

Lezioni sulle forme differenziali

Prof. Alessandro Fonda, a.a. 2019/2020

1 Gli spazi vettoriali $\Omega_M(\mathbb{R}^N)$

Consideriamo, per ogni numero naturale M , gli insiemi $\Omega_M(\mathbb{R}^N)$, formati dalle funzioni M -lineari antisimmetriche su \mathbb{R}^N , a valori reali, con la convenzione che $\Omega_0(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}$. Essi sono spazi vettoriali su \mathbb{R} . Se scegliamo degli indici i_1, \dots, i_M nell'insieme $\{1, \dots, N\}$, possiamo definire l'applicazione M -lineare antisimmetrica dx_{i_1, \dots, i_M} : è quella funzione che associa ai vettori

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ \vdots \\ v_N^{(1)} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{v}^{(M)} = \begin{pmatrix} v_1^{(M)} \\ \vdots \\ v_N^{(M)} \end{pmatrix},$$

il numero reale

$$\det \begin{pmatrix} v_{i_1}^{(1)} & \dots & v_{i_1}^{(M)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_{i_M}^{(1)} & \dots & v_{i_M}^{(M)} \end{pmatrix}.$$

Si noti che se due indici coincidono, si ha l'applicazione nulla. Se due indici vengono scambiati, l'applicazione cambia di segno. Richiamiamo il seguente risultato algebrico.

Proposizione. Se $1 \leq M \leq N$, lo spazio $\Omega_M(\mathbb{R}^N)$ ha dimensione $\binom{N}{M}$. Una sua base è data da $(dx_{i_1, \dots, i_M})_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N}$. Se $M > N$, si ha $\Omega_M(\mathbb{R}^N) = \{0\}$.

Dimostrazione. Vediamo che gli dx_{i_1, \dots, i_M} , con $1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N$, sono linearmente indipendenti: sia

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \alpha_{i_1, \dots, i_M} dx_{i_1, \dots, i_M} = 0.$$

Fissiamo $1 \leq j_1 < \dots < j_M \leq N$ e dimostriamo che $\alpha_{j_1, \dots, j_M} = 0$. Applicando l'espressione scritta sopra alla M -pla di vettori della base canonica $\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_M}$, abbiamo che

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \alpha_{i_1, \dots, i_M} \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \dots & \delta_{i_1 j_M} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{i_M j_1} & \dots & \delta_{i_M j_M} \end{pmatrix} = 0.$$

(Qui δ_{ij} è il simbolo di Kronecker: vale 1 se $i = j$, altrimenti vale 0.) Si vede allora che, siccome $1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N$ e $1 \leq j_1 < \dots < j_M \leq N$, tutti i determinanti scritti sopra sono nulli tranne quello in cui $\{i_1 = j_1, \dots, i_M = j_M\}$, che vale 1. Ne segue che $\alpha_{j_1, \dots, j_M} = 0$.

Resta da dimostrare che $\Omega_M(\mathbb{R}^N)$ è generato dai dx_{i_1, \dots, i_M} . Sia dunque φ un elemento di $\Omega_M(\mathbb{R}^N)$. Allora

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(M)}) &= \varphi \left(\sum_{k_1=1}^N v_{k_1}^{(1)} \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \sum_{k_M=1}^N v_{k_M}^{(M)} \mathbf{e}_{k_M} \right) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_M=1}^N \varphi(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_M}) v_{k_1}^{(1)} \dots v_{k_M}^{(M)}. \end{aligned}$$

Di questa somma dobbiamo considerare solo i termini con indici distinti, essendo φ antisimmetrica. Allora la somma per k_1, \dots, k_M che vanno da 1 a N può essere fatta prendendo in tutti i modi possibili degli indici $1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N$ e considerando tutte le loro permutazioni $i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(M)}$, con $\sigma : \{1, \dots, M\} \rightarrow \{1, \dots, M\}$. Scriveremo quindi

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1, \dots, k_M=1}^N \varphi(\mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_M}) v_{k_1}^{(1)} \dots v_{k_M}^{(M)} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \sum_{\sigma} \varphi(\mathbf{e}_{i_{\sigma(1)}}, \dots, \mathbf{e}_{i_{\sigma(M)}}) v_{i_{\sigma(1)}}^{(1)} \dots v_{i_{\sigma(M)}}^{(M)}. \end{aligned}$$

