

a) Se  $t \mapsto f(x, y, t)$  è continua in  $[a, b]$ , uniformemente rispetto ad  $(x, y) \in \Omega$ , allora, se  $t_0 \in [a, b]$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \iint_{\Omega} f(x, y, t) dx dy = \iint_{\Omega} f(x, y, t_0) dx dy.$$

b) Se  $t \mapsto f(x, y, t)$  e  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t)$  sono continue in  $[a, b]$ , uniformemente rispetto ad  $(x, y) \in \Omega$  e  $\frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{R}(\Omega)$ ,  $\forall t \in [a, b]$  allora

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} f(x, y, t) dx dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) dx dy.$$

Le ipotesi del teorema 1.13 sono verificate se, ad esempio,  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial t} \in C(\bar{\Omega} \times [a, b])$ .

La dimostrazione del teorema 1.13 è identica a quella dei teoremi citati del capitolo 8 (Vol. 1) e perciò la omettiamo.

## 1.6 Cambiamento delle variabili di integrazione

L'obiettivo del presente paragrafo è esaminare il comportamento dell'integrale rispetto ai cambiamenti di variabili nel piano. Ciò conduce ad una generalizzazione della formula (1.35) del Capitolo 8, Vol. 1, (metodo di sostituzione per l'integrale unidimensionale) che costituisce un importante strumento per il calcolo degli integrali.

Se ne ricaverà altresì un'interessante interpretazione del determinante Jacobiano di una trasformazione del piano in sé.

Consideriamo nel piano un aperto limitato  $\Omega$  ed una trasformazione biunivoca  $T: \Omega \leftrightarrow T(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$  assegnata dalle seguenti formule:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \quad (1.19)$$

o anche, in forma compatta,

$$\mathbf{T}(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v)).$$

Sia ora  $A$  un aperto misurabile, tale che  $\bar{A} \subset T(\Omega)$  e  $f: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Ci si chiede come si trasforma l'integrale

$$\iint_A f(x, y) dx dy \quad (1.20)$$

operando la trasformazione di variabili (1.19).

Intuitivamente ci si aspetta un integrale esteso a  $S = T^{-1}(A)$  mentre  $f(x, y)$  si trasforma in  $\bar{f}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ . Il punto chiave sta nel capire come si trasforma "l'elemento d'area"  $dx dy$ .

Contrariamente a quanto ingenuamente ci si potrebbe aspettare  $dx dy$  non si trasforma nel prodotto  $d\varphi d\psi$ . Per arrivare alla corretta formula lasciamoci guidare dal caso *lineare*, dal caso cioè in cui  $T$  è una trasformazione lineare. Fissata la base canonica in  $\mathbb{R}^2$ ,  $T$  è allora rappresentata da una matrice  $M$  e, invece della (1.19), possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Se ora  $Q$  è un rettangolo nel piano  $u, v$ , individuato dai vettori  $v_1, v_2$ ,  $T(Q)$  sarà un parallelogramma individuato dai vettori  $w_1 = Mv_1, w_2 = Mv_2$ .

Dall'algebra lineare è noto (\*) che

$$\text{area}(T(Q)) = |\det M| \cdot \text{area}(Q). \quad (1.22)$$

Se invece di un'applicazione lineare ne abbiamo una *affine* (composizione di una lineare e di una traslazione), cioè del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

la formula (1.22) rimane inalterata.

Ritorniamo alla (1.19) e consideriamo un rettangolo  $Q \subset \Omega$ . Nasce subito un problema:  $T(Q)$  sarà misurabile? Supponiamo per il momento che lo sia e cerchiamo di calcolare  $|T(Q)|$  sfruttando la (1.22). L'idea è di approssimare  $T$  con una trasformazione lineare o affine nel miglior modo possibile. Sapendo, però, che tale approssimazione avrà carattere locale, supponiamo che  $Q$  sia di dimensioni  $du, dv$  molto piccole ("infinitesime", direbbero i pionieri del calcolo integrale).

Su  $Q$  approssimiamo  $T$  mediante la trasformazione affine  $L$  assegnata dalle formule seguenti, dove  $(u_0, v_0) \in Q$ :

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \varphi(u_0, v_0) + \varphi_u(u_0, v_0)(u - u_0) + \varphi_v(u_0, v_0)(v - v_0) \\ y(u, v) &= \psi(u_0, v_0) + \psi_u(u_0, v_0)(u - u_0) + \psi_v(u_0, v_0)(v - v_0). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Si noti che la (1.23) si può scrivere nella forma  $L = T(u_0, v_0) + dT(u_0, v_0)$ .

Ad  $L$  corrisponde la matrice

$$J = \begin{pmatrix} \varphi_u(u_0, v_0) & \varphi_v(u_0, v_0) \\ \psi_u(u_0, v_0) & \psi_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{array}{l} \text{Jacobiana della trasformazione } T \\ \text{nel punto } (u_0, v_0) \end{array}$$

Euristicamente, abbiamo:

(\*) Si veda comunque l'esercizio 20.

$$dxdy \approx \text{area}(\mathbf{T}(Q)) \approx \text{area}(\mathbf{L}(Q)) = |\det \mathbf{J}| \text{area}(Q) = \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv. \quad (1.24)$$

Ci aspettiamo dunque che l'integrale (1.20) si trasformi nell'integrale

$$\iint_S \bar{f}(u, v) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Tutto funziona bene se valgono le seguenti ipotesi su  $\mathbf{T}$ :

- i)  $\mathbf{T} \in C^1(\Omega)$ ; vale a dire:  $\varphi$  e  $\psi$  sono differenziabili con continuità in  $\Omega$ ;
- ii) Lo jacobiano della trasformazione *non* si annulla in  $\Omega$ ; vale a dire

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Si noti che se valgono i) e ii), in base al teorema di inversione locale (Teor. 7.2.3, Vol. 1),  $\mathbf{T}$  trasporta punti interni in punti interni e quindi  $\mathbf{T}(\Omega)$  è aperto. Di conseguenza  $\mathbf{T}^{-1}$  ha le stesse proprietà di  $\mathbf{T}$ .

Vale il seguente risultato.

■ **Teorema 1.14** - Sia  $\mathbf{T} : \Omega \rightarrow \mathbf{T}(\Omega)$ ,  $\Omega$  aperto in  $\mathbb{R}^2$ , una applicazione biunivoca, soddisfacente i) e ii). Sia  $S$  un insieme tale che  $\bar{S} \subset \Omega$ . Allora:

- a)  $S$  è misurabile se e solo se  $\mathbf{T}(S)$  è misurabile.
- b) Se  $S$  è misurabile e  $f \in C(\mathbf{T}(\bar{S}))$ , vale la formula

$$\iint_{\mathbf{T}(S)} f(x, y) dxdy = \iint_S \bar{f}(u, v) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv. \quad (1.25)$$

La dimostrazione del teorema, piuttosto complessa, è riportata alla fine del paragrafo.

