $y' = \lambda y$  e, dunque, le orbite sono rettilinee. Se  $\lambda < 0$  l'origine è asintoticamente stabile, altrimenti è instabile.



Se invece si ha (per esempio)  $b \neq 0$ , la trasformazione

$$\xi = \frac{1}{b}x, \quad \eta = \frac{a-d}{2b}x + y$$

manda il sistema (8.5) in

$$\xi' = \frac{a+d}{2}\xi + \eta, \quad \eta' = \frac{a+d}{2}\eta$$

che, anche in questo caso, vien detto *sistema canonico*<sup>(1)</sup>.

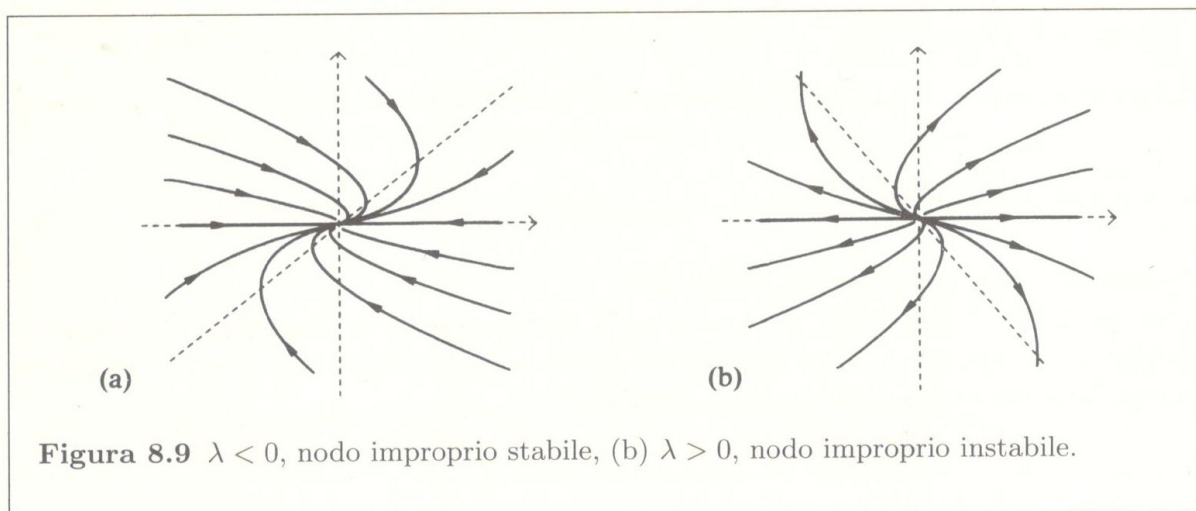
Basta, dunque, considerare un sistema del tipo

$$x' = \lambda x + y, \quad y' = \lambda y \quad (8.15)$$

le cui soluzioni sono

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}, \quad y(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

Due orbite sono contenute nell'asse  $x$  (per  $c_2 = 0$ ), tutte le altre orbite sono "tangenti" nell'origine all'asse  $x$ . L'origine si dice *nodo improprio* ed è stabile se  $\lambda < 0$ , instabile se  $\lambda > 0$ .



La retta lungo la quale  $x(t)$  cambia direzione (tratteggiata in figura) è la isoclina  $x' = 0$  e, dunque, ha equazione  $y = -\lambda x$ .

**3° caso.** Gli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono complessi.

Si ha dunque  $(a-d)^2 + 4bc < 0$ . Poniamo

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \quad \text{con } \alpha \text{ e } \beta \text{ reali, } \beta \neq 0.$$

<sup>(1)</sup>Se invece è  $c \neq 0$ , allora la trasformazione  $\xi = x - \frac{a-d}{2c}y$ ,  $\eta = \frac{1}{c}y$  porta al sistema  $\xi' = \frac{a+d}{2}\xi$ ,  $\eta' = \xi + \frac{a+d}{2}\eta$ .

La trasformazione lineare<sup>(2)</sup>

$$\begin{cases} \xi = cx + (\alpha - a)y \\ \eta = \beta y \end{cases} \quad (8.16)$$

manda il sistema (8.5) nel *sistema canonico*:

$$\begin{cases} \xi' = \alpha\xi - \beta\eta \\ \eta' = \beta\xi + \alpha\eta. \end{cases}$$

Basterà dunque considerare sistemi del tipo

$$x' = \alpha x - \beta y, \quad y' = \beta x + \alpha y. \quad (8.17)$$

Per studiare tale sistema passiamo a coordinate polari

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

dunque

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0. \quad (8.18)$$

Derivando le (8.18) rispetto a  $t$  otteniamo

$$2rr' = 2xx' + 2yy', \quad (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)\theta' = \frac{xy' - x'y}{x^2}$$

