1. INTEGRALE MULTIPLO SECONDO RIEMANN

1.1 Integrale doppio per funzioni definite su un rettangolo

Cominciamo col definire l'integrale doppio secondo Riemann per funzioni definite e limitate su un rettangolo. Il procedimento ricalca quello seguito nella sezione 1, capitolo 8, volume 1, per definire l'integrale di Riemann per funzioni di una variabile, limitate su un intervallo.

Consideriamo il rettangolo $Q = [a, b] \times [c, d]$ e siano $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ suddivisioni di $[a, b]$ e $[c, d]$, rispettivamente, date da

$$\mathcal{D}_1 = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r = b\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{y_0 = c, y_1, \ldots, y_{s-1}, \; y_s = d\} \; .$$

Il prodotto cartesiano $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ è detto *suddivisione* o *partizione* di Q. Relativamente a $\mathcal{D}$ poniamo:

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \text{per} \quad k = 1, \ldots, r$$

$$J_h = [y_{h-1}, y_h], \quad \Delta y_h = y_h - y_{h-1} \quad \text{per} \quad h = 1, \ldots, s \; .$$

Il rettangolo Q risulta decomposto nell'unione degli rs rettangoli $Q_{kh} = I_k \times J_h$.

Consideriamo ora una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$, limitata:

$$m \le f(x, y) \le M \qquad \forall (x, y) \in Q \; . \tag{1.1}$$

Per $k = 1, \ldots, r$ e $h = 1, \ldots, s$ poniamo:

$$m_{kh} = \inf_{Q_{kh}} f \quad , \quad M_{kh} = \sup_{Q_{kh}} f \tag{1.2}$$

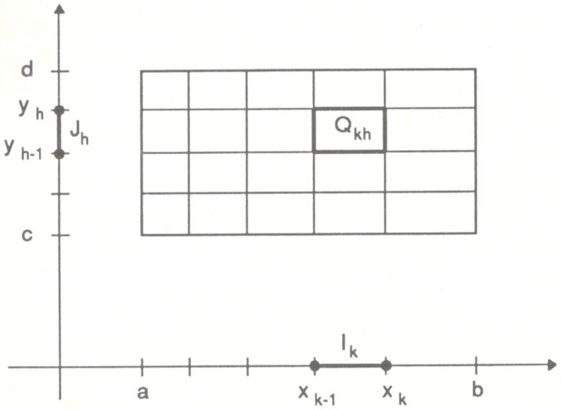


Fig. 5.1

Definiamo le somme inferiore e superiore di f relativamente alla suddivisione $\mathcal{D}$:

$$s = s(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} m_{kh} \Delta x_k \Delta y_h \qquad \textit{(somma inferiore)}$$

$$S = S(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} M_{kh} \Delta x_k \Delta y_h \; . \qquad \textit{(somma superiore)} \; .$$

Osserviamo subito che, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di Q, risulta, in base alle (1.1):

$$m(b-a)(d-c) \leq s(\mathcal{D}, f) \leq S(\mathcal{D}, f) \leq M(b-a)(d-c) \; .$$

Sono perciò ben definite le due quantità

$$\inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) \quad \text{e} \quad \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) \; ,$$

dove estremo inferiore e superiore sono cercati al variare di tutte le possibili suddivisioni di Q.

Inoltre, come nel caso unidimensionale, si può mostrare che

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) \leq \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) \; .$$

Per una assegnata funzione f, due circostanze possono verificarsi:

$$\text{o} \ \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$$

$$\text{o} \ \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) < \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) \; .$$

Definizione 1.1 - *Una funzione $f : Q \to \mathbb{R}$, limitata, si dice integrabile secondo Riemann se $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$.*

Il valore comune di questi due estremi si chiama **integrale** *(di Riemann) di f in Q e si denota con uno dei simboli seguenti:*

$$\mathcal{I}(Q, f), \quad \int_Q f, \quad \iint_Q f, \quad \iint_Q f(x,y)dxdy, \quad \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy \; .$$

Q si chiama *dominio di integrazione* ed f *funzione integranda*. Scriveremo anche $\mathcal{I}(f)$ qualora non sorgano ambiguità circa il dominio di integrazione.

Osserviamo che nella quarta e nella quinta notazione le variabili x ed y sono "mute" e si può usare una qualsiasi altra coppia di variabili, senza cambiare il valore dell'integrale; ad esempio:

$$\iint_Q f(u,v)du\,dv = \iint_Q f(\xi, \eta)d\xi d\eta \; .$$

La classe delle funzioni limitate Riemann-integrabili su Q si indicherà con il simbolo $\mathcal{R}(Q)$.

***Esempio* 1.1** - Ogni costante p è integrabile su qualunque rettangolo $Q = [a,b] \times [c,d]$ e

$$\iint_Q p = p(b-a)(d-c) = p \text{ area}(Q) \, .$$

Infatti, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di Q si ha:

$$s = S = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} p\Delta x_k \Delta y_h = p \sum_{k=1}^{r} \Delta x_k \sum_{h=1}^{s} \Delta y_h = p(b-a)(d-c) \, .$$

***Esempio* 1.2** - Sia $Q = [0,1] \times [0,1]$ ed f la funzione di Dirichlet bidimensionale, ovvero

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in Q, \ x \text{ e } y \text{ razionali} \\ 0 & \text{negli altri punti di } Q \, . \end{cases}$$

Allora, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di Q si ha:

