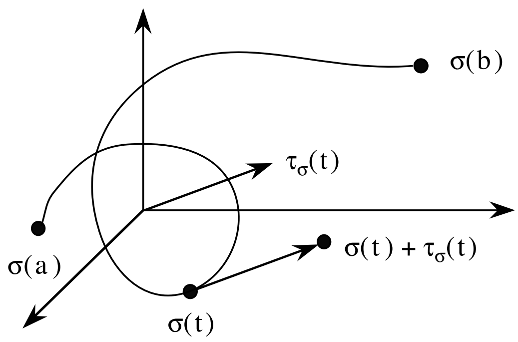
6 $M-$superfici

Indichiamo con I un rettangolo di $\mathbb{R}^M$, dove $1 \leq M \leq N$.

Definizione. *Chiameremo $M-$***superficie in** $\mathbb{R}^N$ *una funzione* [1] $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ *di classe C^1. Se $M = 1$, σ si dirà anche* **curva***; se $M = 2$, si dirà semplicemente* **superficie***. L'insieme $\sigma(I)$ è detto* **supporto** *della $M-$superficie σ. Diremo che la $M-$superficie σ è* **regolare** *se, per ogni $\boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{I}$, la matrice jacobiana $\sigma'(\boldsymbol{u})$ ha rango M.*

Consideriamo da vicino il caso $N = 3$. Una curva in $\mathbb{R}^3$ è una funzione $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. La curva è regolare se, per ogni $t \in]a,b[$, il vettore $\sigma'(t) = (\sigma_1'(t), \sigma_2'(t), \sigma_3'(t))$ è non nullo. In tal caso, si definisce il seguente **versore tangente** nel punto $\sigma(t)$:

$$\tau_\sigma(t) = \frac{\sigma'(t)}{||\sigma'(t)||}\,.$$



Esempio. La curva $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(t) = (R\cos(2t), R\sin(2t), 0)$$

ha come supporto la circonferenza

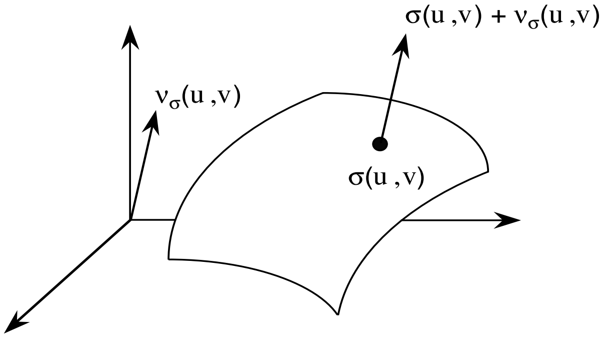
$$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$$

(che viene percorsa due volte). Essendo $\sigma'(t) = (-2R\sin(2t), 2R\cos(2t), 0)$, si tratta di una curva regolare, e si ha:

$$\tau_\sigma(t) = (-\sin(2t), \cos(2t), 0)\,.$$

[1] Le derivate parziali di σ devono essere continue su tutto I e nei punti di frontiera vanno intese, se necessario, come derivate destre o sinistre. Equivalentemente, si potrebbe estendere σ ad una funzione di classe C^1 definita su un aperto contenente I (a questo riguardo, si veda un articolo di H. Whitney su "Transactions of the American Mathematical Society", del 1934). In questa ottica, il dominio di σ potrebbe essere un insieme più generale, ad esempio la chiusura di un aperto limitato, affinché il differenziale risulti ben definito anche nei punti di frontiera. Considerazioni analoghe si possono fare per quanto riguarda il dominio delle forme differenziali.

Una superficie in $\mathbb{R}^3$ è una funzione $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$. La superficie è regolare se, per ogni $(u, v) \in]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$, i vettori $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$ sono linearmente indipendenti. In tal caso, essi individuano un piano, detto **piano tangente** alla superficie nel punto $\sigma(u, v)$, e si definisce il seguente **versore normale**:



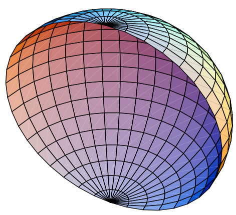
$$\nu_\sigma(u, v) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)}{||\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)||} .$$

Esempi. 1. La superficie $\sigma : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\phi, \theta) = (R \sin\phi \cos\theta, R \sin\phi \sin\theta, R \cos\phi)$$

ha come supporto la semisfera

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, y \geq 0\} .$$



Essendo

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \phi}(\phi, \theta) = (R \cos\phi \cos\theta, R \cos\phi \sin\theta, -R \sin\phi) ,$$
$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\phi, \theta) = (-R \sin\phi \sin\theta, R \sin\phi \cos\theta, 0) ,$$

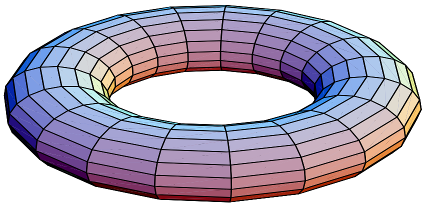
si tratta di una superficie regolare, e si ha:

$$\nu_\sigma(\phi, \theta) = (\sin\phi \cos\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\phi) .$$

2. La superficie $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

dove $0 < r < R$, ha come supporto l'anello toroidale o "toro"



$$\{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}\,.$$

Si può verificare che anche in questo caso si tratta di una superficie regolare.

Una 3-superficie in $\mathbb{R}^3$ si dice anche **volume**.