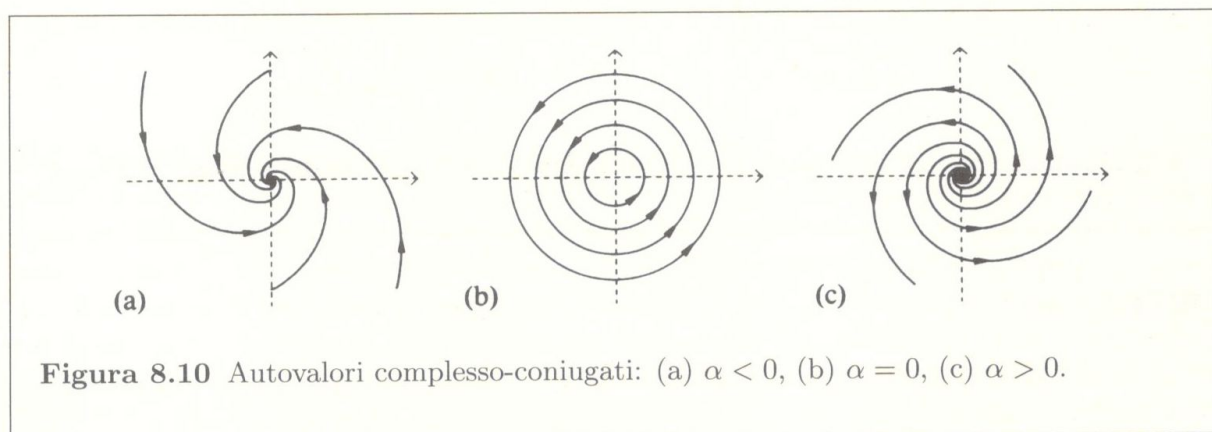
e sostituendo in queste le (8.17) si trovano le equazioni

$$r' = \alpha r, \quad \theta' = \beta,$$

che integrate forniscono

$$r(t) = C_1 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \beta t + C_2.$$

La forma delle traiettorie dipende, dunque, dal segno di  $\alpha$  ed è mostrata nelle figure seguenti.



**Figura 8.10** Autovalori complesso-coniugati: (a)  $\alpha < 0$ , (b)  $\alpha = 0$ , (c)  $\alpha > 0$ .

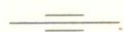
<sup>(2)</sup>Si noti che  $c$  è necessariamente diverso da zero.

Se  $\alpha \neq 0$  le traiettorie sono delle spirali (esponenziali); si dice allora che l'origine è un *fuoco* (asintoticamente stabile se  $\alpha < 0$ , instabile se  $\alpha > 0$ ). Se invece  $\alpha = 0$  le traiettorie sono dei cerchi e si dice che l'origine è un *centro*; il punto critico è in questo caso stabile ma non asintoticamente stabile. Le soluzioni sono periodiche di periodo  $\frac{2\pi}{\beta}$  e si possono esprimere nella forma

$$x(t) = C_1 \cos(\beta t + C_2), \quad y(t) = C_1 \sin(\beta t + C_2).$$

Si noti che questa è la sola possibilità, per un sistema lineare, di avere traiettorie periodiche.

Osserviamo infine che, modificando il segno di  $\beta$  cambia il “verso di avvitaimento” delle orbite. Ciò d'altra parte corrisponde a invertire il ruolo dei due autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .



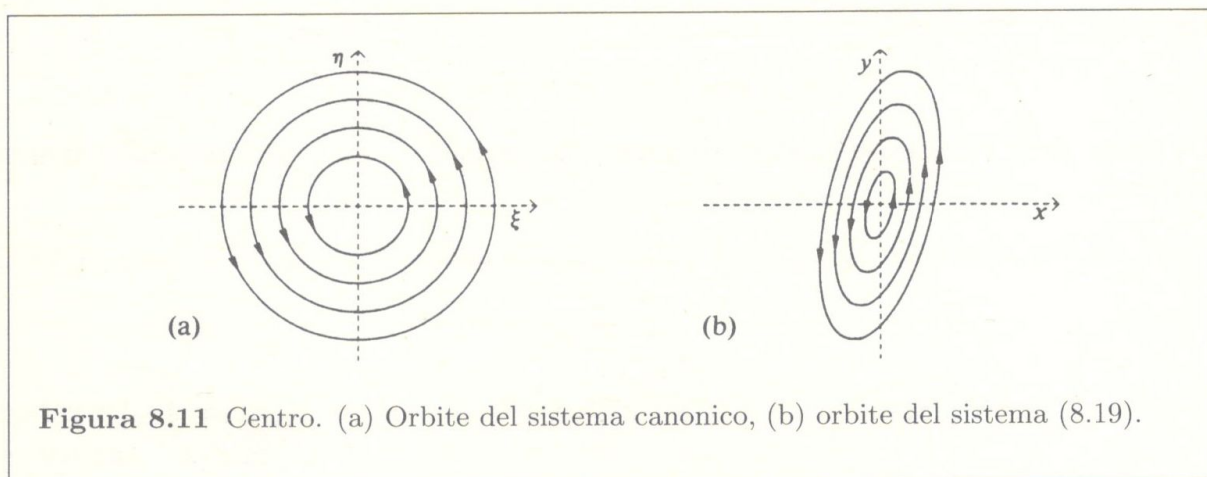
**ESEMPI 8.5 (a)** Il sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x - y \end{cases} \quad (8.19)$$

ha autovalori  $\lambda_1 = 2i$ ,  $\lambda_2 = -2i$ . La trasformazione (8.16) si scrive