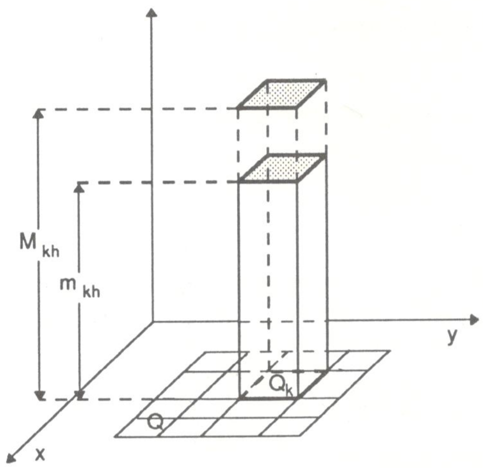
$$s = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} 0 \cdot \Delta x_k \Delta y_h = 0$$

$$S = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} 1 \cdot \Delta x_k \Delta y_h = 1$$

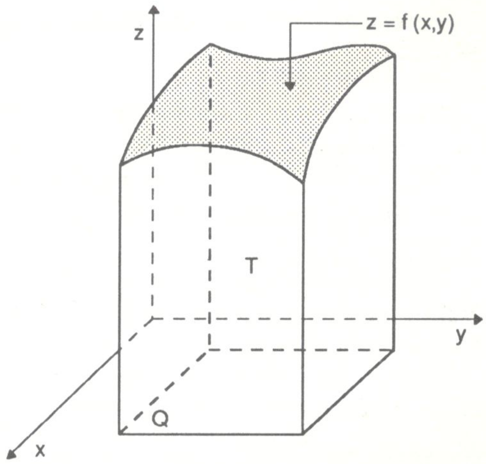
e perciò f *non* è integrabile in Q.

Se $f \in \mathcal{R}(Q)$ e $f \geq 0$ in Q, l'integrale $\iint_Q f$ si può interpretare come *volume* della regione tridimensionale T (detta *cilindroide*) limitata dal basso da Q e dall'alto dal grafico di f (fig. 5.2b). In tale caso, infatti, il generico addendo di $S(\mathcal{D}, f)$ (risp. $s(\mathcal{D}, f)$), dato da $M_{kh}\Delta x_k \Delta y_h$, (risp. $m_{kh}\Delta x_k \Delta y_h$), rappresenta il volume del parallelepipedo di base Q_{kh} ed altezza M_{kh} (risp. m_{kh}). La somma $S(\mathcal{D}, f)$ (risp. $s(\mathcal{D}, f)$) rappresenta dunque il volume di una regione che contiene T (risp. contenuta in T). Essendo $\inf_{\mathcal{D}} S = \sup_{\mathcal{D}} s = \iint_Q f$ è dunque ragionevole interpretare l'integrale come il volume di T.

Si presentano in modo naturale le seguenti questioni:



a) Significato degli addendi nelle somme inferiori e superiori



b) Il "*cilindroide*" T ha come volume $\iint_Q f$.

Fig. 5.2

- stabilire l'integrabilità di una funzione, cioè individuare classi di funzioni integrabili;
- calcolare l'integrale.

Una risposta parziale alla prima questione si trova nel seguito di questo paragrafo, alla seconda nel successivo.

Un criterio necessario e sufficiente di integrabilità è contenuto nel seguente teorema, analogo del teorema 8.1.3., volume 1, con identica dimostrazione, che perciò omettiamo.

▪ **Teorema 1.1** - *Sia* $f : Q \to \mathbb{R}$ *limitata. Allora* $f \in \mathcal{R}(Q)$ *se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una suddivisione* $\mathcal{D}_\varepsilon$ *di* Q *tale che*

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon \,. \tag{1.3}$$

Mediante il teorema 1.1 è facile dimostrare che:

▪ **Teorema 1.2** - *Se* f *è continua in* Q *allora è integrabile in* Q.

Dimostrazione – Per il teorema di Cantor–Heine (Teor. 4.2.7, Vol. 1), f è uniformemente continua, essendo Q un compatto ed è limitata per il teorema di Weierstrass (Teor. 4.2.5, Vol. 1). Fissato $\varepsilon > 0$ esiste dunque δ_ε tale che su ogni sottoinsieme di Q di diametro minore di δ_ε, l'oscillazione di f è minore di ε (*). Scegliamo ora una suddivisione $\mathcal{D}$ in modo tale che i rettangoli in cui viene ripartito Q abbiano diametro minore di δ_ε. Con le solite notazioni, avremo perciò:

(*) Ricordiamo che : oscillazione di f su $E = \sup_E f - \inf_E f$.

oscillazione di f su $Q_{kh} = M_{kh} - m_{kh} < \varepsilon$.

Di conseguenza

$$S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} (M_{kh} - m_{kh}) \Delta x_k \Delta y_h < \varepsilon \cdot \text{area}\,(Q)\ .$$

Per la (1.3) e l'arbitrarietà di ε segue la tesi. □

Come nel caso unidimensionale, è possibile una definizione alternativa di integrale di Riemann, mediante un procedimento di limite su somme in generale diverse da quelle superiori ed inferiori. Lo accenniamo brevemente.

Se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ è una suddivisione di $Q = [a, b] \times [c, d]$, chiameremo *ampiezza* di $\mathcal{D}$ il numero $|\mathcal{D}| := \max\{|\mathcal{D}_1|, |\mathcal{D}_2|\}$ dove $|\mathcal{D}_1| = \max\limits_{k=1,\ldots,r} \Delta x_k$ e $|\mathcal{D}_2| = \max\limits_{h=1,\ldots,s} \Delta y_h$ sono le ampiezze delle suddivisioni di $[a, b]$ e $[c, d]$ rispettivamente.