Riordinando tutti i termini $\mathbf{e}_{i_{\sigma(1)}}, \dots, \mathbf{e}_{i_{\sigma(M)}}$ e tenendo conto del fatto che scambiando due vettori il valore di φ cambia segno, otteniamo

$$\varphi(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(M)}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \varphi(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_M}) \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} v_{i_{\sigma(1)}}^{(1)} \dots v_{i_{\sigma(M)}}^{(M)},$$

dove ε_{σ} denota il segno di ogni permutazione $\sigma : \{1, \dots, M\} \rightarrow \{1, \dots, M\}$. Per la

definizione di determinante, abbiamo quindi

$$\varphi(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(M)}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \varphi(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_M}) \det \begin{pmatrix} v_{i_1}^{(1)} & \dots & v_{i_1}^{(M)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_{i_M}^{(1)} & \dots & v_{i_M}^{(M)} \end{pmatrix},$$

ossia

$$\varphi = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \varphi(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_M}) dx_{i_1, \dots, i_M}.$$

La dimostrazione è così completa. ■

Ci interessa in particolar modo il caso $N = 3$. Andiamo a vedere più da vicino come sono fatti gli spazi $\Omega_1(\mathbb{R}^3)$, $\Omega_2(\mathbb{R}^3)$ e $\Omega_3(\mathbb{R}^3)$.

Consideriamo $\Omega_1(\mathbb{R}^3)$, lo spazio delle applicazioni lineari definite su \mathbb{R}^3 , a valori in \mathbb{R} . Indicheremo con dx_1, dx_2, dx_3 le seguenti applicazioni lineari:

$$dx_1 : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto v_1, \quad dx_2 : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto v_2, \quad dx_3 : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto v_3.$$

Si ha che $\Omega_1(\mathbb{R}^3)$ ha dimensione 3 e (dx_1, dx_2, dx_3) ne è una base.

Consideriamo $\Omega_2(\mathbb{R}^3)$, lo spazio delle applicazioni bilineari antisimmetriche definite su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, a valori in \mathbb{R} . Esso ha dimensione 3, e una sua base è data da $(dx_{1,2}, dx_{1,3}, dx_{2,3})$, con

$$dx_{1,2} : \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} v_1 & v'_1 \\ v_2 & v'_2 \end{pmatrix} = v_1 v'_2 - v_2 v'_1,$$

$$dx_{1,3} : \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} v_1 & v'_1 \\ v_3 & v'_3 \end{pmatrix} = v_1 v'_3 - v_3 v'_1,$$

$$dx_{2,3} : \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} v_2 & v'_2 \\ v_3 & v'_3 \end{pmatrix} = v_2 v'_3 - v_3 v'_2.$$

È utile ricordare che si ha:

$$dx_{1,1} = dx_{2,2} = dx_{3,3} = 0,$$

$$dx_{2,1} = -dx_{1,2}, \quad dx_{3,1} = -dx_{1,3}, \quad dx_{3,2} = -dx_{2,3}.$$

Consideriamo $\Omega_3(\mathbb{R}^3)$, lo spazio delle applicazioni trilineari antisimmetriche definite su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, a valori in \mathbb{R} . Indichiamo con $dx_{1,2,3}$ la seguente applicazione trilineare antisimmetrica:

$$dx_{1,2,3} : \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v''_1 \\ v''_2 \\ v''_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} v_1 & v'_1 & v''_1 \\ v_2 & v'_2 & v''_2 \\ v_3 & v'_3 & v''_3 \end{pmatrix}.$$

Ogni elemento dello spazio vettoriale $\Omega_3(\mathbb{R}^3)$ è multiplo di $dx_{1,2,3}$. Si ha che $\Omega_3(\mathbb{R}^3)$ ha dimensione 1. Ricordiamo che

$$dx_{1,2,3} = dx_{2,3,1} = dx_{3,1,2} = -dx_{3,2,1} = -dx_{2,1,3} = -dx_{1,3,2}$$

e, se due indici coincidono, si ha l'applicazione nulla.

2 Forme differenziali in \mathbb{R}^N

Definizione. Dato un sottoinsieme aperto U di \mathbb{R}^N , chiameremo **forma differenziale di grado M** (o M -forma differenziale) una funzione $\omega : U \rightarrow \Omega_M(\mathbb{R}^N)$.