Prima di dare esempi di applicazione del teorema 1.14 è opportuna qualche osservazione.

*Osservazione 1.5* - Nei casi concreti  $\Omega$  e  $\mathbf{T}(\Omega)$  sono spesso aperti misurabili. In tal caso, se  $\mathbf{T}$  e le sue derivate sono *continue e limitate* in  $\Omega$ , a) vale senza l'ipotesi  $\bar{S} \subset \Omega$  e b) vale se  $f$  è *continua e limitata* in  $\mathbf{T}(S)$ . Si può poi ammettere che l'ipotesi di biunivocità di  $\mathbf{T}$  e l'ipotesi ii) valgano su  $\Omega$  eccetto *un insieme di misura nulla*. In tal caso è ancora vero che, se  $S \subset \Omega$  è misurabile, allora  $\mathbf{T}(S)$  è misurabile e continua a valere la (1.25).

La dimostrazione di questi fatti si ottiene modificando lievemente quella del teorema 1.13.

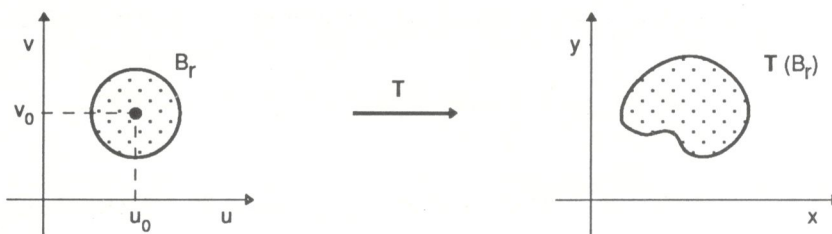


Fig. 5.8

*Osservazione 1.6* - Nella (1.25),  $\left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right|$  rappresenta un *fattore locale di ingrandimento per le aree*. Ciò si mette maggiormente in evidenza considerando un cerchio  $B_r = B_r(u_0, v_0)$ , con centro in  $(u_0, v_0)$  e raggio  $r$  ed il suo trasformato  $\mathbf{T}(B_r)$  (fig. 5.8).

Dalla (1.25) e dal teorema della media (3. ii) del teorema 1.10) si ha:

$$\frac{\text{area}(\mathbf{T}(B_r))}{\text{area}(B_r)} = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B_r} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right|_{u=\bar{u}, v=\bar{v}}$$

dove  $(\bar{u}, \bar{v})$  è un opportuno punto di  $B_r$ .

Ne segue, passando al limite per  $r \rightarrow 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{area}(\mathbf{T}(B_r))}{\text{area}(B_r)} = \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right|_{u=u_0, v=v_0} \quad (1.26)$$

Dunque, il determinante jacobiano in un punto rappresenta il *tasso (puntuale) di variazione relativa dell'area, subordinato alla trasformazione T*.

**Esempio 1.10** - (Coordinate polari).

Sia  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\rho, \theta)$  definita dalle equazioni:

$$x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta$$

$$y(\rho, \theta) = \rho \sin \theta .$$

Abbiamo già incontrato questa trasformazione nella sezione 7.2 (Vol. 1).

Se  $\Omega = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$  allora  $\mathbf{T}(\Omega)$  coincide con il piano privato del semiasse  $y = 0, x \geq 0$ . Poiché  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \rho$  (Esempio 7.2.6 Vol. 1),  $\mathbf{T}$  soddisfa le ipotesi del teorema 1.14.

Se  $A \subset \mathbf{T}(\Omega)$  è misurabile e limitato ed  $f$  continua e limitata su  $A$  si ha, dunque

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbf{T}^{-1}(A)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (1.27)$$

L'elemento d'area in coordinate polari  $\rho d\rho d\theta$  ha un significato intuitivo che invitiamo il lettore ad individuare esaminando la seguente figura:

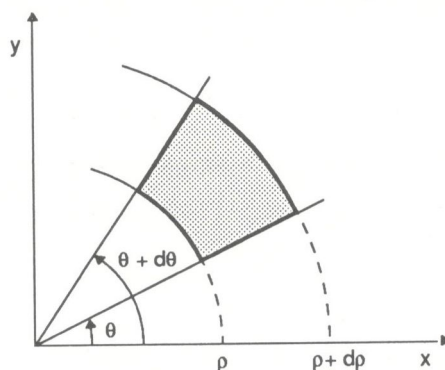


Fig. 5.9 L'area della regione ombreggiata è circa  $\rho d\rho d\theta$ .

Nella (1.27)  $A$  può essere, in realtà, un qualunque sottoinsieme limitato e misurabile del piano. Infatti  $\iint_A f$  non cambia togliendo da  $A$  la sua intersezione con il semiasse reale positivo poiché tale intersezione ha misura nulla.

Applichiamo la (1.27) al caso seguente.

$$\text{Sia } f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}, \quad A = \{(x, y) : 0 < y < \sqrt{3}x, 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

La funzione è continua in  $\bar{A}$ , misurabile, quindi è integrabile.

Passando a coordinate polari si ha (fig. 5.10)

$$S = \mathbf{T}^{-1}(A) = \{(\rho, \theta) : 0 < \theta < \frac{\pi}{3}, 1 < \rho < 2\}$$

e

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{1}{1 + \rho^2}.$$

Pertanto, dalla (1.27):

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \iint_S f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_0^{\pi/3} d\theta \int_1^2 \frac{\rho}{1 + \rho^2} d\rho = \\ &= \frac{\pi}{6} \log \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

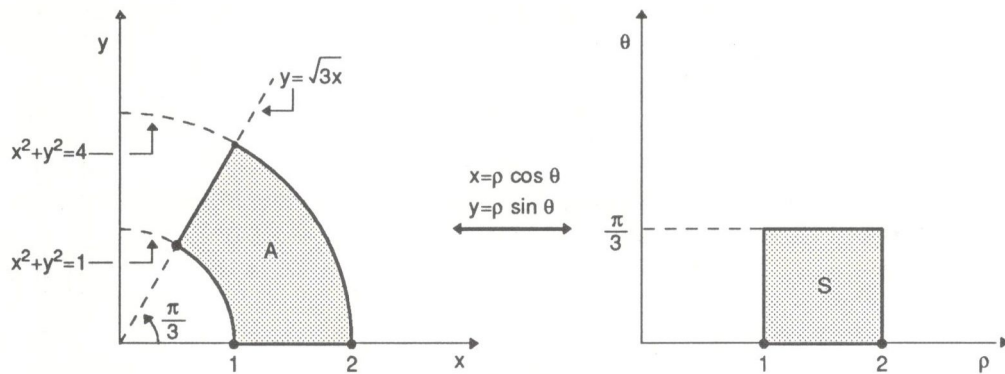


Fig. 5.10 Il rettangolo  $S$  è trasformato nel segmento di corona circolare dal cambiamento a coordinate polari.