Introduciamo le *somme di Riemann* mediante la formula

$$\sigma(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} \mu_{kh} \Delta x_k \Delta y_h \tag{1.4}$$

dove μ_{kh} è un qualunque valore compreso tra m_{kh} e M_{kh}.

Per $l \in \mathbb{R}$, diciamo che

$$\lim_{|\mathcal{D}| \to 0} \sigma(\mathcal{D}, f) = l$$

se: per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste* δ_ε *tale che* $|\sigma(\mathcal{D}, f) - l| < \varepsilon$ *per ogni suddivisione* $\mathcal{D}$ *con* $|\mathcal{D}| < \delta_\varepsilon$ *e per ogni scelta dei valori* μ_{kh}.

Sussiste il seguente teorema:

▪ **Teorema 1.3** - *Sia* $f : Q \to \mathbb{R}$, *limitata. Allora* $f \in \mathcal{R}(Q)$ *se e solo se*

$$\lim_{|\mathcal{D}| \to 0} \sigma(\mathcal{D}, f) = l \in \mathbb{R}\ .$$

In tal caso risulta

$$l = \mathcal{I}(f)\ .$$

La dimostrazione è identica a quella del teorema 8.1.4, volume 1.

1.2 Calcolo di un integrale doppio mediante due integrazioni semplici

Il teorema che esponiamo in questo paragrafo permette, sotto opportune ipotesi, di ridurre il calcolo di un integrale doppio a quello di due integrali unidimensionali.

■ **Teorema 1.4** - (di riduzione) *Sia* $f \in \mathcal{R}(Q)$, $Q = [a,b] \times [c,d]$.

a) Se, per ogni $y \in [c,d]$, *esiste l'integrale* $G(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, *allora la funzione* $y \mapsto G(y)$ *è integrabile in* $[c,d]$ *e vale la formula*

$$\iint_Q f = \int_c^d G(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \tag{1.5}$$

b) Se, per ogni $x \in [a,b]$, *esiste l'integrale* $H(x) = \int_c^d f(x,y)dy$, *allora la funzione* $x \mapsto H(x)$ *è integrabile in* $[a,b]$ *e vale la formula*

$$\iint_Q f = \int_a^b H(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \, . \tag{1.6}$$

Anteponiamo alla dimostrazione del teorema alcune osservazioni ed un esempio.

Osservazione 1.1 - Le formule (1.5) e (1.6) prendono il nome di *formule di riduzione*; gli integrali a destra si dicono *integrali iterati*. Se è possibile applicare entrambe le (1.5) e (1.6) si ottiene

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \, , \tag{1.6'}$$

formula di *scambio dell'ordine di integrazione*.

Sottolineiamo che l'esistenza dell'integrale doppio *non* comporta automaticamente l'esistenza degli integrali iterati: questa deve essere provata per poter applicare le formule di riduzione.

Se però f è *continua* su Q (e pertanto integrabile, in base al teorema 1.2) allora, per ogni $y \in [c,d]$, la funzione $x \mapsto f(x,y)$ è continua in $[a,b]$ e perciò integrabile: esiste, cioè $\forall y \in [c,d]$, l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$; analogamente esiste l'integrale $\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$ per ogni $x \in [a,b]$; le ipotesi del teorema sono così verificate ed è possibile utilizzare entrambe le formule (1.5) e (1.6).

Nell'esercizio 1.1 è suggerito un esempio di funzione integrabile sul quadrato $[0,1] \times [0,1]$, per la quale uno dei due integrali iterati non esiste.

Osservazione 1.2 - Un caso interessante si presenta quando $f(x,y) = g(x)h(y)$ (si dice che le variabili sono *separate*). Se $g \in \mathcal{R}(a,b)$ ed $h \in \mathcal{R}(c,d)$ allora $f \in \mathcal{R}(Q)$ e la formula di riduzione vale nella forma seguente:

$$\iint_Q f = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy \, ,$$

cioè $\displaystyle\iint_Q f$ è uguale al prodotto dei due integrali di g ed h.

Osservazione 1.3 - Le formule di riduzione hanno un'interpretazione geometrica che le propone come generalizzazioni del noto principio di Cavalieri–Lagrange.

Consideriamo, ad esempio, la (1.5). Sia $f \geq 0$ in Q. Fissato $\overline{y} \in [c, d]$, $G(\overline{y}) = \int_a^b f(x, \overline{y})dx$ rappresenta l'area della regione (ombreggiata in fig. 5.3) che si ottiene intersecando il cilindroide T, delimitato da Q e dal grafico di f, con il piano $y = \overline{y}$. Il volume di T si ottiene integrando tali aree tra c e d.

***Esempio* 1.3** - Consideriamo la funzione $f(x, y) = x^{-3}e^{y/x}$ nel rettangolo $Q = [1, 2] \times [0, 1]$. Poiché $f \in C(Q)$, possiamo utilizzare le formule (1.5) o (1.6). Vediamo qual è la più conveniente nel presente caso.

Con la (1.5) si deve calcolare prima $\int_1^2 x^{-3}e^{y/x}dx$, mentre con la (1.6) occorre il calcolo di $\int_0^1 x^{-3}e^{y/x}dy$.

Poiché il secondo integrale è immediato, utilizziamo la (1.6).