Se $M \geq 1$, considerata la base $(dx_{i_1, \dots, i_M})_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N}$, le componenti della M -forma differenziale ω verranno denotate con $f_{i_1, \dots, i_M} : U \rightarrow \mathbb{R}$. Scriveremo quindi:

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} f_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x}) dx_{i_1, \dots, i_M}.$$

Pertanto, l'applicazione M -lineare antisimmetrica $\omega(\mathbf{x})$ è determinata dal vettore $\binom{N}{M}$ -dimensionale

$$F(\mathbf{x}) = (f_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x}))_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N}.$$

Una 0-forma differenziale non è altro che una funzione definita su U a valori in \mathbb{R} . Diremo che una M -forma differenziale è di classe C^k se tutte le sue componenti lo sono.

Si può definire la somma di due M -forme differenziali: se ω è come sopra e $\tilde{\omega}$, anch'essa definita su U , è del tipo

$$\tilde{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} g_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x}) dx_{i_1, \dots, i_M},$$

si definisce in modo naturale $\omega + \tilde{\omega}$ come segue:

$$(\omega + \tilde{\omega})(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} (f_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x}) + g_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x})) dx_{i_1, \dots, i_M}.$$

Inoltre, se $c \in \mathbb{R}$, si definisce $c\omega$, il prodotto dello scalare c per la M -forma differenziale ω , nel modo seguente:

$$(c\omega)(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} c f_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x}) dx_{i_1, \dots, i_M}.$$

Con queste definizioni, l'insieme delle forme differenziali di grado M risulta essere uno spazio vettoriale.

Vediamo da vicino il caso $N = 3$. Consideriamo un sottoinsieme U di \mathbb{R}^3 . Se indichiamo con ω_M una M -forma differenziale, avremo, nei casi $M = 1, 2, 3$, le seguenti possibilità:

$$\begin{aligned} \omega_1(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2 + f_3(\mathbf{x}) dx_3, \\ \omega_2(\mathbf{x}) &= f_{1,2}(\mathbf{x}) dx_{1,2} + f_{1,3}(\mathbf{x}) dx_{1,3} + f_{2,3}(\mathbf{x}) dx_{2,3}, \\ \omega_3(\mathbf{x}) &= f_{1,2,3}(\mathbf{x}) dx_{1,2,3}. \end{aligned}$$

Si noti che $\omega_1(\mathbf{x})$ e $\omega_2(\mathbf{x})$ sono determinate dai vettori tridimensionali $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))$ e $G(\mathbf{x}) = (f_{12}(\mathbf{x}), f_{13}(\mathbf{x}), f_{23}(\mathbf{x}))$, rispettivamente.

3 Prodotto esterno

Date due forme differenziali $\omega : U \rightarrow \Omega_M(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{\omega} : U \rightarrow \Omega_{\tilde{M}}(\mathbb{R}^N)$, di grado M e \tilde{M} , rispettivamente, vogliamo definire la forma differenziale $\omega \wedge \tilde{\omega}$, di grado $M + \tilde{M}$, che si dice **prodotto esterno** di ω e $\tilde{\omega}$. Se

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x}) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} f_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x}) dx_{i_1, \dots, i_M}, \\ \tilde{\omega}(\mathbf{x}) &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{\tilde{M}} \leq N} g_{j_1, \dots, j_{\tilde{M}}}(\mathbf{x}) dx_{j_1, \dots, j_{\tilde{M}}}, \end{aligned}$$

si pone

$$(\omega \wedge \tilde{\omega})(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{\tilde{M}} \leq N}} f_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x}) g_{j_1, \dots, j_{\tilde{M}}}(\mathbf{x}) dx_{i_1, \dots, i_M, j_1, \dots, j_{\tilde{M}}}.$$

Di solito si omette il simbolo \wedge qualora una delle due è una 0-forma differenziale, in quanto il prodotto esterno assomiglia, in questo caso, al prodotto per uno scalare. Si noti che nella sommatoria saranno nulli tutti gli elementi in cui un indice compare due volte. Vediamo ora alcune proprietà.

Proposizione. Se $\omega, \tilde{\omega}, \tilde{\tilde{\omega}}$ sono tre forme differenziali di grado $M, \tilde{M}, \tilde{\tilde{M}}$, rispettivamente, allora:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} \wedge \omega &= (-1)^{M\tilde{M}} \omega \wedge \tilde{\omega}, \\ (\omega \wedge \tilde{\omega}) \wedge \tilde{\tilde{\omega}} &= \omega \wedge (\tilde{\omega} \wedge \tilde{\tilde{\omega}}); \end{aligned}$$

se $c \in \mathbb{R}$, allora

$$(c\omega) \wedge \tilde{\omega} = \omega \wedge (c\tilde{\omega}) = c(\omega \wedge \tilde{\omega});$$