$$\xi = 5x - y, \quad \eta = 2y.$$

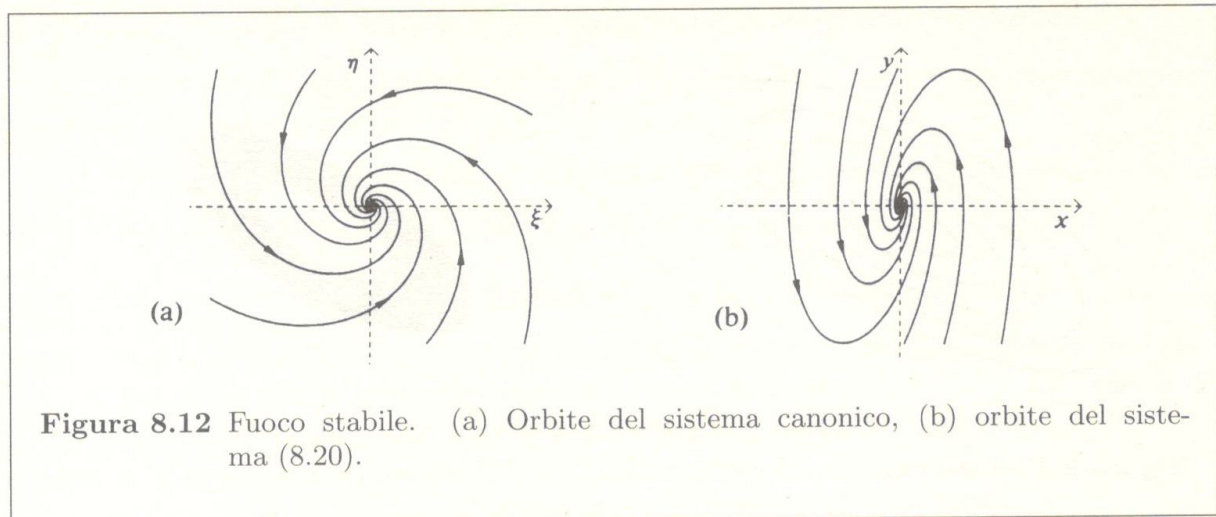
Le orbite del sistema canonico sono i cerchi  $\xi^2 + \eta^2 = k$ ,  $k$  costante, e corrispondono alle ellissi di equazione  $(5x - y)^2 + 4y^2 = 5x^2 - 2xy + y^2 = k$  che sono le orbite del sistema originario (Figura 8.11).



**(b)** Il sistema

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = 5x - 2y \end{cases} \quad (8.20)$$

ha autovalori  $\lambda_1 = -1 + 2i$ ,  $\lambda_2 = -1 - 2i$ . La trasformazione (8.16) è la stessa dell'esempio precedente e consente di descrivere qualitativamente le orbite del sistema



sulla base di quelle del corrispondente sistema canonico (Figura 8.12). Poiché  $\alpha < 0$ , l'origine è un punto critico asintoticamente stabile.



Oltre ai casi citati vi è la possibilità che 0 sia autovalore per la matrice  $A$ ; in tale caso vi sono altri punti stazionari oltre all'origine e tali punti formano una retta oppure sono tutti i punti del piano (Esercizio 8.1.4).

Riassumiamo i risultati ottenuti nel teorema seguente.

**TEOREMA 8.6** Il sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}, \quad ad - bc \neq 0,$$

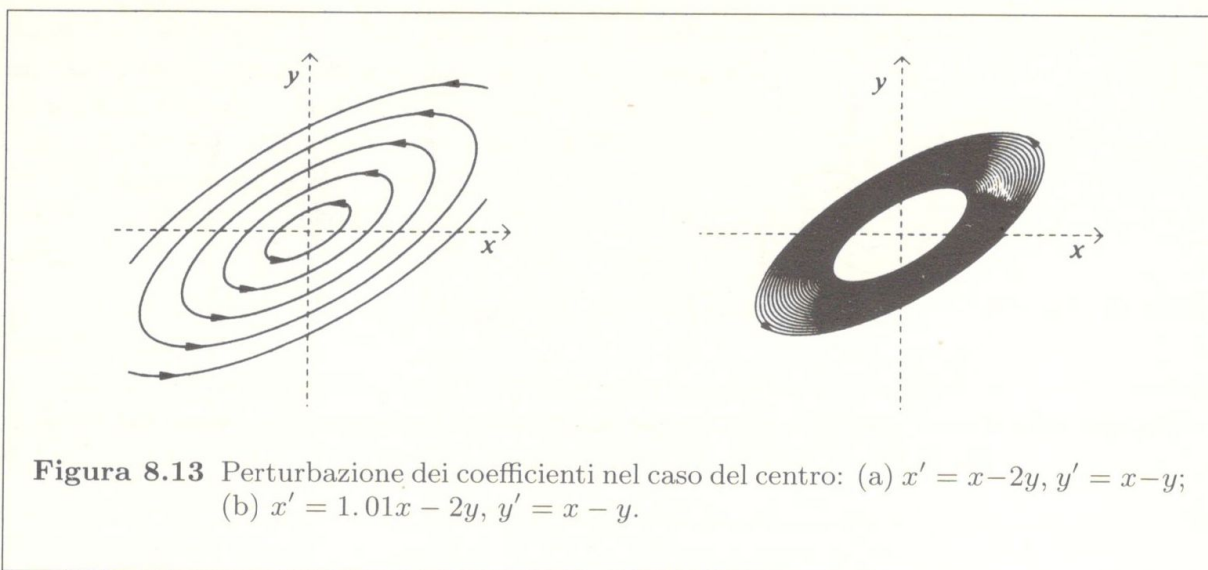
in cui  $a, b, c, d$  sono costanti reali assegnate, ha l'origine come unico punto critico. Tale punto è

- a) stabile se gli autovalori della matrice dei coefficienti sono immaginari puri,
- b) asintoticamente stabile se tali autovalori sono reali ed entrambi negativi, oppure complessi con parte reale negativa,
- c) instabile negli altri casi.

Dalla precedente discussione segue chiaramente che le caratteristiche qualitative e di stabilità del punto critico dipendono unicamente dagli autovalori di  $A$ ; poiché essi sono funzioni degli elementi  $a, b, c, d$  della matrice, è naturale chiedersi in che modo “piccole perturbazioni” dei coefficienti possano influire sulla stabilità delle soluzioni.