Si trova

$$x^{-3}\int_0^1 e^{y/x}dy = x^{-3}[xe^{y/x}]_0^1 = x^{-2}[e^{1/x} - 1] .$$

Quindi:

$$\iint_Q f = \int_1^2 x^{-2}[e^{1/x} - 1]dx = [-e^{1/x} + \frac{1}{x}]_1^2 = e - \sqrt{e} - \frac{1}{2} .$$

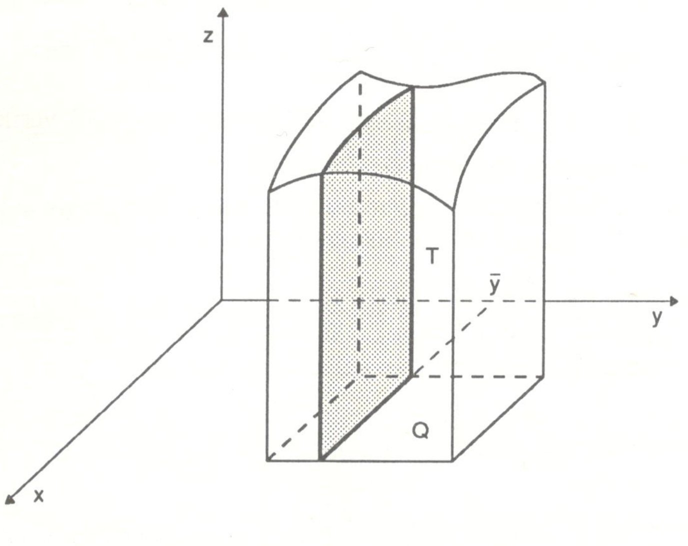


Fig. 5.3 Interpretazione geometrica del Teorema 1.4.

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema 1.4.

Dimostrazione – Dimostriamo solo la (1.5); per la (1.6) si procede in modo analogo. Sia $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ una qualunque suddivisione di Q e siano I_k, J_h, x_k, y_h, Δx_k, Δy_h, m_{kh}, M_{kh} per $k = 1, \dots, r$ e $h = 1, \dots, s$ come nel paragrafo 1.1.

Poiché per ogni $y \in [c, d]$ esiste $G(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y)dx$, la definizione di quest'ultimo integrale implica che

$$\sum_{k=1}^{r} m_k(y)\Delta x_k \leq G(y) \leq \sum_{k=1}^{r} M_k(y)\Delta x_k \tag{1.7}$$

dove abbiamo posto $m_k(y) = \inf\limits_{x \in I_k} f(x, y)$ e $M_k(y) = \sup\limits_{x \in I_k} f(x, y)$.

Essendo f limitata, lo è anche G.

Consideriamo ora, relativamente alla partizione $\mathcal{D}_2$ di $[c, d]$, le somme superiori ed inferiori di G:

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}_2, G) &= \sum_{h=1}^{s} \Gamma_h \Delta y_h \qquad \text{dove } \Gamma_h = \sup_{J_{\cancel{k}\,h}} G(y) \\ s(\mathcal{D}_2, G) &= \sum_{h=1}^{s} \gamma_h \Delta y_h \qquad \text{dove } \gamma_h = \inf_{J_{\cancel{k}\,h}} G(y)\ . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Dalla (1.7) otteniamo, osservando che $\sup\limits_{y \in J_h} M_k(y) = M_{kh}$:

$$\Gamma_h = \sup_{y \in J_h} G(y) \leq \sup_{y \in J_h} \sum_{k=1}^{r} M_k(y)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{r} \sup_{y \in J_h} M_k(y)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{r} M_{kh}\Delta x_k\ .$$

Analogamente, sempre dalla (1.7), osservando che $\inf\limits_{y \in J_h} m_k(y) = m_{kh}$:

$$\gamma_h = \inf_{y \in J_h} G(y) \geq \inf_{y \in J_h} \sum_{k=1}^{r} m_k(y)\Delta x_k \geq \sum_{k=1}^{r} \inf_{y \in J_h} m_k(y)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{r} m_{kh}\Delta x_k\ .$$

Di conseguenza, sostituendo nelle (1.8), otteniamo:

$$S(\mathcal{D}_2, G) \leq \sum_{h=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} M_{kh}\Delta x_k \Delta y_h = S(\mathcal{D}, f)$$

e

$$s(\mathcal{D}_2, G) \geq \sum_{h=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} m_{kh}\Delta x_k \Delta y_h = s(\mathcal{D}, f)\ . \tag{1.9}$$

Dalle (1.9) si deduce che

$$S(\mathcal{D}_2, G) - s(\mathcal{D}_2, G) \leq S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f)\ . \tag{1.10}$$

Sia $\varepsilon > 0$ e si scelga $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ in modo che $S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) < \varepsilon$; ciò è possibile grazie al teorema 1.1. Allora dalla (1.10) si ricava che anche $S(\mathcal{D}_2, G) - s(\mathcal{D}_2, G) < \varepsilon$. Ancora in base al teorema 1.1 deduciamo che $G \in \mathcal{R}(c, d)$. Inoltre dalle (1.9) si ha, per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ di Q:

$$s(\mathcal{D}, f) \leq s(\mathcal{D}_2, G) \leq \int_c^d G(y)dy \leq S(\mathcal{D}_2, G) \leq S(\mathcal{D}, f)$$

che implica $\displaystyle\int_c^d G(y) = \iint_Q f$. □

1.3 Integrale su regioni più generali. Misura di Peano–Jordan

La definizione di integrale doppio per funzioni definite su rettangoli risulta troppo restrittiva per le applicazioni.

In questo paragrafo consideriamo regioni Ω del piano *limitate* e funzioni $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *limitate*.