**Esempio 1.11** - Si voglia integrare la funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) \log(1 + (x + y)^4)$$

nella regione  $A = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < 2 - x\}$  (fig. 5.11).

Poiché  $f \in C(\bar{A})$ , l'integrale esiste. La forma di  $f$  suggerisce di porre

$$u = x + y \quad \text{e} \quad v = x - y$$

ovvero

$$x = \frac{u+v}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

La trasformazione è lineare e non singolare, rappresentata dalla matrice

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{Dunque} \quad \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = |\det \mathbf{M}| = \frac{1}{2}.$$

La regione  $A$  corrisponde alla regione  $S = \{(u, v) : v < u < 2, u > -v\}$  e  $f(x(u, v), y(u, v)) = uv \log(1 + u^4)$ .

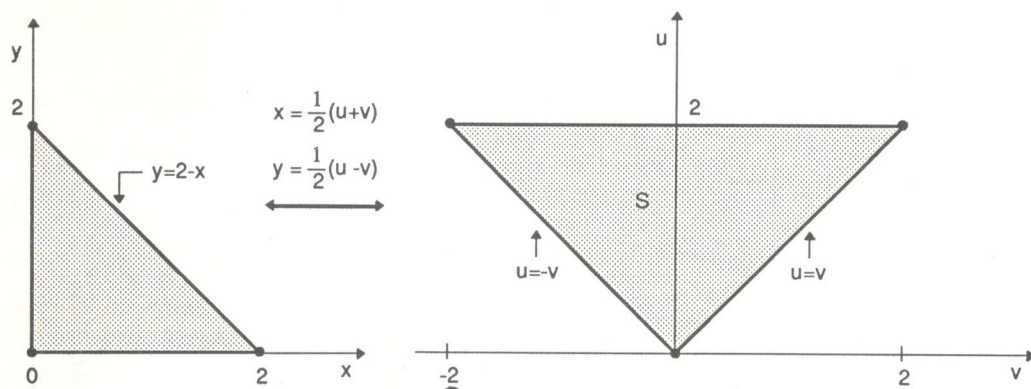


Fig. 5.11

Dalla (1.27):

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \iint_S \frac{1}{2} f(x(u, v), y(u, v)) du dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left( \int_{-u}^u v dv \right) u \log(1 + u^4) du = 0 . \end{aligned}$$

*Dimostrazione del Teorema 1.14* – Essendo un po' complicata la suddividiamo in vari passi. In ciascuno di essi indicheremo con  $K$  una costante tale che  $|\varphi_u|, |\psi_u|, |\varphi_v|, |\psi_v| \leq K$  in  $\bar{S}$ .

1.  $S$  misurabile  $\Leftrightarrow T(S)$  misurabile.

Sia  $S$  misurabile e  $Q \subset \Omega$  un rettangolo. Sia  $\mathcal{D}$  una suddivisione di  $Q$  e siano  $I_{kh}$  i rettangoli della suddivisione, con  $k = 1, \dots, r$  e  $h = 1, \dots, s$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , poiché  $T$  è di classe  $C^1$ , è possibile scegliere  $\mathcal{D}$  in modo tale che l'oscillazione di ciascuna delle derivate  $\varphi_u, \psi_u, \varphi_v, \psi_v$  sia  $< \varepsilon$  su ogni  $I_{kh}$ . Esaminiamo il trasformato di  $I_{kh}$ .

A tale scopo approssimiamo  $T$  su  $I_{kh}$  con la mappa affine  $L_{kh}$  data dalla formula seguente:

$$\varphi_{kh}(u, v) = \varphi(u_k, v_h) + \varphi_u(u_k, v_h)(u - u_k) + \varphi_v(u_k, v_h)(v - v_h)$$

$$\psi_{kh}(u, v) = \psi(u_k, v_h) + \psi_u(u_k, v_h)(u - u_k) + \psi_v(u_k, v_h)(v - v_h)$$

dove  $(u_k, v_h)$  è un vertice di  $I_{kh}$ .

Dato  $(u, v) \in I_{kh}$ , valutiamo la distanza tra  $T(u, v)$  e  $L_{kh}(u, v)$ .

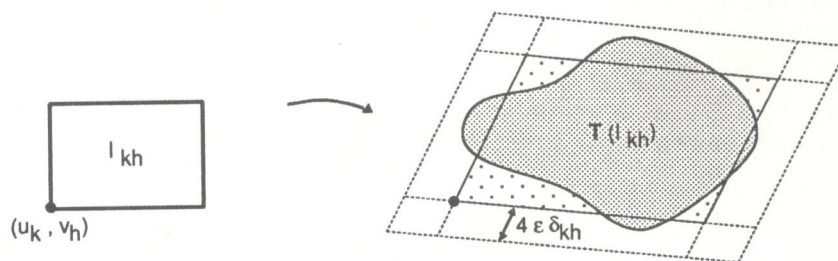


Fig. 5.12. La regione ombreggiata è  $T(I_{kh})$ ; quella indicata dal parallelogramma punteggiato è  $L_{kh}(I_{kh})$ .

Osserviamo che, per il teorema di Lagrange, si ha:

$$\varphi(u, v) = \varphi(u_k, v_h) + \varphi_u(\bar{u}_k, \bar{v}_h)(u - u_k) + \varphi_v(\bar{u}_k, \bar{v}_h)(v - v_h) ,$$

$$(\bar{u}_k, \bar{v}_h) \text{ opportuno in } I_{kh} ,$$

$$\psi(u, v) = \psi(u_k, v_h) + \psi_u(\tilde{u}_k, \tilde{v}_h)(u - u_k) + \psi_v(\tilde{u}_k, \tilde{v}_h)(v - v_h) ,$$

$$(\tilde{u}_k, \tilde{v}_h) \text{ opportuno in } I_{kh} .$$

Dunque,

$$|\varphi(u, v) - \varphi_{kh}(u, v)| \leq |\varphi_u(\bar{u}_k, \bar{v}_h) - \varphi_u(u_k, v_h)| |u - u_k| + \\ + |\varphi_v(\bar{u}_k, \bar{v}_h) - \varphi_v(u_k, v_h)| |v - v_h| \leq 2\varepsilon\delta_{kh}$$

dove  $\delta_{kh}$  = diametro di  $I_{kh}$ .