Vi sono due casi critici: se gli autovalori di  $A$  sono immaginari puri, le traiettorie sono curve chiuse, ma una piccola perturbazione dei coefficienti può portare tali autovalori fuori dall'asse immaginario e le traiettorie divengono allora spirali (stabili oppure instabili). Le caratteristiche di stabilità del punto stazionario vengono così radicalmente mutate (Figura 8.13).

Un'altra situazione “sensibile” si ha quando gli autovalori sono uguali; anche in questo caso una piccola perturbazione dei coefficienti può far perdere loro questa caratteristica



**Figura 8.13** Perturbazione dei coefficienti nel caso del centro: (a)  $x' = x - 2y$ ,  $y' = x - y$ ; (b)  $x' = 1.01x - 2y$ ,  $y' = x - y$ .

e, per esempio, far divenire tali autovalori una coppia di numeri complesso-coniugati  $\alpha \pm i\beta$ . Comunque piccolo sia  $\beta$  le traiettorie divengono allora spirali, mutando radicalmente comportamento. Si noti, tuttavia, che in questo ultimo caso vengono conservate le proprietà di instabilità o di asintotica stabilità del punto stazionario.

## ESERCIZI

**8.1.1** Sostituire ognuna delle seguenti equazioni differenziali con un sistema equivalente di equazioni del primo ordine:

(a)  $x'' - t^2 x' - tx = 0$  (si ponga  $x' = y$ );

(b)  $x''' = x'' - t^2(x')^2$  (si ponga  $y = x'$ ,  $z = y'$ ).

**8.1.2** Dai sistemi di equazioni differenziali del primo ordine dati, si ricavi una singola equazione differenziale di ordine superiore:

(a)  $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$ , (b)  $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$ .

**8.1.3** Descrivere la natura del punto critico  $(0,0)$  dei seguenti sistemi lineari e studiarne la geometria delle orbite:

(a)  $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$ , (b)  $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = -\frac{1}{4}y \end{cases}$ ,

(c)  $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$ , (d)  $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x - y \end{cases}$ .

**8.1.4** Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

con  $ad - bc = 0$ ; si provi che si verifica una delle seguenti situazioni:

- (a) vi è una retta di punti critici, le orbite sono rettilinee e si avvicinano oppure si allontanano da essa per  $t \rightarrow +\infty$ ,
- (b) vi è una retta di punti critici e le orbite sono rettilinee e a essa parallele,
- (c) ogni punto del piano è punto critico.

**8.1.5** Integrare esplicitamente i sistemi (a), (b), (c) dell'Esercizio 8.1.3.

**8.1.6** Due specie animali vivono nella medesima "nicchia" ecologica e sono in competizione per il cibo. Indicando con  $x$  e  $y$  la popolazione (o la densità di popolazione) delle due specie, il più semplice modello è dato da

$$\begin{cases} x' = ax - by, & x(0) = x_0 > 0 \\ y' = cy - dx, & y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

dove  $a, b, c, d$  sono costanti positive. Discutere la stabilità del punto di equilibrio non nullo e studiare il comportamento qualitativo delle soluzioni al variare dei dati.

Integrare esplicitamente il sistema e, in particolare, scrivere le soluzioni nel caso  $a = c = 2$ ,  $b = 0,2$ ,  $d = 0,1$ ,  $x_0 = 100$ ,  $y_0 = 200$  determinando se una delle due specie si estingue.

**8.1.7** Se il sistema lineare a coefficienti costanti non è omogeneo, ma il termine noto non è troppo complicato, si può usare il *metodo dei coefficienti indeterminati* (v. pag. 324): prima si risolve il sistema omogeneo autonomo, poi si cerca una soluzione particolare del sistema completo.

Risolvere i seguenti sistemi, con le condizioni a fianco indicate:

$$(a) \quad \begin{cases} x' = -x + 4y + e^{3t} & x(0) = 0 \\ y' = -x + 3y - 1 & y(0) = 0 \end{cases}$$

(si cerchi la soluzione particolare del sistema non omogeneo nella forma  $\bar{x} = A + Be^{3t}$ ,  $\bar{y} = C + De^{3t}$ );

$$(b) \quad \begin{cases} x' = -x + 4y + \cos t & x(0) = 0 \\ y' = -x + 3y & y(0) = 0 \end{cases}$$

( $\bar{x} = A \cos t + B \sin t$ ,  $\bar{y} = C \cos t + D \sin t$ );

$$(c) \quad \begin{cases} x' = x + 2y + e^{-t} & x(0) = 0 \\ y' = 2x + y & y(0) = 0 \end{cases}$$

( $\bar{x} = (At + B)e^{-t}$ ,  $\bar{y} = (Ct + D)e^{-t}$ );

$$(d) \quad \begin{cases} x' = x + 2y + e^t & x(0) = 0 \\ y' = 2x + y + 1 & y(0) = 0. \end{cases}$$

8.1.8 Si consideri l'equazione delle *oscillazioni smorzate*

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \mu \frac{du}{dt} + ku = 0;$$

si scriva un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine per  $x = u$ ,  $y = \frac{du}{dt}$  e si studi la stabilità del punto critico  $(0,0)$  in funzione dei parametri  $m$ ,  $\mu$ ,  $k$ . Si effettui una analisi simile anche per l'equazione del *circuito oscillante*

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0.$$

8.1.9 Trovare la soluzione generale del sistema

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y. \end{cases}$$

Mostrare che una qualunque equazione lineare di ordine superiore ricavata dal sistema non è equivalente a esso.