Per utilizzare la definizione di integrale che già conosciamo, racchiudiamo Ω in un rettangolo Q e definiamo una nuova funzione $\tilde{f}$ nel modo che segue:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \in Q \setminus \Omega \,. \end{cases} \tag{1.11}$$

Definizione 1.2 - *Diciamo che f è integrabile in Ω (secondo Riemann) se $\tilde{f}$ è integrabile in Q e poniamo*

$$\mathcal{I}(\Omega, f) = \iint_\Omega f := \iint_Q \tilde{f}\,.$$

La definizione è corretta in quanto né l'integrabilità di f né il valore di $\displaystyle\iint_\Omega f$ dipendono dal rettangolo Q che si usa per racchiudere Ω; la verifica di questa

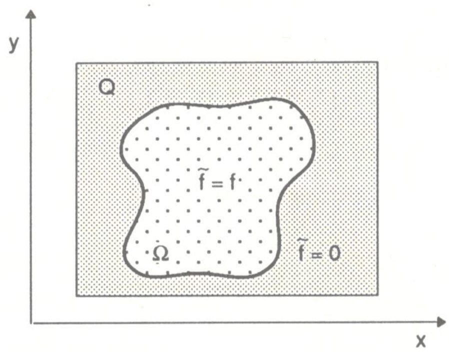


Fig. 5.4

affermazione è molto semplice ed è lasciata al lettore. Indicheremo con $\mathcal{R}(\Omega)$ la classe delle funzioni limitate integrabili in Ω.

La definizione 1.2 è sufficientemente generale. Tuttavia, data l'enorme varietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, si presenta in modo più sostanziale il problema di riconoscere l'integrabilità di una funzione e quello del calcolo dell'integrale.

Per lo sviluppo della teoria è allora conveniente legare l'integrale al problema della *misura* (o area) dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$. Il primo punto da affrontare è stabilire a quali insiemi sia possibile associare un'area.

Avendo a disposizione una nozione di integrale, si può procedere nel seguente modo, che conduce al concetto di misurabilità secondo Peano-Jordan.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, limitato, e sia $\mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Omega(x, y)$ la sua funzione caratteristica (*).

Definizione 1.3 - *Un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, limitato, si dice misurabile (secondo Peano-Jordan) (**) se $\mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{R}(\Omega)$. In questo caso diremo area o misura di Ω e scriveremo $|\Omega|$, il numero non negativo*

$$|\Omega| := \mathcal{I}(\mathbf{1}_\Omega) = \iint_\Omega dxdy \ . \tag{1.12}$$

Evidentemente ogni rettangolo $Q = [a,b] \times [c,d]$ è misurabile e $|Q| = $ $=$ area $(Q) = (b-a)(d-c)$. Si vedrà in seguito che gli insiemi della geometria elementare (poligoni, cerchi, etc..) sono tutti misurabili e l'area secondo la definizione 1.3 coincide con l'area che tutti conoscono.

Un insieme limitato non misurabile secondo Peano–Jordan è l'insieme dei punti del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ con entrambe le coordinate razionali. Nell'esempio 1.2 abbiamo infatti visto che la funzione caratteristica di questo insieme *non* è integrabile.

Ritorneremo nella sezione 2 sulla classe degli insiemi misurabili secondo Peano–Jordan, da un punto di vista più strutturale.

Per lo sviluppo della teoria dell'integrazione, giocano un ruolo importante gli *insiemi di misura nulla.* Dalla definizione 1.3 segue che un insieme Z ha *misura nulla* se $\mathbf{1}_Z$ è integrabile in Z e $\displaystyle\iint_Z dxdy = 0$.

Un'utile e più diretta caratterizzazione degli insiemi di misura nulla è contenuta nella seguente proposizione.

Proposizione 1.5 - *Un insieme $Z \subset \mathbb{R}^2$ è di misura nulla (secondo Peano–Jordan) se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esistono un numero finito N_ε di rettangoli, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{N_\varepsilon}$ tali che*

(*) Cioè $\mathbf{1}_\Omega(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin \Omega \end{cases}$

(**) In questa sezione, parlando di insiemi misurabili, intenderemo sempre "secondo Peano–Jordan", anche se non sarà esplicitamente detto.

i) $$Z \subset \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} Q_j$$

ii) $$\sum_{j=1}^{N_\varepsilon} |Q_j| < \varepsilon.$$

Dimostrazione – Sia $|Z| = 0$ e Q un rettangolo contenente Z. Fissato $\varepsilon > 0$ è possibile trovare una suddivisione $\mathcal{D}$ di Q tale che $S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_Z) < \varepsilon$.

Tra i rettangoli in cui Q resta suddiviso siano $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ quelli che hanno intersezione non vuota con Z. La loro unione contiene Z e $\sum_{j=1}^{N} |Q_j| = S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_Z) < \varepsilon$.

Viceversa, siano $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{N_\varepsilon}$ rettangoli tali che valgano *i)* e *ii)*. Aumentando eventualmente il loro numero possiamo ritenere che i rettangoli Q_j siano a due a due non sovrapposti. Evidentemente Z risulta limitato; sia Q un rettangolo che contiene tutti i Q_j, $j = 1, \ldots, N_\varepsilon$. Sia inoltre $\mathcal{D}$ una suddivisione di Q tale che fra i rettangoli in cui Q è suddiviso vi siano anche i $Q_j, j = 1, \ldots, N_\varepsilon$.

Allora:

$$S(\mathcal{D}, \mathbf{1}_Z) = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} |Q_j| < \varepsilon$$

che implica $|Z| = 0$ in base al teorema 1.1. □

Con una dimostrazione dello stesso stile (Esercizio 2) si prova la seguente caratterizzazione degli insiemi misurabili secondo Peano–Jordan.

