

Fissato  $\bar{z} \in [a, b]$ , sia  $A(\bar{z})$  l'area della sezione di  $V$  con il piano  $z = \bar{z}$ .  
Integrando per strati si trova

$$\text{Vol}(V) = \int_a^b A(z) dz .$$

Essendo poi  $A(z) = \pi[\varphi(z)]^2$  si ottiene

$$\text{Vol}(V) = \pi \int_a^b [\varphi(z)]^2 dz .$$

Ad esempio, se il profilo del "vaso" di figura 5.17 è  $y = \sin z + 1$ ,  $\pi \leq z \leq 3\pi$ ,  
si trova

$$\text{Volume} = \pi \int_{\pi}^{3\pi} (\sin z + 1)^2 dz = 3\pi^2 .$$

**Esempio 1.14** - Calcoliamo il "volume" dell' $n$ -tetraedro di lato  $a$ , dato da

$$T_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0, \dots, x_n > 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n < a\} .$$

Poiché  $T_n(a)$  si ottiene con una dilatazione di rapporto  $a$  dal tetraedro  $T_n(1)$  si ha

$$|T_n(a)| = a^n |T_n(1)|_n \quad (\text{Esercizio 21}) .$$

Usiamo l'integrazione per strati, fissando  $x_n$  tra 0 ed 1 e lasciando variare le  
altre variabili sulla corrispondente sezione, che risulta essere l'insieme

$$\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, x_1 > 0, \dots, x_{n-1} > 0, x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} < 1 - x_n\}$$

e che coincide con  $T_{n-1}(1 - x_n)$ . Dalla (1.39) abbiamo:

$$\begin{aligned} |T_n(1)|_n &= \int_{T_n(1)} d\mathbf{x} = \int_0^1 dx_n \int_{T_{n-1}(1-x_n)} dx_1 \dots dx_{n-1} = \\ &= \int_0^1 |T_{n-1}(1-x_n)|_{n-1} dx_n . \end{aligned}$$

Essendo

$$|T_{n-1}(1-x_n)|_{n-1} = (1-x_n)^{n-1} |T_{n-1}(1)|_{n-1}$$

si ricava

$$|T_n(1)|_n = |T_{n-1}(1)|_{n-1} \int_0^1 (1-x_n)^{n-1} dx_n = \frac{1}{n} |T_{n-1}(1)|_{n-1} . \quad (1.41)$$

La (1.41) è una formula di ricorrenza per  $|T_n(1)|_n$ . Essendo

$$|T_2(1)| = \text{area}(T_2(1)) = \frac{1}{2},$$

otteniamo

$$|T_3(1)|_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \quad |T_4(1)|_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

ed infine  $|T_n(1)|_n = \frac{1}{n!}$ . In conclusione si ha  $|T_n(a)|_n = \frac{a^n}{n!}$ .

È curioso notare che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |T_n(a)|_n = 0$ , qualunque sia il lato  $a$ .

#### Paragrafo 1.6. Cambiamento di variabili.

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{T} : \Omega \rightarrow \mathbf{T}(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$  una trasformazione *biunivoca* assegnata dalle formule

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u_1, \dots, u_n) \\ x_2 &= \varphi_2(u_1, \dots, u_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(u_1, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Se  $\mathbf{T} \in C^1(\Omega)$  e  $\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \neq 0$  in  $\Omega$ , il teorema 1.14 si estende direttamente al caso multi-dimensionale insieme alle varianti indicate nell'osservazione 1.5. La formula (1.25) prende la forma seguente:

$$\int_{\mathbf{T}(S)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_S \bar{f}(u_1, \dots, u_n) \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \dots du_n \quad (1.42)$$

dove  $S$  è un sottoinsieme misurabile in  $\Omega$  e  $f \in C(\mathbf{T}(\bar{S}))$ .

Nella (1.42) il determinante jacobiano della trasformazione appare come un fattore di ingrandimento per la misura  $n$ -dimensionale.

Particolarmente importanti ed utili risultano le trasformazioni in coordinate *cilindriche* e *sferiche* (polari), che consideriamo per  $n = 3$  nei prossimi due esempi e che abbiamo già incontrato negli esempi 2.8 e 2.9 del paragrafo 7.2.1 volume 1.

Nell'esercizio 27 è presentato il cambiamento in coordinate sferiche in  $\mathbb{R}^n$ .

**Esempio 1.15** - (Coordinate cilindriche in  $\mathbb{R}^3$ , rispetto all'asse  $z$ ).

$T$  è definita dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (1.43)$$

Si lascia cioè  $z$  invariato e si introducono coordinate polari nel piano  $x, y$ .