inoltre, nel caso in cui $M = \tilde{M}$, si ha

$$\begin{aligned}(\omega + \tilde{\omega}) \wedge \tilde{\tilde{\omega}} &= (\omega \wedge \tilde{\tilde{\omega}}) + (\tilde{\omega} \wedge \tilde{\tilde{\omega}}), \\ \tilde{\tilde{\omega}} \wedge (\omega + \tilde{\omega}) &= (\tilde{\tilde{\omega}} \wedge \omega) + (\tilde{\tilde{\omega}} \wedge \tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Supponiamo che ω e $\tilde{\omega}$ siano della forma scritta sopra, e sia

$$\tilde{\tilde{\omega}}(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_{\tilde{\tilde{M}}} \leq N} h_{k_1, \dots, k_{\tilde{\tilde{M}}}(\mathbf{x})} dx_{k_1, \dots, k_{\tilde{\tilde{M}}}.$$

La prima uguaglianza si ottiene osservando che, per arrivare dalla sequenza di indici $i_1, \dots, i_M, j_1, \dots, j_{\tilde{M}}$ alla $j_1, \dots, j_{\tilde{M}}, i_1, \dots, i_M$, bisogna dapprima spostare j_1 verso sinistra operando M scambi, poi fare lo stesso per l'eventuale j_2 , e così via fino a $j_{\tilde{M}}$. In totale, sono quindi necessari $M\tilde{M}$ scambi di indici. Tenuto conto che ad ogni scambio la forma differenziale cambia di segno, si ha la formula cercata.

La dimostrazione della seconda uguaglianza (proprietà associativa) non presenta difficoltà di rilievo, come pure le uguaglianze in cui compare la costante c .

Per quanto riguarda la proprietà distributiva, abbiamo:

$$\begin{aligned}((\omega + \tilde{\omega}) \wedge \tilde{\tilde{\omega}})(\mathbf{x}) &= \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_{\tilde{\tilde{M}}} \leq N}} (f_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x}) + \\ &\quad + g_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x})) h_{k_1, \dots, k_{\tilde{\tilde{M}}}(\mathbf{x})} dx_{i_1, \dots, i_M, k_1, \dots, k_{\tilde{\tilde{M}}} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_{\tilde{\tilde{M}}} \leq N}} (f_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x}) h_{k_1, \dots, k_{\tilde{\tilde{M}}}(\mathbf{x})} + \\ &\quad + g_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x}) h_{k_1, \dots, k_{\tilde{\tilde{M}}}(\mathbf{x})}) dx_{i_1, \dots, i_M, k_1, \dots, k_{\tilde{\tilde{M}}} \\ &= ((\omega \wedge \tilde{\tilde{\omega}}) + (\tilde{\omega} \wedge \tilde{\tilde{\omega}}))(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza si dimostra in modo analogo, oppure usando la prima e la quarta. ■

Se consideriamo il caso particolare delle due forme differenziali costanti

$$\omega(\mathbf{x}) = dx_1, \quad \tilde{\omega}(\mathbf{x}) = dx_2$$

(per ogni $\mathbf{x} \in U$), avremo che $(\omega \wedge \tilde{\omega})(\mathbf{x}) = dx_{1,2}$, per ogni $\mathbf{x} \in U$. Possiamo quindi scrivere

$$dx_1 \wedge dx_2 = dx_{1,2}.$$

Più in generale, in vista della proprietà associativa del prodotto esterno, possiamo scrivere:

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M} = dx_{i_1, \dots, i_M}.$$

Nel seguito, useremo indifferentemente l'una o l'altra scrittura.

4 Differenziale esterno

Data una M -forma differenziale ω di classe C^1 , vogliamo definire la forma differenziale $d_{ex}\omega$, di grado $M + 1$, che si dice **differenziale esterno** di ω .

Se ω è una 0-forma differenziale, $\omega = f : U \rightarrow \mathbb{R}$, il suo differenziale esterno $d_{ex}\omega(\mathbf{x})$ non sarà altro che il differenziale $df(\mathbf{x})$, applicazione lineare definita in \mathbb{R}^N , a valori in \mathbb{R} . Essendo, per ogni $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$,

$$df(\mathbf{x})\mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{x})v_N$$

si ha:

$$df(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{x})dx_N = \sum_{m=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x})dx_m.$$

Nel caso generale, se

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} f_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x})dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M},$$

poniamo

$$d_{ex}\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} df_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M},$$

o, equivalentemente,

$$d_{ex}\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \sum_{m=1}^N \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_M}}{\partial x_m}(\mathbf{x})dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M}.$$

Nel seguito, per comodità di scrittura, scriveremo sempre $d\omega$ al posto di $d_{ex}\omega$. Vediamo alcune proprietà del differenziale esterno.