Analogamente,  $|\psi(u, v) - \psi_{kh}(u, v)| \leq 2\varepsilon\delta_{kh}$ , e quindi  $\|\mathbf{T}(u, v) - \mathbf{L}_{kh}(u, v)\| \leq 4\varepsilon\delta_{kh}$ .

Ciò implica che  $I_{kh}$  viene trasformato in un insieme i cui punti distano da quelli di  $\mathbf{L}_{kh}(I_{kh})$  al massimo di  $4\varepsilon\delta_{kh}$ . Poiché  $\mathbf{L}_{kh}(I_{kh})$  è un parallelogramma di area

$$|\det \mathbf{J}(u_k, v_h)| |I_{kh}|$$

si deduce che  $\mathbf{T}(I_{kh})$  è contenuto in un parallelogramma di area

$$(1 + c\varepsilon) |\det \mathbf{J}(u_k, v_h)| |I_{kh}|,$$

dove  $c$  dipende solo dalla costante  $K$  (\*).

Sia ora  $Z \subset Q$  di misura nulla. Allora  $|\mathbf{T}(Z)| = 0$ . Infatti se  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  sono rettangoli in  $\Omega$  tali che  $\bigcup_{j=1}^N Q_j \supset Z$  e  $\sum_{j=1}^N |Q_j| < \varepsilon$ , si vede che  $\mathbf{T}(Z)$  è contenuto nell'unione dei  $\mathbf{T}(Q_j)$ , e si ha:

$$\sum_{j=1}^N |\mathbf{T}(Q_j)| \leq (1 + c\varepsilon) \max_Q |\det \mathbf{J}| \sum_{j=1}^N |Q_j| \leq \varepsilon(1 + c\varepsilon) \max_Q |\det \mathbf{J}|. \quad (1.28)$$

Dunque, se  $S$  è misurabile in  $\Omega$ ,  $\mathbf{T}(S)$  è misurabile, in quanto  $|\partial S| = 0$  implica  $|\mathbf{T}(\partial S)| = |\partial \mathbf{T}(S)| = 0$ . In particolare  $\mathbf{T}(Q)$  risulta misurabile.

Poiché  $\mathbf{T}^{-1}$  ha le stesse proprietà di  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}(S)$  misurabile  $\Rightarrow \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}(S)) = S$  misurabile.

$$2. \text{ Se } S \text{ è misurabile e } \bar{S} \subset \Omega, |\mathbf{T}(S)| = \iint_S \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right| dudv.$$

Poniamo  $\Delta = |\det \mathbf{J}| = \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right|$ . Per l'additività dell'integrale (e quindi della misura):

$$|\mathbf{T}(Q)| = \sum_{h,k} |\mathbf{T}(I_{kh})| \leq (1 + c\varepsilon) \sum_{k,h} |\det \mathbf{J}(u_k, v_h)| |I_{kh}| \leq \\ \leq \sum_{k,h} \max_{I_{kh}} \Delta |I_{kh}| + c\varepsilon \max_Q \Delta |Q|.$$

(\*) Con un po' di buona volontà si potrebbe calcolare esattamente  $c$ .



Ciò implica, per l'arbitrarietà di  $\epsilon$ , che, essendo  $\sum_{k,h} \text{Max}_{kh} \Delta |I_{kh}|$  una generica somma superiore di  $\Delta$ ,

$$|\mathbf{T}(Q)| \leq \iint_Q \Delta dudv . \tag{1.29}$$

La (1.29) vale anche per  $S$ . Sia infatti  $\tilde{Q}$  un rettangolo contenente  $S$  e si consideri una suddivisione  $\mathcal{D}$  di  $\tilde{Q}$  in rettangoli  $J_{rs}$  in modo che quelli che intersecano  $S$  siano tutti contenuti in  $\Omega$ . Indichiamo con  $J_{rs}^*$  i sottorettangoli di  $\tilde{Q}$  tali che  $J_{rs}^* \cap \partial S \neq \emptyset$ . È possibile fare in modo che  $\sum |J_{rs}^*| < \epsilon$ , essendo  $|\partial S| = 0$ . Considerando poi solo i  $J_{rs}$  interni ad  $S$  (se non ce ne sono allora  $S = \partial S$ ), si ha, usando l'additività della misura e le (1.28) e (1.29):

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}(S)| &\leq \sum |\mathbf{T}(J_{rs})| + \sum |\mathbf{T}(J_{rs}^*)| \leq \sum \iint_{J_{rs}} \Delta dudv + \\ &+ \epsilon(1 + c\epsilon) \max_{\bar{S}} \Delta \leq \iint_S \Delta dudv + \epsilon(1 + c\epsilon) \max_{\bar{S}} \Delta . \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di  $\epsilon$  si deduce

$$|\mathbf{T}(S)| \leq \iint_S \Delta dudv . \tag{1.30}$$

Poiché  $\mathbf{T}^{-1}$  ha le stesse proprietà di  $\mathbf{T}$ , possiamo sostituire  $\mathbf{T}(S)$  ad  $S$  nella (1.30), ottenendo, essendo  $\mathbf{J}_{\mathbf{T}^{-1}} = \mathbf{J}^{-1}$  (e quindi  $\Delta_{\mathbf{T}^{-1}} = \Delta^{-1}$ ), con  $\tilde{\Delta}(x, y) = \Delta(u(x, y), v(x, y))$ :

$$|S| \leq \iint_{\mathbf{T}(S)} \frac{1}{\tilde{\Delta}} dx dy \leq (\min_{\mathbf{T}(S)} \tilde{\Delta})^{-1} |\mathbf{T}(S)|$$

ovvero

$$|\mathbf{T}(S)| \geq |S| \min_{\mathbf{T}(S)} \tilde{\Delta} .$$

Applichiamo quest'ultima disuguaglianza ai rettangoli  $J_{rs}$  interni ad  $S$ , della suddivisione  $\mathcal{D}$  precedentemente considerata. Si ha, essendo  $\sum |J_{rs}^*| < \epsilon$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}(S)| &\geq \sum |\mathbf{T}(J_{rs})| \geq \sum \min_{\mathbf{T}(J_{rs})} \tilde{\Delta} |J_{rs}| = \sum \min_{J_{rs}} \Delta |J_{rs}| = \\ &= s(\mathcal{D}, \Delta) - \sum \min_{J_{rs}^*} \Delta |J_{rs}^*| \geq s(\mathcal{D}, \Delta) - \epsilon \min_{\bar{S}} \Delta . \end{aligned}$$

Essendo  $s(\mathcal{D}, \Delta)$  una generica somma inferiore di  $\Delta$  ne segue  $|\mathbf{T}(S)| \geq \iint_S \Delta dudv$ , che assieme alla (1.29) completa la dimostrazione del punto 2.