Chiaramente la (1.43) è adatta in presenza di simmetrie assiali.

Se  $(\rho, \theta, z) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} = \Omega$ ,  $T$  realizza una corrispondenza biunivoca tra  $\Omega$  e lo spazio  $\mathbb{R}^3$  con esclusione del semipiano  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}$ .

Come per  $n = 2$ , tale limitazione non crea inconvenienti in quanto l'intersezione di questo semipiano con un qualunque insieme  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ , misurabile, ha misura nulla in  $\mathbb{R}^3$ . Quindi  $S$ , nella formula (1.42), può essere un qualunque insieme misurabile.

Nell'esempio 7.2.7 volume 1, abbiamo trovato che

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \rho;$$

perciò la (1.42) diventa in questo caso

$$\iiint_{T(S)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz.$$

Si voglia, a titolo di applicazione, calcolare il volume del solido  $V$  intersezione della sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  e del paraboloide  $x^2 + y^2 - 3z = 0$ .

Si tratta di un insieme a simmetria assiale (rispetto all'asse  $z$ ) la cui proiezione sul piano  $x, y$  è il cerchio  $x^2 + y^2 < 3$ . Si ha:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 3, \frac{1}{3}(x^2 + y^2) < z < \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}.$$

Passando a coordinate cilindriche, ponendo  $S = T^{-1}(V)$  si ha:

$$S = \{(\rho, \theta, z) : \rho < \sqrt{3}, \frac{1}{3}\rho^2 < z < \sqrt{4 - \rho^2}\}$$

e perciò (integrando per fili rispetto a  $z$ ):

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V) &= \iiint_V dx dy dz = \iiint_S \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \rho d\rho d\theta \int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} dz = \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left[ \rho\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^3}{3} \right] d\rho = \frac{19}{3}\pi. \end{aligned}$$

**Esempio 1.16** - (Coordinate sferiche o polari in  $\mathbb{R}^3$ ).

$\mathbf{T}$  è definita dalle equazioni

$$\begin{cases} x = \rho \sin \psi \cos \theta \\ y = \rho \sin \psi \sin \theta \\ z = \rho \cos \psi \end{cases} \quad (1.44)$$

Se  $(\rho, \psi, \theta) \in \Omega = (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ ,  $\mathbf{T}$  realizza una corrispondenza biunivoca tra  $\Omega$  e lo spazio  $\mathbb{R}^3$  privato ancora del semipiano  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}$ . Nell'esempio 7.2.8 volume 1, abbiamo visto che

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \psi, \theta)} = \rho^2 \sin \psi \neq 0 \text{ in } \Omega,$$

perciò la (1.42) diventa in questo caso:

$$\iiint_{\mathbf{T}(S)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S \bar{f}(\rho, \psi, \theta) \rho^2 \sin \psi d\rho d\psi d\theta.$$

A titolo di esempio calcoliamo  $\iiint_V xyz dx dy dz$  dove

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 > 1 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$