Proposizione. Se ω e $\tilde{\omega}$ sono due forme differenziali di classe C^1 , di grado M e \tilde{M} , rispettivamente, si ha:

$$d(\omega \wedge \tilde{\omega}) = d\omega \wedge \tilde{\omega} + (-1)^M \omega \wedge d\tilde{\omega};$$

se $M = \tilde{M}$ e $c \in \mathbb{R}$, allora

$$\begin{aligned} d(\omega + \tilde{\omega}) &= d\omega + d\tilde{\omega}, \\ d(c\omega) &= c d\omega; \end{aligned}$$

se ω è di classe C^2 , allora

$$d(d\omega) = 0.$$

Dimostrazione. Per quanto riguarda la prima uguaglianza, se ω e $\tilde{\omega}$ sono come sopra, si ha:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \tilde{\omega})(\mathbf{x}) &= \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{\tilde{M}} \leq N}} \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial x_m} (f_{i_1, \dots, i_M} g_{j_1, \dots, j_{\tilde{M}}})(\mathbf{x}) dx_{m, i_1, \dots, i_M, j_1, \dots, j_{\tilde{M}}} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{\tilde{M}} \leq N}} \sum_{m=1}^N \left(\frac{\partial f_{i_1, \dots, i_M}}{\partial x_m} g_{j_1, \dots, j_{\tilde{M}}} + \right. \\ &\quad \left. + f_{i_1, \dots, i_M} \frac{\partial g_{j_1, \dots, j_{\tilde{M}}}}{\partial x_m} \right) (\mathbf{x}) dx_{m, i_1, \dots, i_M, j_1, \dots, j_{\tilde{M}}} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{\tilde{M}} \leq N}} \sum_{m=1}^N \left(\frac{\partial f_{i_1, \dots, i_M}}{\partial x_m} g_{j_1, \dots, j_{\tilde{M}}} \right) (\mathbf{x}) dx_{m, i_1, \dots, i_M, j_1, \dots, j_{\tilde{M}}} + \\ &\quad + (-1)^M \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{\tilde{M}} \leq N}} \sum_{m=1}^N \left(f_{i_1, \dots, i_M} \frac{\partial g_{j_1, \dots, j_{\tilde{M}}}}{\partial x_m} \right) (\mathbf{x}) dx_{i_1, \dots, i_M, m, j_1, \dots, j_{\tilde{M}}} \\ &= (d\omega \wedge \tilde{\omega})(\mathbf{x}) + (-1)^M (\omega \wedge d\tilde{\omega})(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

La seconda e la terza uguaglianza seguono facilmente dalla linearità della derivata. Per quanto riguarda l'ultima uguaglianza, abbiamo:

$$d(d\omega)(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_M}}{\partial x_m} (\mathbf{x}) dx_{k, m, i_1, \dots, i_M}.$$

Tenuto conto che

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_M}}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_M}}{\partial x_k}$$

e del fatto che $dx_k \wedge dx_m = -dx_m \wedge dx_k$, si vede che gli addendi delle sommatorie si eliminano a due a due, per cui si ha $d(d\omega)(\mathbf{x}) = 0$. ■

5 Forme differenziali in \mathbb{R}^3

Nel caso $N = 3$, se ω_1 e $\tilde{\omega}_1$ sono due 1-forme differenziali,

$$\begin{aligned}\omega_1(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2 + f_3(\mathbf{x}) dx_3, \\ \tilde{\omega}_1(\mathbf{x}) &= g_1(\mathbf{x}) dx_1 + g_2(\mathbf{x}) dx_2 + g_3(\mathbf{x}) dx_3,\end{aligned}$$

usando le proprietà distributiva e associativa si ottiene:

$$\omega_1 \wedge \tilde{\omega}_1 = (f_1 g_2 - f_2 g_1) dx_{1,2} + (f_1 g_3 - f_3 g_1) dx_{1,3} + (f_2 g_3 - f_3 g_2) dx_{2,3}.$$