3. Sia  $S$  misurabile,  $\bar{S} \subset \Omega$  e  $f \in C(\mathbf{T}(S))$ . Allora vale la fomula (1.25).

Siano  $I_{kh}$  i rettangoli di una suddivisione di un rettangolo contenente  $S$ , con le seguenti proprietà: se  $I_{kh} \subset \overset{\circ}{S}$ , l'oscillazione di  $f$  su  $T(I_{kh})$  è  $< \varepsilon$ ; se  $I_{kh}^* \cap \partial S \neq \emptyset$  allora  $\sum |I_{kh}^*| < \varepsilon$ .

Consideriamo i rettangoli  $I_{kh} \subset \overset{\circ}{S}$ ; poiché in virtù del punto 2.,  $|T(I_{kh}^*)| = \iint_{I_{kh}^*} \Delta dudv$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \iint_{T(S)} f - \iint_{\cup T(I_{kh})} f \right| &\leq \iint_{\cup T(I_{kh}^*)} |f| \leq \frac{\text{Max } |f|}{S} \sum |T(I_{kh}^*)| \leq \\ &\leq \frac{\text{Max } |f|}{S} \text{Max } \Delta \varepsilon . \end{aligned}$$

Dunque, se l'ampiezza della suddivisione tende a zero, si ha

$$\iint_{\cup T(I_{kh})} f \rightarrow \iint_{T(S)} f . \quad (1.31)$$

Analogamente:

$$\iint_{\cup I_{kh}} \Delta \bar{f} dudv \rightarrow \iint_S \Delta \bar{f} dudv . \quad (1.32)$$

D'altra parte, per il teorema della media ponderata (Esercizio 7), si ha:

$$\iint_{I_{kh}} \Delta \bar{f} dudv = \bar{f}(\bar{u}_k, \bar{v}_h) \iint_{I_{kh}} \Delta dudv = \bar{f}(\bar{u}_k, \bar{v}_h) |T(I_{kh})| . \quad (1.33)$$

Utilizziamo ora il fatto che l'oscillazione di  $f$  su  $T(I_{kh})$  è minore di  $\varepsilon$ ; ponendo  $T(\bar{u}_k, \bar{v}_h) = (\bar{x}_k, \bar{y}_h)$  e quindi  $\bar{f}(\bar{u}_k, \bar{v}_h) = f(\bar{x}_k, \bar{y}_h)$  si ricava:

$$\begin{aligned} \left| \iint_{T(I_{kh})} f(x, y) dx dy - f(\bar{x}_k, \bar{y}_h) |T(I_{kh})| \right| &= \left| \iint_{T(I_{kh})} (f(x, y) - f(\bar{x}_k, \bar{y}_h)) dx dy \right| \leq \\ &\leq \varepsilon |T(I_{kh})| . \end{aligned} \quad (1.34)$$

Ne segue, dalla (1.33) e dalla (1.34), che

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\cup T(I_{kh})} f(x, y) dx dy - \iint_{\cup I_{kh}} \Delta \bar{f} dudv \right| &\leq \varepsilon \sum |T(I_{kh})| \leq \\ &\leq \varepsilon |T(S)| . \end{aligned} \quad (1.35)$$

La tesi segue da (1.31), (1.32) e (1.35).  $\square$

**Esercizi**

1. Sia  $Q = [a, b] \times [c, d]$  ed  $f \in \mathcal{R}(Q)$ . Mostrare che non è vero che  $\forall x \in [a, b]$ , la funzione  $y \mapsto f(x, y)$  è integrabile in  $[c, d]$ ; che rilevanza ha questo fatto relativamente al teorema 1.4?

[Suggerimento: considerare la funzione  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{per } x = \frac{1}{2}, \text{ e } 0 \leq y \leq 1, y \text{ razionale} \\ 0 & \text{negli altri punti di } [0, 1] \times [0, 1]. \end{cases}$ ]

2.\* Dimostrare la proposizione 1.6.

3. Sia  $\Omega$  un insieme limitato di  $\mathbb{R}^2$  ed  $f = 0$  in  $\Omega$ . È vero che  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$  e  $\iint_{\Omega} f = 0$ ?

4. Sia  $\Omega$  limitato in  $\mathbb{R}^2$  ed  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ . Se  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , è uguale ad  $f$  tranne che su un insieme di misura nulla, allora  $g \in \mathcal{R}(\Omega)$  e  $\iint_{\Omega} f = \iint_{\Omega} g$ . Vero o falso?

5. Calcolare il volume del tetraedro limitato dai piani  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y + z = 1$ ,  $z = 0$ .

[Risposta: 1/6]

6. Verificare l'integrabilità delle funzioni sottoassegnate sull'insieme indicato a lato. Calcolare poi l'integrale.

a)  $x^2 + y^2$   $Q = [0, 1] \times [1, 2]$

b)  $\frac{1}{(x+y)^2}$   $Q = [3, 4] \times [1, 2]$

c)  $\begin{cases} x+y & \text{se } x+y-1 \geq 0 \\ 2x-y^2 & \text{se } x+y-1 < 0 \end{cases}$   $Q = [0, 2] \times [0, 2]$

d)  $\frac{x}{x^2+y^2}$   $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2, 1 \leq x < 2\}$

e)  $\frac{\sin y^2}{y}$   $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{\pi}\}$

7. Dimostrare il seguente teorema della *media ponderata*.

Siano  $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$ ,  $g \geq 0$  in  $\Omega$ . Allora

$$(\inf_{\Omega} f) \iint_{\Omega} g \leq \iint_{\Omega} f g \leq (\sup_{\Omega} f) \iint_{\Omega} g.$$

Se poi  $\bar{\Omega}$  è connesso e  $f$  è continua in  $\bar{\Omega}$ , esiste  $(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}$  tale che  $\iint_{\Omega} f g = f(x_0, y_0) \iint_{\Omega} g$ .

8. Un solido  $V$  è inscritto nella semisfera con centro nell'origine e raggio  $r$ . Le sezioni di  $V$  coi piani  $y = \bar{y}$ ,  $\bar{y} \in [-r, r]$  sono triangoli inscritti nella corrispondente sezione della semisfera come indicato in figura. Calcolare il volume di  $V$ .