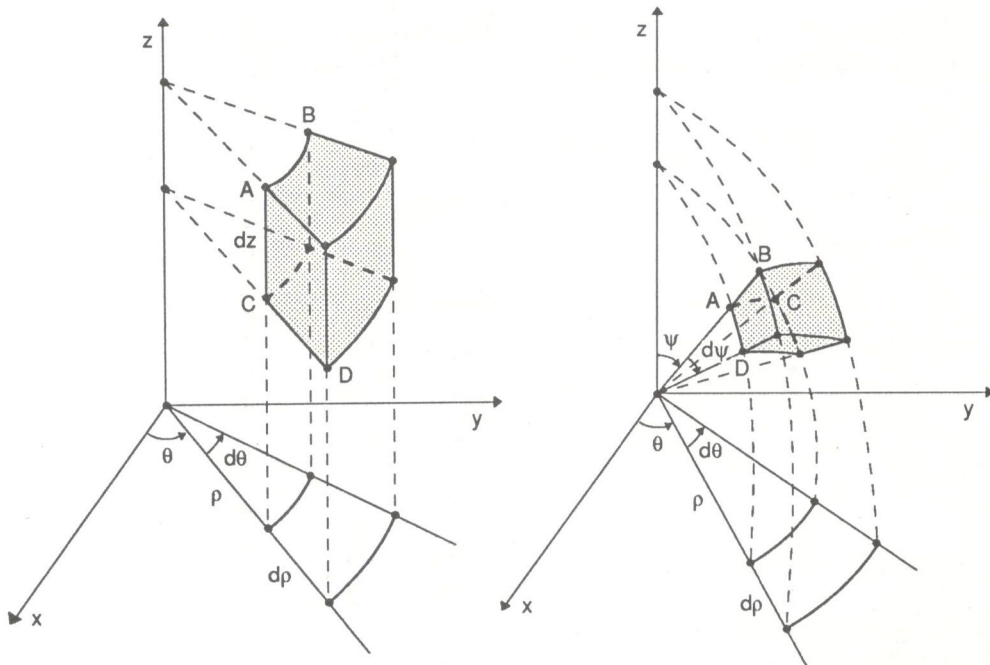
In coordinate sferiche,

$$\mathbf{T}^{-1}(V) = S = \{(\rho, \psi, \theta) : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \psi < \frac{\pi}{2}, 1 < \rho < 2\}.$$

e perciò

$$\begin{aligned} \iiint_V xyz dx dy dz &= \iiint_{\mathbf{T}^{-1}(V)} \rho^5 (\sin \psi)^3 \cos \theta \sin \theta \cos \psi d\rho d\psi d\theta = \\ &= \int_1^2 \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \psi (\sin \psi)^3 d\psi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{63}{48}. \end{aligned}$$

In figura 5.18 sono illustrati i significati intuitivi degli elementi di volume in coordinate cilindriche e sferiche.



a) Elemento di volume in coordinate cilindriche  
 $AB = \rho d\theta, AC = dz, CD = d\rho$

b) Elemento di volume in coordinate sferiche  
 $AB = d\rho, AD = \rho d\psi, AC \simeq \rho \sin \psi d\theta$

Fig. 5.18

**Esercizi**

20. Dare una dimostrazione diretta della formula (1.22).  
 [Suggerimento: dati due vettori  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ , ortogonali, dimostrare che  $\det \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \text{area del parallelogramma da essi individuato}$ . Considerare poi il caso  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  non ortogonali. Considerare infine il parallelogramma individuato dai vettori  $L\mathbf{u}$  ed  $L\mathbf{v}$  con  $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .  
 Estendere poi la formula ad  $n$ -dimensioni.

21. Sia  $T$  una omotetia (dilatazione o contrazione) con centro in  $\mathbf{0}$ , da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^n$ , di rapporto  $a > 0$ :  $T\mathbf{x} = a\mathbf{x}$ .  
 Dimostrare che:  $\text{area}(T(S)) = a^n \text{area}(S)$  per ogni insieme misurabile  $S \subset \mathbb{R}^n$ .

22. Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $\mathbf{M}$  è una matrice ortogonale di ordine  $n$ , allora, posto  $\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x}$  e  $\tilde{f}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y})$  dimostrare che si ha

$$\int_{\|\mathbf{x}\| < R} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\|\mathbf{y}\| < R} \tilde{f}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} .$$

23.\*\* Calcolare  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 < 1} \sin(x+y+z) dx dy dz$ .

[Usare un'opportuna trasformazione mediante una matrice ortogonale in  $\mathbb{R}^3$ ].

24.\* Dimostrare che, se

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{a}_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0 \right\},$$

allora

$$|E|_n = \frac{1}{n!} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) .$$

[Con un'opportuna trasformazione di variabili riportarsi al caso dell'esempio 1.14 (in cui  $\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_j$ )].

25. Calcolare il volume della porzione di cilindro di equazione  $x^2 + y^2 \leq 1$  compresa tra il piano  $x + y + z = 4$  e il paraboloide  $z = -2 + x^2 + y^2$ .

26. Calcolare il volume del solido definito da

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9(1 - \sqrt{x^2 + z^2})^2 + 4y^2 \leq 1\}$$

27. *Coordinate polari in  $\mathbb{R}^n$ .*

In  $\mathbb{R}^n$  il passaggio a coordinate polari è definito dalle seguenti equazioni:

$$x_1 = \rho \cos \varphi_1$$

$$x_2 = \rho \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$x_3 = \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

$\vdots$

$$x_{n-1} = \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}$$

$$x_n = \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} ,$$

dove

$$(\rho, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, \pi) \times \dots \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) .$$

Abbreviando si può scrivere  $\mathbf{x} = \rho \mathbf{v}$ .

- a) Dimostrare che  $\|\mathbf{v}\| = 1$ .  
 b) Verificare che per  $n = 2$  ed  $n = 3$  si ritrovano le trasformazioni a coordinate polari nel piano e nello spazio.