Se invece ω_1 è una 1-forma differenziale e ω_2 è una 2-forma differenziale,

$$\begin{aligned}\omega_1(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2 + f_3(\mathbf{x}) dx_3, \\ \omega_2(\mathbf{x}) &= g_{1,2}(\mathbf{x}) dx_{1,2} + g_{1,3}(\mathbf{x}) dx_{1,3} + g_{2,3}(\mathbf{x}) dx_{2,3},\end{aligned}$$

si ha:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_1 g_{2,3} - f_2 g_{1,3} + f_3 g_{1,2}) dx_{1,2,3}.$$

Se abbiamo una 0-forma differenziale $\omega_0 = f : U \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$d\omega_0(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}) dx_3.$$

Se abbiamo una 1-forma differenziale

$$\omega_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) dx_1 + f_2(\mathbf{x}) dx_2 + f_3(\mathbf{x}) dx_3,$$

allora

$$\begin{aligned}d\omega_1(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \right) dx_1 \wedge dx_2 + \\ &+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right) dx_1 \wedge dx_3 + \\ &+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right) dx_2 \wedge dx_3.\end{aligned}$$

Se abbiamo una 2-forma differenziale

$$\omega_2(\mathbf{x}) = f_{1,2}(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2 + f_{1,3}(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_3 + f_{2,3}(\mathbf{x}) dx_2 \wedge dx_3,$$

allora

$$d\omega_2(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f_{2,3}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f_{1,3}}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_{1,2}}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

A questo punto, osserviamo che una scelta della base per lo spazio vettoriale $\Omega_2(\mathbb{R}^3)$ più adatta alle applicazioni potrebbe essere la seguente:

$$(dx_{2,3}, dx_{3,1}, dx_{1,2}).$$

Infatti, in questo modo, associando

- a ogni funzione scalare $f : U \rightarrow \mathbb{R}$
 - una 0–forma differenziale $\omega_0 = f$, oppure
 - una 3–forma differenziale $\omega_3 = f dx_{1,2,3}$;
- a ogni campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$
 - una 1–forma differenziale $\omega_1 = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$, oppure
 - una 2–forma differenziale $\omega_2 = F_1 dx_{2,3} + F_2 dx_{3,1} + F_3 dx_{1,2}$,

si ha che:

$d\omega_0$ corrisponde al **gradiente** di f :

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right);$$

$d\omega_1$ corrisponde al **rotore** di F :

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right);$$

$d\omega_2$ corrisponde alla **divergenza** di F :

$$\text{div } F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}.$$

Allora, presi due campi di vettori F e \tilde{F} , considerate le 1–forme differenziali associate

$$\omega_1 = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3, \quad \tilde{\omega}_1 = \tilde{F}_1 dx_1 + \tilde{F}_2 dx_2 + \tilde{F}_3 dx_3,$$

si ha che $\omega_1 \wedge \tilde{\omega}_1$ corrisponde al **prodotto vettoriale** di F e \tilde{F} :

$$F \times \tilde{F} = (F_2 \tilde{F}_3 - F_3 \tilde{F}_2, F_3 \tilde{F}_1 - F_1 \tilde{F}_3, F_1 \tilde{F}_2 - F_2 \tilde{F}_1);$$

se invece di $\tilde{\omega}_1$ consideriamo la 2–forma differenziale

$$\tilde{\omega}_2 = \tilde{F}_1 dx_2 \wedge dx_3 + \tilde{F}_2 dx_3 \wedge dx_1 + \tilde{F}_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

si ha che $\omega_1 \wedge \tilde{\omega}_2$ corrisponde al **prodotto scalare** di F e \tilde{F} :

$$\langle F | \tilde{F} \rangle = F_1 \tilde{F}_1 + F_2 \tilde{F}_2 + F_3 \tilde{F}_3.$$

Le proprietà del prodotto esterno e del differenziale esterno permettono di dimostrare alcune formule in cui appaiono il gradiente, il rotore o la divergenza. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, abbiamo ad esempio le seguenti:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad } f) &= 0, \\ \text{div}(\text{rot } F) &= 0, \\ \text{grad}(f\tilde{f}) &= \tilde{f}(\text{grad } f) + f(\text{grad } \tilde{f}), \\ \text{rot}(fF) &= (\text{grad } f) \times F + f(\text{rot } F), \\ \text{div}(f\tilde{F}) &= \langle \text{grad } f | \tilde{F} \rangle + f(\text{div } \tilde{F}), \\ \text{div}(F \times \tilde{F}) &= \langle \text{rot } F | \tilde{F} \rangle - \langle F | \text{rot } \tilde{F} \rangle. \end{aligned}$$