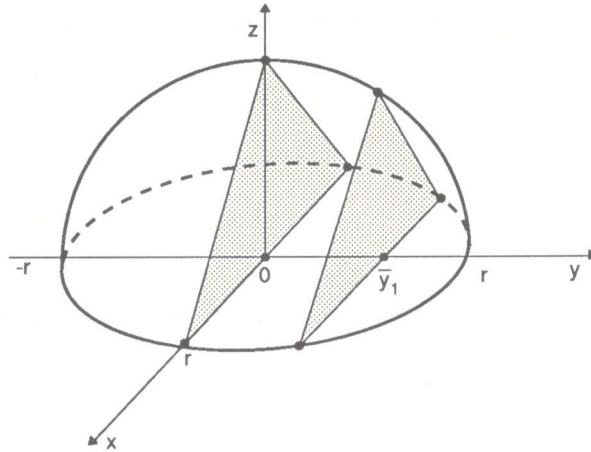


Fig. 5.13 Sezioni del solido  $V$  (Esercizio 8) con piani  $y = \bar{y}_1$ ,  $y = 0$ .

9. Sia  $\Omega$  limitato in  $\mathbb{R}^2$ , non chiuso e  $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ . È vero che  $f \in \mathcal{R}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(\bar{\Omega})$  e che  $\iint_{\Omega} f = \iint_{\bar{\Omega}} f$ ? E se  $\Omega$  è misurabile?

10. Siano  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  limitati in  $\mathbb{R}^2$  con  $|\Omega_j \cap \Omega_k| = 0$  se  $j \neq k$ . Mostrare che se  $f \in \mathcal{R}(\Omega_j)$  per ogni  $j = 1, \dots, N$  allora  $f$  è integrabile in  $\bigcup_{j=1}^N \Omega_j$  e

$$\iint_{\bigcup_{j=1}^N \Omega_j} f = \sum_{j=1}^N \iint_{\Omega_j} f.$$

11.\* Dimostrare che, se  $f, g \in \mathcal{R}(\Omega)$ , allora  $fg \in \mathcal{R}(\Omega)$ .

12. a) Sia  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ . Se  $\Omega_1$  è un sottoinsieme misurabile di  $\Omega$  allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ . [Usare l'esercizio 11\*].

b) Dimostrare la proposizione 1.12.

13. Sia  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$  ed  $\Omega_1 \subset \Omega$ , misurabile. Mostrare che se  $f \geq 0$  allora  $\iint_{\Omega_1} f \leq \iint_{\Omega} f$ .

14. Trovare l'errore:

$$\pi = \iint_{x^2+y^2 < 1} dx dy = \left[ \begin{array}{l} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{array} \right] = \iint_{u^2+v^2 < 1} 4(u^2 + v^2) du dv = 2\pi.$$

15. Calcolare

$$\iint_{x^2+y^2 < 1} (x-y) \cos(x^2 + y^2) dx dy$$

16. Calcolare l'integrale di  $f(x, y) = x^2$  sulla regione interna alla cardioide di equazione  $\rho = 1 + \sin \theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

17. Calcolare l'integrale di  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  sulla regione

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, x^2 + y^2 < 4, x^2 + y^2 > 1\}.$$

18. Calcolare l'area racchiusa dalle due curve di equazione polare  $\rho^2 = \cos \theta$ ,  $\rho^2 = 2 \cos 2\theta$ .

19. Nel caso unidimensionale, la formula di cambio di variabili è la seguente (sotto le ipotesi opportune):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) x'(t) dt$$

Per coerenza con il caso bidimensionale (formula 1.25) non dovrebbe comparire  $|x'(t)|$  anziché  $x'(t)$ ?

## 1.7 Integrali multipli

In questo paragrafo estendiamo a dimensioni  $n \geq 3$  la teoria svolta nei precedenti paragrafi. L'intera argomentazione concernente l'integrale doppio può essere generalizzata all'integrale  $n$ -dimensionale.

Ci limitiamo dunque ad indicare le variazioni dovute al cambio di dimensione, ripercorrendo i paragrafi dall'1.1 all'1.6.

### Paragrafo 1.1

I rettangoli sono sostituiti dagli  $n$ -intervalli, ovvero da insiemi del tipo  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ . I 3-intervalli sono gli usuali parallelepipedi. Una suddivisione  $\mathcal{D}$  di  $Q$  è data dal prodotto cartesiano di  $n$ -suddivisioni di  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$ ,  $\dots$ ,  $[a_n, b_n]$  rispettivamente. Tale suddivisione ripartisce  $Q$  in un numero finito di sotto- $n$ -intervalli.

È chiaro come si definiscono le somme superiore ed inferiore di una funzione  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Ad esempio, in  $\mathbb{R}^3$  esse prendono la forma seguente, con ovvio significato dei simboli:

$$S(\mathcal{D}, f) = \sum_{h,k,j} M_{hkj} \Delta x_h \Delta y_k \Delta z_j, \quad M_{hkj} = \sup_{Q_{hkj}} f$$

$$s(\mathcal{D}, f) = \sum_{h,k,j} m_{hkj} \Delta x_h \Delta y_k \Delta z_j, \quad m_{hkj} = \inf_{Q_{hkj}} f.$$

La definizione 1.1 rimane inalterata:  $f$  limitata è integrabile in  $Q$ , e scriveremo  $f \in \mathcal{R}(Q)$ , se  $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$  e l'integrale di  $f$  è il valore comune dei due estremi.

Le notazioni in uso per gli integrali  $n$ -upli sono le seguenti:

$$\int_Q f, \int_Q \dots \int_Q f, \int_Q f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \int_Q f(x_1, \dots, x_n)dx_1, \dots, dx_n, \tilde{I}(Q, f).$$

Per gli integrali tripli ( $n = 3$ ) si usano anche le notazioni

$$\iiint_Q f, \iiint_Q f(x, y, z)dx dy dz.$$

I teoremi 1.1, 1.2, 1.3 sono ancora validi con identici enunciati e dimostrazioni. Tralasciamo per il momento la formula di riduzione.