Proposizione 1.6 - *Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato è misurabile (secondo Peano–Jordan) se e solo se $\partial\Omega$ è misurabile e $|\partial\Omega| = 0$.*

Esempi

I seguenti sono insiemi di $\mathbb{R}^2$ di misura nulla.

1.4 Un insieme costituito da un numero finito di punti.

1.5 Un segmento di retta.

1.6 Se $Z_1 \subset Z$ e Z ha misura nulla, allora anche Z_1 ha misura nulla.

1.7 L'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla. In particolare il bordo di un poligono di m lati.

Lasciamo la facile verifica al lettore. Un esempio meno elementare è indicato nel seguente enunciato.

Proposizione 1.7 - *Sia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata, integrabile. Allora il suo grafico ha misura nulla.*

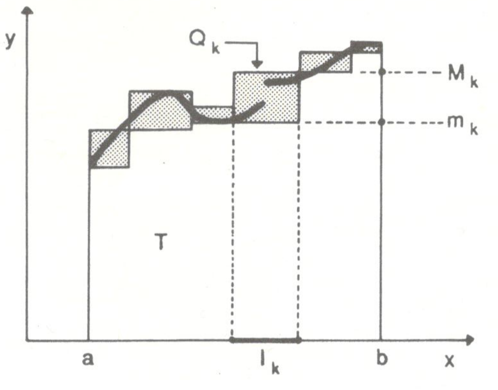


Fig. 5.5

Dimostrazione - Sia $\varepsilon > 0$ e $\mathcal{D}_1 = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r = b\}$ una partizione di $[a,b]$ tale che $S(\mathcal{D}_1, g) - s(\mathcal{D}_1, g) < \varepsilon$. Consideriamo i rettangoli Q_k aventi per base $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ e altezza $[m_k, M_k]$ (fig. 5.5) dove, al solito, $m_k = \inf_{I_k} g$ e $M_k = \sup_{I_k} g$.

Allora $\operatorname{graf}(g) \subset \bigcup_{k=1}^{r} Q_k$ e $\sum_{k=1}^{r} |Q_k| = S(\mathcal{D}_1, g) - s(\mathcal{D}_1, g) < \varepsilon$. Ciò implica che il grafico di g ha misura nulla. □

Osservazione 1.4 - La proposizione 1.7 si estende senza difficoltà alle curve regolari $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. I sostegni di tali curve, come insiemi di punti in $\mathbb{R}^3$ (o in $\mathbb{R}^2$, se la curva è piana) hanno misura nulla. Tale misura non va ovviamente confusa con la *lunghezza* della curva, data dalla formula (1.8) del capitolo 1, che è positiva. La lunghezza di una curva rettificabile è una specie di misura unidimensionale per insiemi che non sono contenuti in una retta.

Dalla proposizione 1.7 segue che il trapezioide T individuato da una funzione g, integrabile in $[a,b]$, è misurabile. Con un ulteriore piccolo sforzo si dimostra poi che se $g \geq 0$, $|T| = \int_a^b g$, in accordo con quanto visto nel capitolo 8, vol. 1.

In particolare, il grafico di una funzione *continua* su un intervallo $[a,b]$ ha misura nulla e risultano misurabili regioni del tipo seguente:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ x \in [a,b] \ , \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \tag{1.13}$$

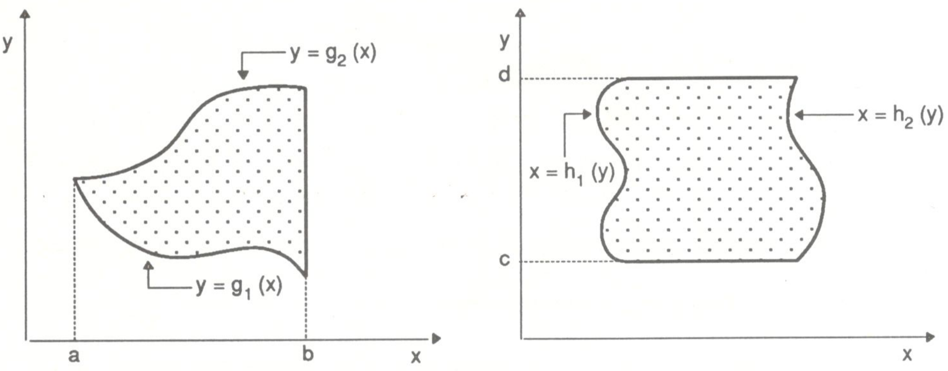
con g_1 e g_2 continue,

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ y \in [c,d], \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} \tag{1.14}$$

con h_1 ed h_2 continue.

Le regioni definite dalle (1.13) e (1.14) si dicono *semplici* (o *normali*) relativamente all'asse y e all'asse x, rispettivamente (fig. 5.6).

Ad esempio, il cerchio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ è una regione semplice rispetto ad entrambi gli assi essendo delimitata dai grafici di $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ o dai grafici di $x = \pm\sqrt{1-y^2}$. Esso è dunque misurabile ed è facile verificare che la sua misura di Peano–Jordan è π.



a) regione semplice relativamente all'asse y b) regione semplice relativamente all'asse x

Fig. 5.6

1.4 Funzioni generalmente continue

Siamo ora in grado di stabilire l'integrabilità di una vasta classe di funzioni per le quali sia anche possibile il calcolo dell'integrale mediante le formule di riduzione. Premettiamo anzitutto la seguente definizione.

Definizione 1.4 - *Sia Q un rettangolo ed $f : Q \to \mathbb{R}$ limitata. Si dice che f è* **generalmente continua** *se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla.*

Vale il seguente risultato.