## 8.2 Sistemi non lineari

Nella sezione precedente si è visto come si possa descrivere, sulla base degli autovalori della matrice dei coefficienti, il comportamento di un sistema lineare a coefficienti costanti. Scopo di questo paragrafo è quello di mostrare come si possa studiare il comportamento *locale* delle orbite di un sistema non lineare usufruendo di queste tecniche lineari.

### IL TEOREMA DI LINEARIZZAZIONE

Consideriamo un sistema non lineare

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \quad (8.21)$$

e supponiamo che vi sia un punto critico *isolato*; con una opportuna traslazione si può allora supporre che tale punto sia l'origine:

$$f(0,0) = g(0,0) = 0,$$

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 \neq 0 \quad \text{per} \quad 0 < x^2 + y^2 < r^2.$$

Scriviamo la (8.21) nella forma seguente

$$\begin{cases} x' = ax + by + \varphi(x,y) \\ y' = cx + dy + \psi(x,y) \end{cases} \quad (8.22)$$

e facciamo l'ipotesi

$$\varphi(x,y) = o(r), \quad \psi(x,y) = o(r) \quad \text{per} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0. \quad (8.23)$$



Per esempio, supponendo  $f$  e  $g$  regolari, basterà sviluppare tali funzioni con la formula di Taylor di centro  $(0,0)$ ; si avrà dunque

$$a = f_x(0,0), \quad b = f_y(0,0), \quad c = g_x(0,0), \quad d = g_y(0,0). \quad (8.24)$$

Il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (8.25)$$

con  $a, b, c, d$  dati da (8.24) si dice *sistema linearizzato* di (8.21) attorno al punto critico  $(0,0)$ .

Per esempio, per il sistema

$$\begin{cases} x' = x^2 - x + \sin 2y \\ y' = e^y - 1 + 3x \end{cases} \quad (8.26)$$

si ha  $f_x(0,0) = -1$ ,  $f_y(0,0) = 2$ ,  $g_x(0,0) = 3$ ,  $g_y(0,0) = 1$ ; dunque, il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 3x + y. \end{cases}$$

Il comportamento locale delle traiettorie del sistema (8.21) risulta, in certi casi ma non in tutti, strettamente correlato con quello delle traiettorie del corrispondente sistema linearizzato. Per descrivere tale comportamento usando la terminologia adottata per i sistemi lineari nel precedente paragrafo, passiamo a coordinate polari; se  $C : x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  è un'orbita del sistema (8.21) possiamo rappresentarla nel modo seguente

$$C : r = r(t), \quad \omega = \omega(t), \quad r(t) > 0$$

ove  $x(t) = r(t) \cos \omega(t)$ ,  $y(t) = r(t) \sin \omega(t)$ .

Supponiamo che vi sia un intorno  $U$  del punto critico  $(0,0)$  nel quale:

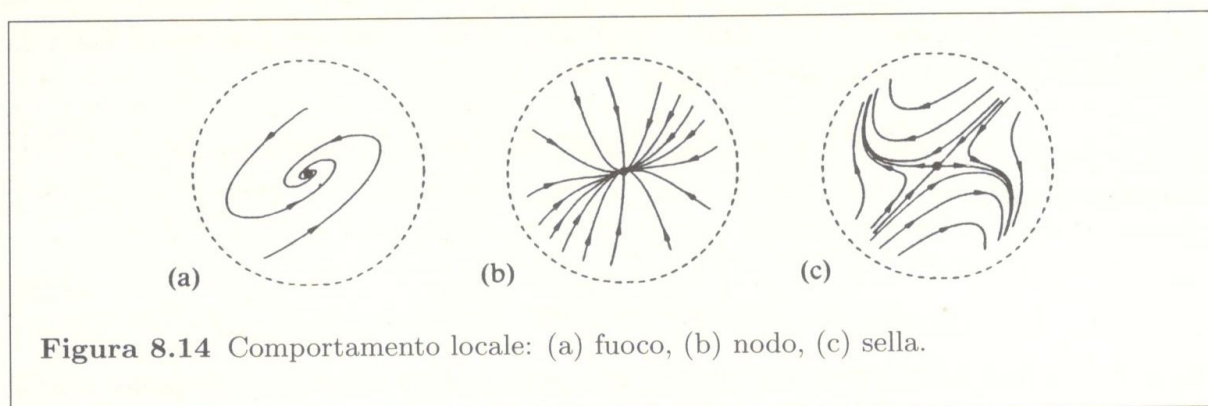
- a) tutte le traiettorie sono definite per ogni  $t$ ,
- b) si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$  oppure  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$ .

Allora se per ogni traiettoria si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\omega(t)| = \infty$  oppure  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\omega(t)| = \infty$  il punto  $(0,0)$  si dice *fuoco* (e sarà *asintoticamente stabile* nel primo caso, *instabile* nel secondo); se per ogni traiettoria, eccettuata una sola, si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = c$ , oppure  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \omega(t) = c$ , ove  $c$  è una certa costante, il punto  $(0,0)$  si dice *nodo* (asintoticamente stabile o instabile).

Se poi vi sono due traiettorie per le quali  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$  e due altre per le quali  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$ , mentre ogni altra traiettoria è definita in un intorno di  $(0,0)$  solo in un intervallo finito  $(t_1, t_2)$ , allora si dice che  $(0,0)$  è *punto di sella*.

È facile riconoscere in queste definizioni l'andamento qualitativo delle orbite descritto per il caso lineare nel paragrafo precedente (Figura 8.14).

Un risultato molto importante è fornito dal teorema seguente.