*Paragrafo 1.3. Misura  $n$ -dimensionale di Peano–Jordan.*

L'integrale di una funzione  $f$  su insiemi  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , limitati, si definisce in modo analogo. Si racchiude  $\Omega$  in un  $n$ -intervallo  $Q$ ; si pone  $\tilde{f} = f$  in  $\Omega$  e  $\tilde{f} = 0$  in  $Q \setminus \Omega$ ;  $f$  è integrabile in  $\Omega$  se  $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q)$  e

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \int_Q \tilde{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Così pure, un insieme  $\Omega$  è misurabile (secondo Peano–Jordan) in  $\mathbb{R}^n$  se

$$1_{\Omega} \in \mathcal{R}(\Omega) \text{ e si pone } |\Omega| := \int_{\Omega} d\mathbf{x} \text{ (*).}$$

Per  $n = 3$  la misura di Peano–Jordan si chiama *volume*.

Ogni  $n$ -intervallo  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  è misurabile e  $|Q| = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ .

Qualche cautela occorre osservare con gli insiemi di misura nulla.

La definizione è sempre la stessa, soltanto è riferita agli  $n$ -intervalli, anziché ai rettangoli. Precisamente:  $Z \subset \mathbb{R}^n$  è di misura nulla (in  $\mathbb{R}^n$ !) se, fissato  $\varepsilon > 0$ , esistono  $N$   $n$ -intervalli di misura totale  $< \varepsilon$  la cui unione contenga  $Z$ .

Osserviamo che un insieme può essere di misura nulla in  $\mathbb{R}^n$  ma non in  $\mathbb{R}^k$  con  $k < n$ ; ad esempio, un 2-intervallo (contenuto in un piano) ha misura 3-dimensionale nulla ma misura bidimensionale ovviamente diversa da zero. Occorre dunque precisare sempre la dimensione dello spazio in cui si lavora per decidere se un insieme ha misura nulla o meno.

Vale ancora la proposizione 1.6: *Un insieme  $S$  è misurabile in  $\mathbb{R}^n$  se e solo se  $|\partial S|_n = 0$  (\*\*).*

La proposizione 1.7 si modifica nel modo seguente (la dimostrazione è identica):

(\*) Se è necessario precisare la dimensione dello spazio, scriveremo  $|\cdot|_n$ .

(\*\*) Anche  $\partial S$  va intesa ovviamente come frontiera di  $S$  in  $\mathbb{R}^n$ .

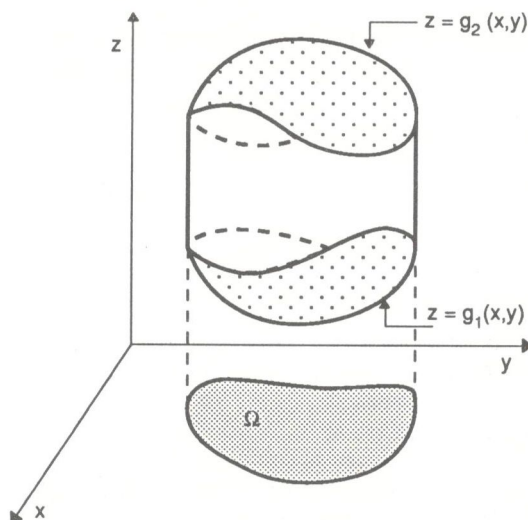


Fig. 5.14 Dominio semplice rispetto all'asse  $z$ .

**Proposizione 1.7'** - Siano  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$  misurabile e  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile in  $\Omega$ . Allora il suo grafico ha misura  $n$ -dimensionale nulla.

Con questa definizione di misura, risultano misurabili in  $\mathbb{R}^3$  tutti gli insiemi più comuni della geometria euclidea (sfere, cilindri, prismi, poliedri in generale, etc.) con volumi coincidenti con quelli noti.

Particolarmente frequenti nei casi concreti sono insiemi in  $\mathbb{R}^3$  definiti nel modo seguente:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y) < z < g_2(x, y), (x, y) \in \Omega\} \quad (\text{fig. 5.14})$$

dove  $g_1, g_2$  sono continue in  $\overline{\Omega}$  ed  $\Omega$  è misurabile. Il bordo di  $E$  è costituito dai grafici di  $g_1$  e  $g_2$ , che hanno misura nulla per la proposizione 1.7', e da una superficie cilindrica che pure, come è facile verificare, ha misura nulla. Dunque  $E$  è misurabile e, seguendo la terminologia del paragrafo 1.3, diremo che  $E$  è un dominio *semplice* o *normale* rispetto all'asse  $z$ . In modo analogo si definiscono i domini normali rispetto agli altri assi.

*Paragrafo 1.5.* Si estende inalterato al caso  $n$ -dimensionale.

*Paragrafi 1.2 - 1.4. Formule di riduzione*

Continua a valere l'integrabilità delle funzioni generalmente continue in un intervallo. Ciò implica l'integrabilità di funzioni continue in compatti misurabili oppure anche di funzioni limitate e continue su un aperto misurabile.

Veniamo ora alle *formule di riduzione*.

Nel caso  $n$ -dimensionale esistono molti modi di ordinare e raggruppare le variabili; a ciascuno di essi corrisponde, in linea di principio, una formula di riduzione.

Sia  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  un  $n$ -intervallo.

Raggruppiamo le variabili nel modo seguente:

$$\xi = (x_1, \dots, x_k), \quad \eta = (x_{k+1}, \dots, x_n)$$

con  $\xi \in Q_\xi = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k]$  e  $\eta \in Q_\eta = [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \dots \times [a_n, b_n]$ .

A questa scomposizione delle variabili corrisponde una formula del tipo:

$$\int_Q f = \int_{Q_\xi} d\xi \int_{Q_\eta} f(\xi, \eta) d\eta = \int_{Q_\xi} dx_1 \dots dx_k \int_{Q_\eta} f(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n \quad (1.36)$$

La (1.36) riduce l'integrale  $n$ -uplo al calcolo di un integrale  $(n-k)$ -dimensionale e ad uno  $k$ -dimensionale. Lo stesso procedimento è poi applicabile a ciascuno dei due integrali fino ad arrivare al calcolo di integrali uni-dimensionali.

Ad esempio, nel caso  $n = 3$ , al raggruppamento  $\xi = x$  e  $\eta = (y, z)$  (o  $\eta = (z, y)$ ) corrisponde la formula

$$\iiint_Q f = \int_{a_1}^{b_1} dx \iint_{[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} f(x, y, z) dy dz \quad (1.37)$$

Al raggruppamento  $\xi = (x, y)$  (oppure  $\xi = (y, x)$ ) ed  $\eta = z$  corrisponde invece la formula

$$\iiint_Q f = \int_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} dx dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \quad (1.38)$$

Le (1.37) e (1.38) si chiamano formule di integrazione *per strati* e *per fili*, rispettivamente. Il significato di tale terminologia è illustrato in figura 5.15.