Si può dimostrare che

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = \rho^{n-1} (\sin \varphi_1)^{n-2} (\sin \varphi_2)^{n-3} \dots \sin \varphi_{n-2}. \quad (*)$$

28. a) Sia  $f$  una funzione da  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , radiale, cioè  $f(\mathbf{x}) = f(\|\mathbf{x}\|)$ .  
 Mostrare che

$$\int_{\|\mathbf{x}\| < R} f(\|\mathbf{x}\|) d\mathbf{x} = \omega_n \int_0^R f(\rho) \rho^{n-1} d\rho \quad (**)$$

dove  $\omega_n$  è un numero che dipende solo dalla dimensione dello spazio.

b) Dimostrare che

$$\omega_n = n \cdot (\text{misura della ipersfera di raggio } 1). \quad (***)$$

In particolare:  $\omega_2 = 2\pi$ ,  $\omega_3 = 4\pi$ ; che cosa rappresenta  $\omega_n$ ?

## 1.8 Alcune applicazioni

Integrali doppi e tripli possono essere utilizzati per il calcolo dei baricentri o di momenti di inerzia per distribuzioni continue di massa bi o tri-dimensionali.

Se  $m_1, m_2, \dots, m_k$  sono masse dislocate rispettivamente in punti  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_k$ , il *baricentro* della loro distribuzione è definito dal punto  $\mathbf{b} := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^k m_j \mathbf{p}_j$  dove

$m = \sum_{j=1}^k m_j$  è la massa totale. Il *momento di inerzia* rispetto ad una retta  $r$  o ad un polo  $\mathbf{p}$  è definito dalla formula

$$I = \sum_{j=1}^k d_k^2 m_k$$

dove  $d_k$  indica la distanza di  $\mathbf{p}_k$  dalla retta o dal polo.

Supponiamo ora che un corpo occupi una regione piana  $\Omega$  (si pensi ad esempio ad una lamina con la forma di  $\Omega$ ). Se  $\mu = \mu(x, y)$  indica la *densità superficiale di massa* (massa per unità di superficie), la massa totale  $m$  del corpo è data dall'integrale  $\iint_{\Omega} \mu(x, y) dx dy$ .

Le coordinate del baricentro sono assegnate dalle formule seguenti:

$$x_b := \frac{1}{m} \iint_{\Omega} x \mu(x, y) dx dy, \quad y_b := \frac{1}{m} \iint_{\Omega} y \mu(x, y) dx dy. \quad (1.45)$$

Se la densità è costante,  $\mu = k$  (corpo *omogeneo*), il baricentro si chiama anche *centroide* e, essendo  $m = k \text{ area}(\Omega)$ , le (1.45) diventano

$$x_b = \frac{1}{\text{area}(\Omega)} \iint_{\Omega} x dx dy, \quad y_b = \frac{1}{\text{area}(\Omega)} \iint_{\Omega} y dx dy. \quad (1.45')$$

Il momento di inerzia rispetto ad una retta  $r$  o ad un polo  $p$ , giacenti nel piano di  $\Omega$ , è assegnato dalla formula

$$I := \iint_{\Omega} [\delta(x, y)]^2 \mu(x, y) dx dy \quad (1.46)$$

dove  $\delta = \delta(x, y)$  indica la distanza del punto  $(x, y)$  dalla retta o dal polo. Ad esempio, per i momenti di inerzia rispetto agli assi coordinati si ha:

$$I_x = \iint_{\Omega} x^2 \mu(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_{\Omega} y^2 \mu(x, y) dx dy$$

mentre per quello rispetto all'origine

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(x, y) dx dy.$$

Le formule (1.45) e (1.46) si estendono ad una distribuzione tridimensionale di massa con densità  $\mu = \mu(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in V$ .

Per il baricentro si avrà

$$x_b := \frac{1}{m} \iiint_V x \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

$$y_b := \frac{1}{m} \iiint_V y \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

$$z_b := \frac{1}{m} \iiint_V z \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

con  $m = \iiint_V \mu dx dy dz$ , massa totale, mentre per il momento di inerzia:

$$I := \iiint_V [\delta(x, y, z)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz.$$



**Esempio 1.17** - Si voglia calcolare le coordinate del centroide di una lamina omogenea (densità =1) la cui forma è il quarto di ellisse,  $\Omega$ , definito dalle relazioni  $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 4y^2 \leq 1$ . Si ha, essendo  $\text{area}(\Omega) = \frac{1}{8}\pi$ :

$$x_{\mathbf{b}} = \frac{8}{\pi} \iint_{\Omega} x \, dx dy, \quad y_{\mathbf{b}} = \frac{8}{\pi} \iint_{\Omega} y \, dx dy.$$

Eseguito la trasformazione (variante delle coordinate polari)

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \frac{1}{2}\rho \sin \theta$$

$\Omega$  si trasforma nel dominio  $\{(\rho, \theta), \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ .

Lo jacobiano della trasformazione è  $\frac{1}{2}\rho$  e pertanto:

$$x_{\mathbf{b}} = \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2}\rho^2 \cos \theta d\rho = \frac{4}{3\pi}, \quad y_{\mathbf{b}} = \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{1}{4}\rho^2 \sin \theta d\rho = \frac{2}{3\pi}.$$

**Esempio 1.18** - Si voglia calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine di una sfera  $S$  con centro nell'origine e raggio  $R$ , sapendo che la densità è proporzionale alla distanza dal piano  $x, y$ :  $\mu(x, y, z) = k|z|$  ( $k \in \mathbb{R}^+$ ).

Usando le coordinate polari si trova:

$$\begin{aligned} I_0 &= \iiint_S k(x^2 + y^2 + z^2)z \, dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\psi \int_0^R k\rho^5 \sin \psi |\cos \psi| d\rho = \\ &= \frac{1}{3}k\pi R^6. \end{aligned}$$

Un altro notevole uso degli integrali multipli concerne l'espressione di potenziali e di forze di attrazione ad esempio gravitazionali o elettrostatiche. Consideriamo le prime, per fissare le idee.

La legge di attrazione di Newton dà la forza che una particella di massa  $m$ , posizionata nel punto  $(\xi, \eta, \zeta)$ , esercita su una particella mobile di massa unitaria, posta in un punto  $(x, y, z)$ . Se indichiamo con  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$  la distanza tra le particelle, con  $\mathbf{F}$  la forza, e con  $\gamma$  la costante di gravitazione, si ha:

$$\mathbf{F} = \gamma m \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = \gamma m \left[ \frac{(\xi - x)}{r^3} \mathbf{i} + \frac{(\eta - y)}{r^3} \mathbf{j} + \frac{(\zeta - z)}{r^3} \mathbf{k} \right].$$

Lo scalare  $U(x, y, z) = \gamma m \frac{1}{r}$  rappresenta il *potenziale* generato dalla massa  $m$ .

Se si ha un numero finito di particelle di massa  $m_1, m_2, \dots, m_k$  a distanza  $r_k$  dalla particella "sonda", la forza esercitata su quest'ultima è la somma di quelle esercitate da ciascuna particella e perciò avremo

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^k \gamma m_j \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r_j} \right).$$

Supponiamo ora che, anziché essere concentrata in un numero finito di punti, la massa sia distribuita con continuità in una regione  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , con densità  $\mu$ . Allora il potenziale gravitazionale di questa massa in un punto  $(x, y, z)$  è assegnato dalla formula

$$U(x, y, z) := \gamma \iiint_{\Omega} \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta. \quad (1.47)$$

La forza gravitazionale è data da  $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$  e, supponendo di poter eseguire la derivazione sotto il segno di integrale, si trova, indicando con  $F_1, F_2, F_3$  le componenti di  $\mathbf{F}$ :

$$F_1(x, y, z) = -\gamma \iiint_{\Omega} \frac{x - \xi}{r^3} d\xi d\eta d\zeta$$

$$F_2(x, y, z) = -\gamma \iiint_{\Omega} \frac{y - \eta}{r^3} d\xi d\eta d\zeta$$

$$F_3(x, y, z) = -\gamma \iiint_{\Omega} \frac{z - \zeta}{r^3} d\xi d\eta d\zeta$$

**Esempio 1.19** - Si voglia calcolare il potenziale e la forza gravitazionale generata da una sfera omogenea (densità =1) di raggio  $R$ .

Calcoliamo il potenziale in un punto  $(0, 0, z)$  sull'asse  $z$ ,  $z > R$ . Dalla (1.47) si ha:

$$U(0, 0, z) = \gamma \iiint_{\text{sfera}} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}.$$

Usando le coordinate polari si trova, essendo

$$r^2 = z^2 + \rho^2 - 2z\rho \cos \psi :$$

$$\begin{aligned}
 U(0, 0, z) &= \gamma \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin \psi}{\sqrt{z^2 + \rho^2 - 2z\rho \cos \psi}} d\psi = \\
 &= \frac{2\pi}{z} \gamma \int_0^R \rho [(z^2 + \rho^2 - 2z\rho \cos \psi)^{1/2}]_0^\pi d\rho = \\
 &= \frac{2\pi}{a} \gamma \int_0^R \rho [(z + \rho) - (z - \rho)] d\rho = \gamma \frac{4\pi R^3}{3z}
 \end{aligned}$$

Il potenziale coincide dunque con quello di una particella puntiforme posta nell'origine e di massa  $m = \frac{4\pi R^3}{3}$ , ovvero la massa di tutta la sfera.