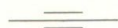


**TEOREMA 8.7** (*di linearizzazione*) Se il sistema non lineare (8.22) ha in  $(0,0)$  un punto critico *isolato* e verifica le condizioni (8.23) si consideri il corrispondente sistema linearizzato (8.25). Se tale sistema ha in  $(0,0)$  un fuoco, un nodo o un punto di sella allora il punto critico  $(0,0)$  è dello stesso tipo anche per il sistema (8.22) e in tali casi si conserva, passando dal sistema dato al suo linearizzato, il carattere di asintotica stabilità o di instabilità.

Si noti che il teorema non contempla il caso in cui il sistema linearizzato ha un centro, e, dunque, i suoi autovalori sono immaginari puri, né il caso in cui tali autovalori sono uguali. Ciò è in accordo, del resto, col fatto che in questi due casi una piccola perturbazione dei coefficienti modifica radicalmente la natura del punto critico di un sistema lineare (Figura 8.13). Il teorema afferma invece che *in tutti gli altri casi* i termini non lineari aggiuntivi  $\varphi(x,y)$ ,  $\psi(x,y)$  non modificano la stabilità né la natura del punto critico e, dunque, tali caratteristiche si possono determinare studiando il sistema linearizzato (8.25), il che è assai più semplice.

Si può anche dimostrare che l'inclinazione con cui le orbite "entrano" o "escono" dal punto critico (nei casi del nodo o del punto di sella) sono le stesse nei due sistemi, ma per il resto, come mostrano gli esempi che studieremo, la forma "globale" delle orbite può essere considerevolmente diversa.

Una ulteriore osservazione: se un punto critico di un sistema *lineare* è asintoticamente stabile, allora non solo le traiettorie che partono vicino a esso si avvicinano al punto critico per  $t \rightarrow +\infty$ , di fatto *tutte* le orbite tendono al punto critico. In questi casi si dice che il punto è *globalmente asintoticamente stabile*. Questa proprietà è, in un certo senso, una prerogativa dei sistemi lineari e non è vera in generale per i sistemi non lineari. Per questi ultimi un problema per niente facile ma di rilevante interesse pratico è quello di determinare o almeno di stimare l'insieme delle condizioni iniziali per le quali il punto critico è asintoticamente stabile. Questo insieme di punti iniziali viene detto *bacino di attrazione* del punto critico.



**ESEMPI 8.8** (a) Sia  $\alpha$  un parametro reale. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = -x + e^{\alpha y} - 1 \\ y' = e^{x-y} - 1. \end{cases} \quad (8.27)$$

Il corrispondente sistema linearizzato nell'origine è

$$x' = -x + \alpha y, \quad y' = x - y;$$

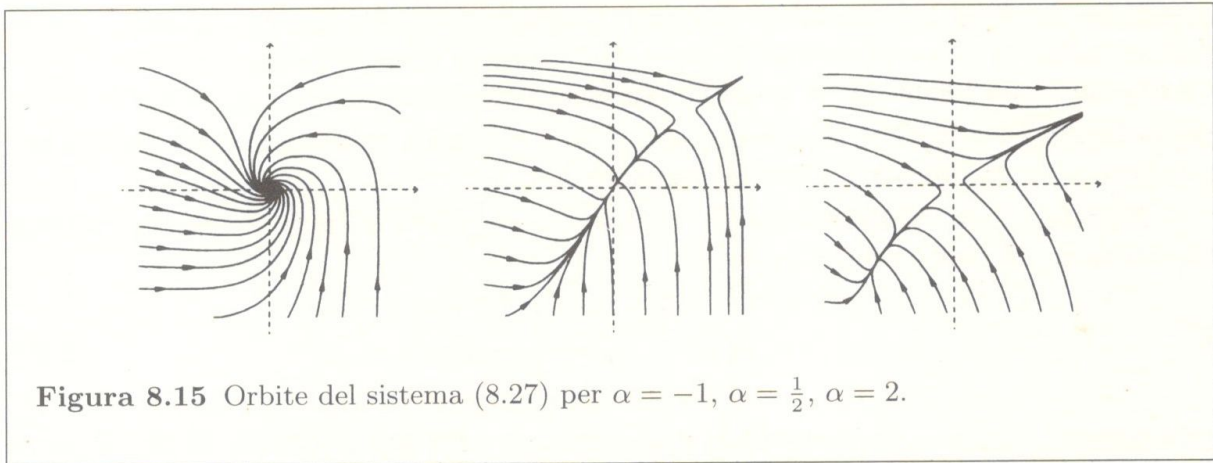
l'equazione caratteristica di questo sistema è