Nel caso poi di funzioni definite su domini  $E$ , semplici rispetto all'asse  $z$ , la formula (1.38) prende la forma seguente:

$$\iiint_E f = \iint_\Omega dx dy \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (1.39)$$

Si noti che  $\Omega$  coincide con la *proiezione* di  $E$  sul piano  $x, y$ .

Le ipotesi sotto le quali è valida la (1.36) sono indicate nel teorema seguente.

■ **Teorema 1.15** - Sia  $Q$  un  $n$ -intervallo,  $Q = Q_\xi \times Q_\eta$  dove  $Q_\xi$  è un  $k$ -intervallo e  $Q_\eta$  un  $(n - k)$ -intervallo. Se  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile in  $Q$  e per ogni  $\xi \in Q_\xi$  esiste l'integrale  $G(\xi) = \int_{Q_\eta} f(\xi, \eta) d\eta$ , allora  $G$  è integrabile in  $Q_\xi$  e vale la (1.36).



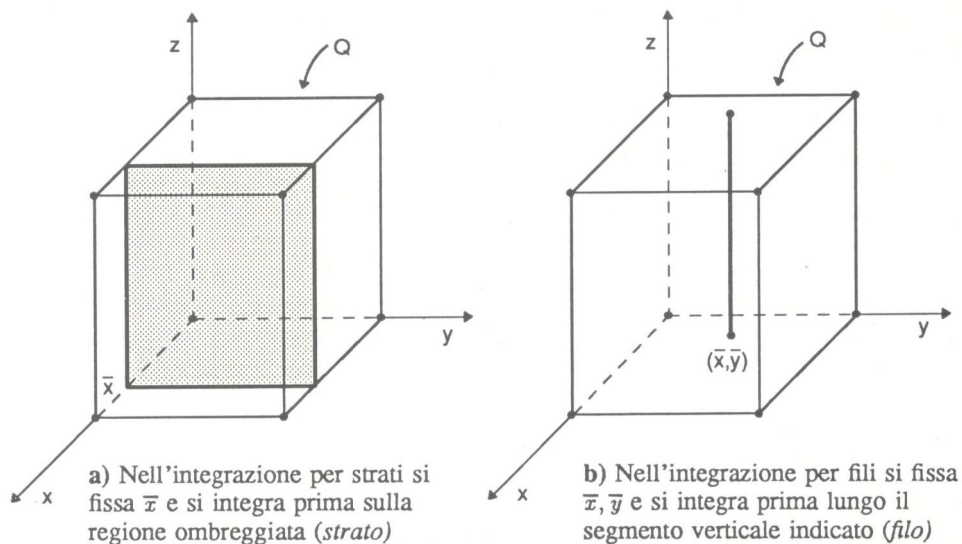


Fig. 5.15

La dimostrazione ricalca, con qualche complicazione tecnica, quella del teorema bidimensionale e perciò la omettiamo.

**Esempio 1.12** - Si voglia calcolare il volume del solido  $T$ , intersezione di due cilindri di equazione  $x^2 + y^2 = r^2$  e  $y^2 + z^2 = r^2$  (fig. 5.16).

Osserviamo che, sezionando il solido con piani del tipo  $x = \bar{x}$ , si ottengono dei quadrati  $Q_{\bar{x}}$ . Integrando per strati (\*) si ha

$$\text{Vol}(T) = \int_{-r}^r dx \iint_{Q_x} dydz = \int_{-r}^r \text{area}(Q_x) dx \quad (1.40)$$

Per calcolare  $\text{area}(Q_x)$ , consideriamo la sfera  $B$  inscritta in  $T$  che ha raggio  $r$  e quindi  $\text{vol}(B) = \frac{4}{3}\pi r^3$ . Ogni sezione  $B_{\bar{x}}$  della sfera con un piano  $x = \bar{x}$  è un cerchio inscritto in  $Q_{\bar{x}}$ . Allora si ha:  $\frac{\text{area}(Q_x)}{\text{area}(B_x)} = \frac{4}{\pi}$  ovvero  $\text{area}(Q_x) = \frac{4}{\pi} \text{area}(B_x)$ .

(\*) O utilizzando il principio di Cavalieri(!).

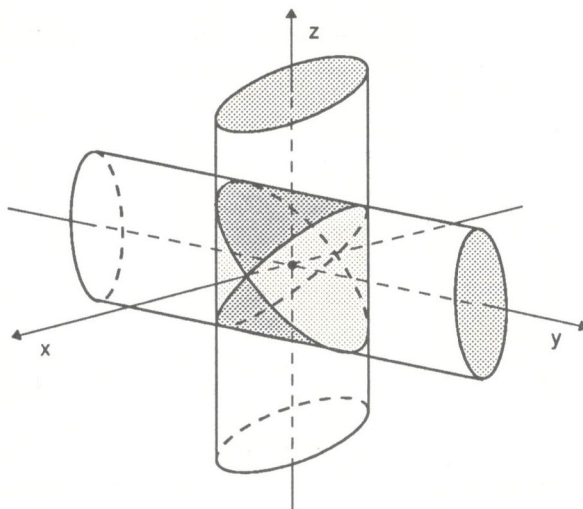


Fig. 5.16 Intersezione dei due cilindri dell'esempio 1.12.

Sostituendo nella (1.40) si trova, usando ancora l'integrazione per strati:

$$\text{Vol}(T) = \frac{4}{\pi} \int_{-r}^r \text{area}(B_x) dx = \frac{4}{\pi} \int_{-r}^r dx \int_{B_x} dy dz = \frac{4}{\pi} \text{vol}(B) = \frac{16}{3} r^3 .$$

**Esempio 1.13** - (Volume dei solidi di rotazione).

Sia  $V$  un solido ottenuto ruotando attorno all'asse  $z$  il trapeziode corrispondente alla funzione  $y = \varphi(z)$ ,  $a \leq z \leq b$ ,  $\varphi$  continua (fig. 5.17). Si voglia calcolarne il volume.

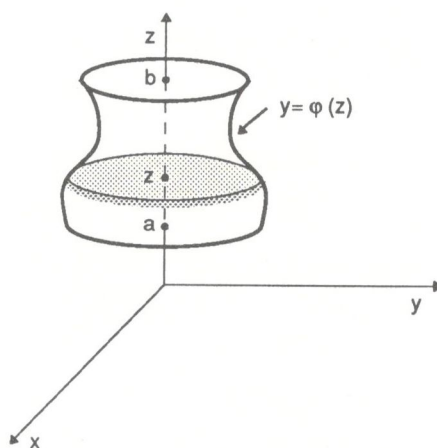


Fig. 5.17