In questo sistema di riferimento abbiamo inoltre:

$$F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = 0, \quad F_3(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z) = -\gamma \frac{4\pi R^3}{3z^2}.$$

### Esercizi

29. Trovare baricentro e momento di inerzia rispetto all'asse di un cono di altezza  $h$  e raggio  $a$ , riempito di un materiale con densità proporzionale alla distanza dalla base.

30. Trovare il baricentro di una calotta sferica riempita di materiale omogeneo ( $R =$  raggio della sfera,  $R_0$  raggio della calotta).

31. (Teorema di Pappo (\*)).

Sia  $A$  un insieme limitato misurabile contenuto nel piano  $y, z$ . Sia inoltre  $V$  il solido che si ottiene da  $A$  mediante una rotazione completa attorno all'asse  $z$ . Dimostrare che

$$\text{Vol}(V) = 2\pi y_c \text{ area}(A), \quad (*)$$

dove  $y_c$  è la  $y$ -coordinate del centroide di  $A$ .

32. Usare la (\*) dell'esercizio 31 per:

- calcolare il volume di un toro di raggi  $R$  ed  $r$ ;
- determinare il centroide di una lamina omogenea a forma di semiellisse di semiassi  $a$  e  $b$ .

33. Calcolare il potenziale gravitazionale dell'ellissoide

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1$$

in un punto nell'asse  $z$ , di coordinate  $(0, 0, c)$ ,  $c > b > 0$ .

(\*) Pappo Alessandro (~ 300 a.C.)

d.C.

34. Sia  $S$  un corpo di massa totale  $m$ , con centro di gravità nell'origine. Dimostrare che, se  $\rho$  è la distanza di un punto  $\mathbf{p}$  dall'origine, detto  $U(\mathbf{p})$  il potenziale generato da  $S$  in  $\mathbf{p}$ , si ha:

$$U(\mathbf{p}) \sim \gamma \frac{m}{\rho} \quad \text{per } \rho \rightarrow +\infty .$$

35. Calcolare il momento di inerzia della figura delimitata dalla parabola  $y^2 = 2x$  e la retta  $x = 2$ , rispetto alla retta  $y = -2$ .

36. Calcolare il momento di inerzia di un cono circolare rispetto ad un diametro della base.

### 1.9 Cenno agli integrali multipli generalizzati

Quando la funzione integranda o il dominio di integrazione, o entrambi, non sono limitati, si parla di integrale generalizzato o improprio.

Consideriamo per primo il caso in cui la funzione integranda non è limitata ma il dominio  $\Omega$  di integrazione resta limitato.

Le funzioni che si integrano, nella maggioranza dei casi concreti, sono funzioni continue, illimitate in un intorno di insiemi di misura nulla, ad esempio nell'intorno di un numero finito di punti isolati.

L'idea allora è quella di togliere dalla regione  $\Omega$  di integrazione un insieme  $S$  di misura piccola, contenente i punti "irregolari", integrare su  $\Omega \setminus S$ , indi calcolare il limite facendo tendere a zero la misura di  $S$ .

Se il limite esiste, si chiamerà *integrale improprio* o *generalizzato* di  $f$  in  $\Omega$ . Poiché non vogliamo che il limite dipenda dalla particolare scelta degli insiemi  $S$ , ci limitiamo alla situazione più semplice in cui esiste non solo l'integrale improprio di  $f$ , bensì anche quello di  $|f|$ , cioè al caso in cui le funzioni sono *assolutamente integrabili* (in senso generalizzato).

Precisamente, siano  $\Omega$  una regione *misurabile e limitata* di  $\mathbb{R}^n$  ed  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Supponiamo di poter trovare una successione  $\{\Omega_j\}_{j \geq 1}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$  con le seguenti proprietà:

- 1)  $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$  per  $j \geq 1$ ;
- 2) ogni  $\Omega_j$  è misurabile e  $|\Omega_j| \rightarrow |\Omega|$  se  $j \rightarrow +\infty$ ;
- 3)  $f \in \mathcal{R}(\Omega_j)$  (e quindi anche  $|f| \in \mathcal{R}(\Omega_j)$ ) e

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} |f|$$

esiste finito.