$$(-1 - \lambda)(-1 - \lambda) - \alpha = 0$$

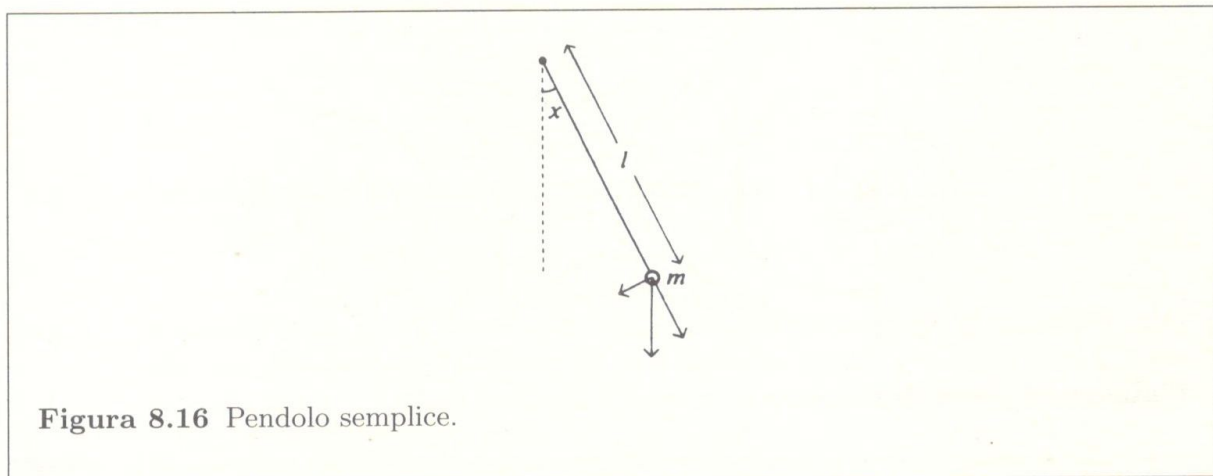
e, dunque, i suoi autovalori sono

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{\alpha} \text{ se } \alpha \geq 0, \quad \lambda = -1 \pm i\sqrt{-\alpha} \text{ se } \alpha < 0.$$

Se  $\alpha < 0$  l'origine è un fuoco asintoticamente stabile, se  $0 < \alpha < 1$  l'origine è invece un nodo asintoticamente stabile, mentre se  $\alpha > 1$  essa è un punto di sella per il sistema (8.27). Il teorema di linearizzazione non consente di concludere alcunché nei casi  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$ .



(b) Un *pendolo semplice* è costituito da una massa  $m$  ancorata a un punto  $O$  da un'asta di peso trascurabile e di lunghezza  $l$  (Figura 8.16).



Se questo sistema si muove in un piano verticale la sua posizione è individuata dall'angolo  $x$  che l'asta forma con la verticale e lo stato del sistema all'istante  $t$  è completamente descritto dalle funzioni  $x(t)$ ,  $y(t) = x'(t)$  che denotano posizione e velocità

(angolare) all'istante  $t$ . Supponendo che sul pendolo agisca una forza viscosa proporzionale a  $x'$ , in base al secondo principio della dinamica, si ricavano subito le equazioni:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ky - \frac{g}{l} \sin x. \end{cases} \quad (8.28)$$

I punti critici del sistema (8.28) sono

$$(n\pi, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Nel punto  $(0,0)$  il sistema linearizzato di (8.28) è

$$x' = y, \quad y' = -\frac{g}{l}x - ky$$

e i suoi autovalori sono  $\frac{1}{2}(-k \pm \sqrt{k^2 - 4g/l})$ .

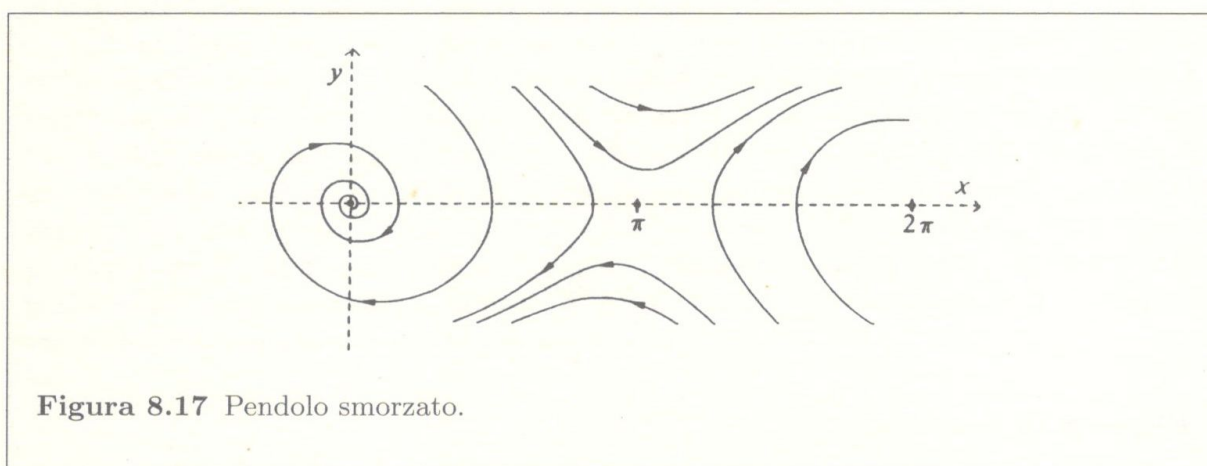
Supponendo  $k^2 < 4g/l$  si ha dunque che  $(0,0)$  è un fuoco asintoticamente stabile per tale sistema e quindi per il sistema originario.

Effettuando il cambiamento di variabile  $x = z + \pi$  si può scrivere il sistema linearizzato nel punto critico  $(\pi, 0)$ :

$$z' = y, \quad y' = \frac{g}{l}z - ky \quad (8.29)$$

e una analisi simile mostra che  $(0,0)$  è un punto di sella per il sistema (8.29), dunque  $(\pi, 0)$  è un punto di sella per il sistema originario.

Si può, pertanto, prevedere un comportamento qualitativo delle orbite del tipo riportato nella Figura 8.17.



Tuttavia con metodi più raffinati è possibile mostrare che il comportamento delle orbite del sistema (8.28) è quello illustrato nella figura seguente, che descrive sia il caso senza attrito ( $k = 0$ ), sia quello con  $k > 0$ , tipico delle oscillazioni smorzate.