▪ **Teorema 1.8** - *Sia $f : Q \to \mathbb{R}$, limitata. Se f è generalmente continua allora è integrabile.*

Dimostrazione – Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia Z l'insieme dei punti di discontinuità di f. Poiché $|Z| = 0$ si può trovare una partizione $\mathcal{D}$ di Q tale che:

i) l'unione dei rettangoli che contengono punti di Z ha misura $< \varepsilon$;
ii) sui restanti rettangoli l'oscillazione di f è minore di ε (f è uniformemente continua sull'unione di tali rettangoli).

No!
Bisogna
raffinare ...

Sia $M_1 = \sup_Q |f|$. Allora si può scrivere, con le solite notazioni:

$$S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} (M_{kh} - m_{kh}) \Delta x_k \Delta y_h = \sum_{(i)}\sum \cdots + \sum_{(ii)}\sum \cdot$$

dove le prime somme sono estese agli indici h, k relativi ai rettangoli del tipo i), le seconde sono relative a rettangoli del tipo ii). Abbiamo perciò

$$S(\mathcal{D}, f) - s(\mathcal{D}, f) \leq 2M_1\varepsilon + |Q|\varepsilon \, .$$

Per il teorema 1.1 segue la tesi. □

Dal teorema 1.8 si ricava subito che:

a) *le funzioni continue su un compatto Ω, misurabile, sono integrabili in Ω.*

   Infatti, se Q è un rettangolo contenente Ω ed $\tilde{f}$ estende f a zero in $Q\backslash\Omega$, le sole discontinuità di $\tilde{f}$ sono contenute in $\partial\Omega$ che ha misura zero.

b) *Le funzioni limitate e continue su un aperto Ω misurabile sono integrabili in Ω.*
   Si ragiona esattamente come al punto a).

In particolare vale la seguente proposizione molto usata nelle applicazioni.

Proposizione 1.9 - *Sia Ω una regione semplice rispetto ad uno dei due assi. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è limitata e continua in $\mathring{\Omega}$ (l'interno di Ω) allora è integrabile in Ω e valgono le seguenti formule di calcolo*:

$$\iint_\Omega f = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \quad (\Omega \textit{ semplice rispetto all'asse } y) \tag{1.15}$$

$$\iint_\Omega f = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \quad (\Omega \textit{ semplice rispetto all'asse } x) \tag{1.16}$$

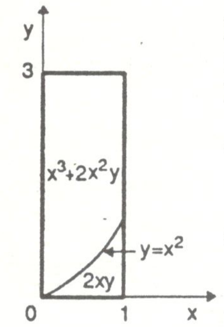
Dimostrazione – L'unica cosa che occorre verificare sono le formule (1.15) e (1.16). Occupiamoci della (1.16). Siano $Q = [\alpha,\beta] \times [c,d] \supset \Omega$ ed $\tilde{f}$ definita come al solito. La funzione $x \mapsto \tilde{f}(x,y)$ ha, per ogni $y \in [c,d]$, due soli punti eventuali di discontinuità e pertanto l'integrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta \tilde{f}(x,y)dx$ esiste per ogni $y \in [c,d]$. D'altra parte, essendo $\tilde{f} = 0$ fuori da Ω, si ha $\displaystyle\int_\alpha^\beta \tilde{f}(x,y)dx = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx.$

Dunque, in base al teorema 1.4:

$$\iint_\Omega f := \iint_Q \tilde{f} = \int_c^d dy \int_\alpha^\beta \tilde{f}(x,y)dx = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \quad \square$$

***Esempio* 1.8** - Siano $Q = [0,1] \times [0,3]$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ definite da:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy & \text{se } y \le x^2 \ , \ (x,y) \in Q \\ x^3 + 2x^2y & \text{se } y > x^2 \ , \ (x,y) \in Q. \end{cases}$$



La funzione è discontinua lungo l'arco di parabola $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, che ha misura zero. Dunque f è integrabile in Q. Per ogni $x \in [0,1]$, la funzione $y \to f(x,y)$ ha un solo punto di discontinuità e perciò $\int_0^3 f(x,y)dy$ esiste per ogni $x \in [0,1]$.

Valgono dunque le ipotesi del teorema 1.4 e possiamo applicare la formula di riduzione (1.6). Si ha:

$$\int_0^3 f(x,y)dy = \int_0^{x^2} 2xy\,dy + \int_{x^2}^3 (x^3 + 2x^2y)dy = 3x^3 + 9x^2 - x^6$$

ed infine

$$\iint_Q f = \int_0^1 (3x^3 + 9x^2 - x^6)dx = \frac{61}{12}\ .$$

***Esempio* 1.9** - Si voglia calcolare il volume del cilindroide delimitato, dall'alto, dal grafico della funzione $z = xy$, sul dominio

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \frac{3}{4}x\ ,\ x^2 + y^2 - 25 \le 0\} \quad \text{(fig. 5.7)}$$

La funzione $z = xy$ è continua sul dominio Ω, semplice rispetto ad entrambi gli assi.

Essendo $xy \ge 0$ su Ω, il volume cercato è $\iint_\Omega xy\,dxdy$.