Allora si può dimostrare (Esercizio 42) che anche

$$I = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} f \tag{1.48}$$

esiste finito e che non dipende dalla particolare scelta della successione  $\{\Omega_j\}$  approssimante  $\Omega$ .

Il numero  $I$  che compare nella (1.48) si chiama integrale *generalizzato o improprio* di  $f$  su  $\Omega$  e si indica ancora con i simboli  $\int_{\Omega} f$ ,  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$  etc.

**Esempio 1.20** - Siano  $f(x, y) = \frac{-1}{x+y}$  e  $\Omega = \{(x, y) : x < 0, x^2 + y^2 < 1, 0 < y < -x\}$ .

La funzione è illimitata nell'intorno del segmento di retta  $y = -x$ ,  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$ , che ha misura nulla in  $\mathbb{R}^2$ . Inoltre  $f > 0$  in  $\Omega$ .

Come  $\Omega_j$  scegliamo i seguenti insiemi, definiti in coordinate polari:

$$\Omega_j = \{(\rho, \theta) : \frac{1}{j} < \rho < 1, \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{j} < \theta < \pi\} \quad (\text{fig. 5.19});$$

evidentemente  $\text{area}(\Omega_j) \rightarrow \text{area}(\Omega)$  e  $f \in \mathcal{R}(\Omega_j)$ .

Usando le coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_j} f &= \int_{1/j}^1 d\rho \int_{\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{j}}^{\pi} \frac{-1}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \\ &= \left(1 - \frac{1}{j}\right) \int_{\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{j}}^{\pi} \frac{-d\theta}{\sqrt{2} \sin(\frac{3}{4}\pi - \theta)}. \end{aligned}$$

Essendo  $\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \theta\right) \sim \frac{3}{4}\pi - \theta$  quando  $\theta \rightarrow \frac{3}{4}\pi$ , si deduce che

$$\iint_{\Omega_j} f \rightarrow +\infty \quad \text{per } j \rightarrow +\infty.$$

Dunque  $f$  non è integrabile in  $\Omega$ .

**Esempio 1.21** - Siano  $f = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ), e

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ . La funzione è illimitata; scegliamo

$\Omega_j = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{j} < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ . Allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega_j)$  ( $f > 0$ ) e  $\text{vol}(\Omega_j) \rightarrow \text{vol}(\Omega)$ .

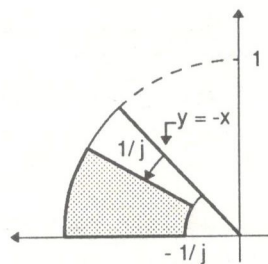


Fig. 5.19

Si ha, passando a coordinate polari:

$$\iiint_{\Omega_j} f = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \int_{\frac{1}{j}}^1 \rho^{2-2\alpha} \sin \psi d\psi = \begin{cases} 4\pi \log j & \alpha = 3/2 \\ \frac{4\pi}{3-2\alpha} [1 - j^{(2\alpha-3)}] & \alpha \neq 3/2 \end{cases}$$

Dunque, se  $\alpha \geq 3/2$ ,  $\iiint_{\Omega_j} f \rightarrow +\infty$  per  $j \rightarrow +\infty$  ed  $f$  non è integrabile, mentre se  $\alpha < 3/2$ ,  $f$  è integrabile e

$$\iiint_{\Omega} f = \lim_{j \rightarrow +\infty} \iiint_{\Omega_j} f = \frac{4\pi}{3-2\alpha}.$$

Passiamo ora a considerare l'integrale di una funzione su un dominio illimitato. Il procedimento per definire l'integrale è sostanzialmente lo stesso considerato in precedenza.

Siano  $\Omega$  misurabile ed illimitato in  $\mathbb{R}^n$  ed  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supponiamo di poter trovare una successione  $\{\Omega_j\}$  di sottoinsiemi *limitati* e misurabili di  $\Omega$  per la quale valgono le proprietà 1) e 3) precedentemente enunciate e la seguente:

2') Per ogni  $K$ , compatto contenuto in  $\Omega$ , esiste  $j$  tale che  $K \subset \Omega_j$ .

Valgono allora le stesse considerazioni fatte nel caso precedente e si può coerentemente definire

$$\int_{\Omega} f := \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} f. \quad (1.49)$$

**Esempio 1.22** - Mediante gli integrali doppi generalizzati si può calcolare facilmente l'importante integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Infatti, consideriamo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Scegliendo  $\Omega_j = B_j =$  cerchio con centro in  $(0,0)$  e raggio  $j$ , le ipotesi 1) e 2') sono certamente verificate. Notiamo inoltre che  $e^{-x^2-y^2} > 0$  in  $\mathbb{R}^2$ .