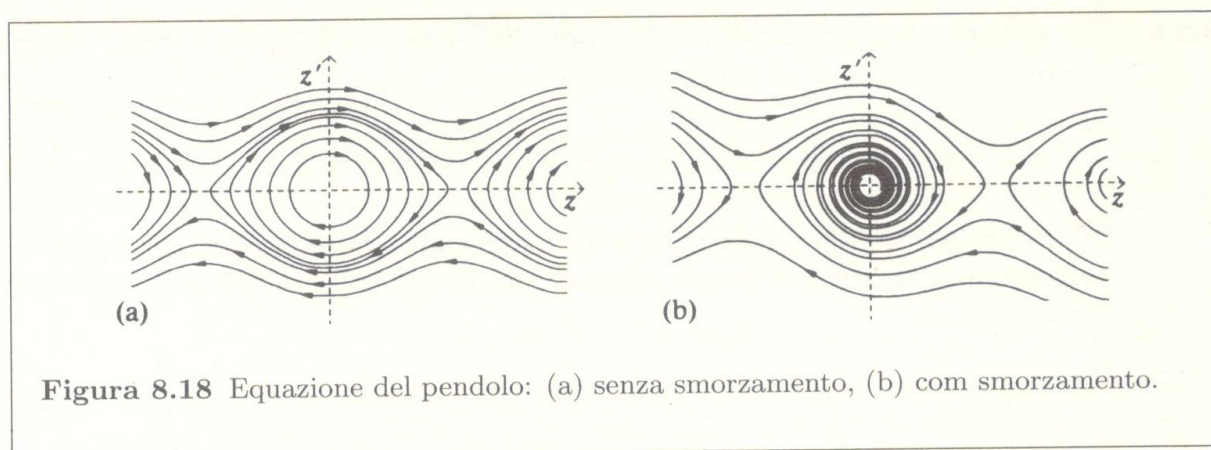


Figura 8.18 Equazione del pendolo: (a) senza smorzamento, (b) con smorzamento.

## ESERCIZI

8.2.1 Trovare i punti critici dei seguenti sistemi, scriverne i corrispondenti sistemi linearizzati e, quando possibile, studiare il comportamento qualitativo delle orbite in un intorno dei punti critici:

$$(a) \begin{cases} x' = y - 3 \\ y' = 2x + 2, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen} x - y, \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x' = -x + y^2 \\ y' = y^2 - 2y, \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x' = 2x - y^2 \\ y' = -y + xy, \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + x^3, \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x' = x - xy \\ y' = xy - y. \end{cases}$$

8.2.2 Descrivere le orbite dei seguenti sistemi:

$$(a) \quad x' = y, \quad y' = x;$$

$$(b) \quad x' = -y - y^3 - x, \quad y' = x;$$

$$(c) \quad x' = 4y, \quad y' = x + xy^2.$$

8.2.3 Descrivere le orbite del seguente sistema:

$$x' = y(1 + x^2 + y^2), \quad y' = -x(1 + x^2 + y^2).$$

8.2.4 Dimostrare che se un sistema di equazioni differenziali ha la soluzione  $x(t)$  ed esistono due numeri  $t_0, T$  con  $T > 0$  tali che sia  $x(t_0 + T) = x(t_0)$ , allora è vero che  $x(t + T) = x(t)$ , cioè la funzione  $x(t)$  è periodica di periodo  $T$ .

8.2.5 Dimostrare che tutte le soluzioni  $x(t), y(t)$  del sistema

$$\frac{dx}{dt} = y(e^x - 1), \quad \frac{dy}{dt} = x + e^y$$

che iniziano nel semipiano  $x \geq 0$  rimangono nel medesimo semipiano.

**8.2.6** Sia  $x(t), y(t)$  una soluzione non costante del sistema non lineare (8.21) con  $f$  e  $g$  ovunque regolari. Si dimostri che se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$$

allora  $(x_0, y_0)$  non è un punto critico del sistema. Se ne deduca che per un tale sistema “occorre un tempo infinito” per raggiungere (o lasciare) un punto critico.

**8.2.7** Dato il sistema

$$x' = -x - \frac{y}{\ln r}, \quad y' = -y + \frac{x}{\ln r}$$

ove  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , si verifichi che  $(0,0)$  ne è un punto critico isolato. Passando a coordinate polari si verifichi che tale punto è un fuoco per il sistema dato ma è un “punto a stella” per il corrispondente sistema lineare.

**8.2.8** Si consideri il sistema

$$x' = -y + xr^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{r}, \quad y' = x + yr^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Provare che il punto  $(0,0)$  è il solo punto critico e i cerchi  $C_n : r = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$  sono orbite.

**8.2.9** La descrizione della competizione tra due specie animali data nell'Esercizio 8.1.6 può essere modificata descrivendo l'effetto negativo sullo sviluppo della popolazione come proporzionale al numero di “incontri” tra gli individui delle due specie. Si arriva allora al modello seguente

$$\begin{cases} x' = ax - \alpha xy, & x(0) = x_0 > 0 \\ y' = by - \beta xy, & y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

dove  $a, b, \alpha, \beta$  sono costanti positive. Discutere la stabilità del punto di equilibrio non nullo e studiare il comportamento qualitativo delle soluzioni al variare dei dati iniziali.

**8.2.10** Verificare che al seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = axy - bx, & x(0) = x_0 > 0 \\ y' = -axy + bx, & y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases}$$

con la condizione  $x + y = N$ , dove  $a, b$  ed  $N$  sono costanti positive, non può essere applicato il teorema di linearizzazione. Ricavare l'equazione autonoma equivalente, studiarla qualitativamente e scriverne esplicitamente le soluzioni. (Si tratta del modello che descrive la diffusione di una malattia infettiva non mortale né immunizzante in una popolazione chiusa di  $N$  individui, dove  $x(t)$  rappresenta il numero degli individui infetti e  $y(t)$  quello dei sani.)