Utilizziamo per il calcolo la formula (1.16), con $h_1(y) = \frac{4}{3}y$, e $h_2(y) = \sqrt{25 - y^2}$; si ha:

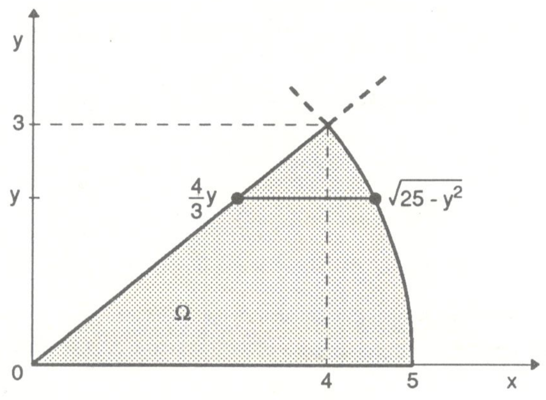


Fig. 5.7

$$\iint_\Omega xydxdy = \int_0^3 dy \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} xydx = \int_0^3 \left[\frac{25}{2}y - \frac{25}{18}y^3\right] dy = \frac{225}{8} .$$

1.5 Proprietà dell'integrale

L'operazione di integrazione "produce" numeri a partire da funzioni. Precisamente, ad ogni funzione $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, Ω limitato in $\mathbb{R}^2$, associa un numero reale. Può essere dunque considerata come un'applicazione (un *funzionale*) da $\mathcal{R}(\Omega)$ in $\mathbb{R}$.

Presentiamo in questo paragrafo le proprietà fondamentali di questa applicazione.

■ **Teorema 1.10** - *Siano* $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Linearità: $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(\Omega)$ *e*

$$\iint_\Omega (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_\Omega f + \beta \iint_\Omega g .$$

2. Monotonia:

i) $f \geq g \Rightarrow \iint_\Omega f \geq \iint_\Omega g$.

ii) $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$ *e si ha* $\left| \iint_\Omega f \right| \leq \iint_\Omega |f|$.

In particolare, se Ω *è misurabile e* $M_1 = \sup_\Omega |f|$,

$$\left| \iint_\Omega f \right| \leq M_1 |\Omega| . \tag{1.17}$$

3. Teorema della media:

i) Se Ω *è misurabile e* $m = \inf_\Omega f$, $M = \sup_\Omega f$ *si ha:*

$$m \leq \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega f \leq M$$

($\frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega f$ *si chiama valor medio di* f *su* Ω).

ii) Se Ω *è misurabile compatto e connesso e se* $f \in C(\Omega)$ *allora esiste* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *tale che*

$$\frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega f = f(x_0, y_0) .$$

La dimostrazione può essere effettuata sulla falsariga di quella del teorema 8.1.8 (Vol. 1) con gli ovvi cambiamenti dovuti alla dimensione 2. Lasciamo i dettagli al lettore.

Un'altra importante proprietà riguarda l'additività rispetto al dominio di integrazione.

Proposizione 1.11 - *Siano Ω_1 ed Ω_2 domini limitati in $\mathbb{R}^2$ tali che $\Omega_1 \cap \Omega_2$ sia un insieme di misura nulla. Se f è integrabile su Ω_1 e su Ω_2 allora è integrabile su $\Omega_1 \cup \Omega_2$ e vale la formula*

$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f = \iint_{\Omega_1} f + \iint_{\Omega_2} f \,. \tag{1.18}$$

Dimostrazione – Sia $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Allora si ha: $f = f\mathbf{1}_{\Omega_1} + f\mathbf{1}_{\Omega_2} - f\mathbf{1}_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.
Le funzioni $f\mathbf{1}_{\Omega_1}$ e $f\mathbf{1}_{\Omega_2}$ sono integrabili su Ω ed inoltre $\iint_{\Omega} f\mathbf{1}_{\Omega_1} = \iint_{\Omega_1} f$, $\iint_{\Omega} f\mathbf{1}_{\Omega_2} =$
$= \iint_{\Omega_2} f$. Osserviamo poi, che essendo $\Omega_1 \cap \Omega_2$ misurabile con misura nulla, dalla (1.17) si deduce $\iint_{\Omega} f\mathbf{1}_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \iint_{\Omega_1 \cap \Omega_2} f = 0$.
Dalla 1. dello stesso teorema si deduce facilmente la (1.18). □

Si noti come la proposizione 1.11 non sia invertibile; ad esempio, sia f la funzione caratteristica del quadrato $[0,1] \times [0,1]$ ovviamente integrabile; tuttavia se Ω_1 è l'insieme dei punti a coordinate razionali e Ω_2 il suo complementare (rispetto al quadrato), si vede che $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, e quindi $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$, ma f non è integrabile su Ω_1 né su Ω_2.
Vale però la seguente proposizione, molto utile nelle applicazioni.

Proposizione 1.12 - *Siano $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ misurabili tali che $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e* $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$.

Se $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ allora $f \in \mathcal{R}(\Omega_1) \cap \mathcal{R}(\Omega_2)$ e vale la (1.18).

Per la dimostrazione si veda l'esercizio 12.

Supponiamo ora che la funzione integranda dipenda, oltre che dalle variabili di integrazione, anche da un parametro t (eventualmente un vettore di parametri). Una volta effettuata l'integrazione si trova una funzione di tale parametro:

$$\phi(t) = \iint_{\Omega} f(x, y, t)\,dx\,dy \,.$$

È importante stabilire se valgono per $\phi(t)$ proprietà quali la continuità e la derivabilità e se le operazioni di limite e di derivazione si possono scambiare con quella di integrazione. Raduniamo i principali risultati in un unico teorema nel quale il lettore non mancherà di riscontrare la forte analogia con i teoremi del paragrafo 8.1.8 (Vol. 1) e quelli del capitolo 3 sull'argomento.

▪ **Teorema 1.13** - *Sia $f : \Omega \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto limitato e $f \in \mathcal{R}(\Omega)$,* $\forall t \in [a,b]$.