Si ha, usando le coordinate polari

$$\iint_{B_j} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^j \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi [1 - e^{-j^2}] \rightarrow \pi$$

se  $j \rightarrow +\infty$ .

Pertanto

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi . \quad (1.50)$$

D'altra parte, si deve ottenere lo stesso risultato scegliendo

$$\Omega_j = Q_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < j, |y| < j\} .$$

Ora

$$\iint_{\Omega_j} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-j}^j e^{-x^2} dx \int_{-j}^j e^{-y^2} dy \rightarrow \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = I^2 ,$$

per  $j \rightarrow +\infty$ .

Quindi  $I^2 = \pi$  e perciò

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} . \quad (1.51)$$

Sottolineiamo ancora che, con le precedenti definizioni, abbiamo ritenuto integrabili (in senso generalizzato) quelle funzioni che risultino assolutamente integrabili.

Altre definizioni sono possibili, in cui l'integrale  $\int_{\Omega} f$  è definito come il limite di integrali del tipo (1.48) o (1.49) rispetto ad una determinata successione  $\Omega$ ; ma non ci soffermeremo su questi casi.

### Esercizi

37. Siano  $f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha}$  ( $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ) e  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$ .

Stabilire per quali valori di  $\alpha$   $f$  è integrabile in  $\Omega$ .

38. (Generalizzazione dell'esercizio 37).

Siano  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha}$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ), e  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| < 1\}$ .

Stabilire per quali valori di  $\alpha$   $f$  è integrabile in  $\Omega$ .

39. Siano  $f(x, y) = y$  e  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 1, -\frac{1}{\sqrt{x}} < y < \frac{1}{\sqrt{x}}\}$ .

Stabilire se  $f$  è integrabile in  $\Omega$ .

40. Dimostrare i seguenti criteri di integrabilità e di non integrabilità.

a) Se  $f$  è integrabile in  $\Omega$  e  $|g| \leq |f|$  in  $\Omega$  allora  $g$  è integrabile in  $\Omega$ .

b) Se  $f$  non è integrabile in  $\Omega$  e  $|g| \geq |f|$  in  $\Omega$  allora  $g$  non è integrabile in  $\Omega$ .

41. Sia  $f \in \mathcal{R}([1, +\infty))$   $f \geq 0$ , tale che  $\int_1^{+\infty} f(u) du = 3$ .

Calcolare  $\iint_{\Omega} f(xy) dx dy$ , dove  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{x}, x < y < 4x\}$ .

42.\* Dimostrare che se  $\{\Omega_j\}$  soddisfa le proprietà 1) 2) e 3) del paragrafo 1.9 allora  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} f$  esiste finito e non dipende dalla particolare scelta della successione  $\{\Omega_j\}$  approssimante  $\Omega$ .

[Suggerimento: per la prima parte usare il criterio di Cauchy per la successione  $I_j = \int_{\Omega_j} f$ .

Per la seconda parte, considerare una successione  $\{\Omega'_k\}$  di insiemi con le proprietà 1,2,3.

Posto  $J = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega'_k} f$ , dimostrare che, fissato  $\varepsilon > 0$ , per  $k$  e  $j$  abbastanza grandi si ha  $|J - \int_{\Omega'_k \cap \Omega_j} f| < \varepsilon$ , etc.]

43. Calcolo del "volume della ipersfera  $n$ -dimensionale, di raggio 1,  $B_1$ , in termini della funzione  $\Gamma$  di Eulero.

Ricordiamo che  $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  ( $x > 0$ ).

Calcoliamo  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2} d\mathbf{x}$  in due modi:

a) Dalla (\*\*\*) dell'esercizio 28 a) si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2} d\mathbf{x} &= \omega_n \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho^{n-1} d\rho = \quad (\text{ponendo } \rho^2 = t) = \\ &= \frac{\omega_n}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{\omega_n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

b) D'altra parte

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} dx_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2} dx_2 \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2} dx_n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

per quanto visto nell'esempio 1.22.

Dalla (\*\*\*) dell'esercizio 28 abbiamo dunque

$$|B_1|_n \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \pi^{\frac{n}{2}}$$

da cui

$$|B_1|_n = \frac{2}{n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Osserviamo che:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \dots$$

$$|B_1|_2 = \pi, \quad |B_1|_3 = \frac{4}{3}\pi, \quad |B_1|_4 = \frac{\pi^2}{2}, \quad |B_1|_5 = \frac{8}{15}\pi^2, \dots$$