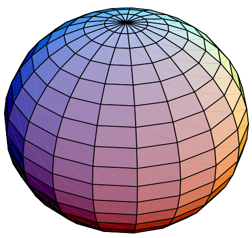
Esempio. La funzione $\sigma : [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\rho, \phi, \theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$$

ha come supporto la palla chiusa

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}\,.$$

In questo caso, $\det \sigma'(\rho, \phi, \theta) = \rho^2 \sin\phi$ e pertanto si tratta di un volume regolare.



Definizione. *Due $M-$superfici $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\sigma} : J \to \mathbb{R}^N$ si dicono* **equivalenti** *se hanno lo stesso supporto ed esistono due insiemi aperti $A \subset I$, $B \subset J$, e un diffeomorfismo $\varphi : A \to B$ con le seguenti proprietà: gli insiemi $I \backslash A$ e $J \backslash B$ sono* *trascurabili e, per ogni $\boldsymbol{u} \in A$, $\sigma(\boldsymbol{u}) = \tilde{\sigma}(\varphi(\boldsymbol{u}))$. Diremo che σ e $\tilde{\sigma}$ hanno la* **stessa orientazione** *se* $\det \varphi'(\boldsymbol{u}) > 0$ *per ogni* $\boldsymbol{u} \in A$*; diremo che hanno* **orientazione opposta** *se* $\det \varphi'(\boldsymbol{u}) < 0$ *per ogni* $\boldsymbol{u} \in A$.

Esempi. Data una curva $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, una curva ad essa equivalente con orientazione opposta è, ad esempio, $\tilde{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma(a+b-t)\,.$$

Se σ è regolare, un esempio interessante di curva equivalente con la stessa orientazione si ottiene considerando la funzione

$$\varphi(t) = \int_a^t ||\sigma'(r)||\,dr\,.$$

Siccome $\varphi'(t) = ||\sigma'(t)|| > 0$ per ogni $t \in]a,b[$, ponendo $\iota_1 = \varphi(b)$, si ha che $\varphi : [a,b] \to [0,\iota_1]$ è biietiva e la curva $\sigma_1(s) = \sigma(\varphi^{-1}(s))$ è equivalente a σ. Si noti che, per ogni $s \in]0,\iota_1[$, si ha

$$\begin{aligned} ||\sigma_1'(s)|| &= ||\sigma'(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1})'(s)|| \\ &= \left\| \sigma'(\varphi^{-1}(s)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} \right\| \\ &= \left\| \sigma'(\varphi^{-1}(s)) \frac{1}{||\sigma'(\varphi^{-1}(s))||} \right\| = 1\,. \end{aligned}$$

Data una superficie $\sigma : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^3$, una superficie ad essa equivalente con orientazione opposta è, ad esempio, $\tilde{\sigma} : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\tilde{\sigma}(u,v) = \sigma(u, a_2 + b_2 - v)\,,$$

oppure da

$$\tilde{\sigma}(u,v) = \sigma(a_1 + b_1 - u, v)\,.$$

Come vedremo in seguito, non sempre due $M-$superfici aventi lo stesso supporto sono equivalenti. Introduciamo una classe particolare di $M-$superfici per le quali questo inconveniente non si verifica.

Definizione. *Una $M-$superficie $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ è una $M-$***parametrizzazione** *di un insieme $\mathcal{M}$ se è regolare, iniettiva su $\overset{\circ}{I}$, e $\sigma(I) = \mathcal{M}$. Diremo che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ è $M-$***parametrizzabile** *se esiste una sua $M-$parametrizzazione.*

Esempi. La circonferenza $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è parametrizzabile e $\sigma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, ne è una parametrizzazione.

Una parametrizzazione della sfera $\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è, ad esempio, $\sigma : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$\sigma(\phi,\theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)\,.$$

Teorema. *Due $M-$parametrizzazioni di uno stesso insieme sono sempre equivalenti.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ considerato, e siano $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\sigma} : J \to \mathbb{R}^N$ due sue $M-$parametrizzazioni. Definiamo gli insiemi

$$A = \mathring{I} \cap \sigma^{-1}(\mathcal{M} \setminus (\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J)))\,, \qquad B = \mathring{J} \cap \tilde{\sigma}^{-1}(\mathcal{M} \setminus (\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J)))\,.$$

Allora, per ogni $\boldsymbol{u} \in A$, essendo $\sigma(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{M} \setminus (\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J))$ e $\tilde{\sigma}(J) = \mathcal{M}$, esiste un $\boldsymbol{v} \in \mathring{J}$ tale che $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) = \sigma(\boldsymbol{u})$. Chiaramente, si ha che $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \mathcal{M} \setminus (\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J))$, per cui $\boldsymbol{v} \in B$. Inoltre, siccome $\tilde{\sigma}$ è iniettiva su $\mathring{J}$, esiste un unico $\boldsymbol{v}$ in $\mathring{J}$ con tale proprietà. Possiamo quindi definire $\varphi : A \to B$ ponendo $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$. Pertanto, per ogni $\boldsymbol{u} \in A$ e $\boldsymbol{v} \in B$,

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(\boldsymbol{u}) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v})\,.$$

Questa funzione $\varphi : A \to B$ è invertibile: un argomento simmetrico può essere usato per definire la sua inversa $\varphi^{-1} : B \to A$.

Verifichiamo che A è un insieme apetro. Poiché σ, $\tilde{\sigma}$ sono funzioni continue e ∂I, ∂J sono insiemi compatti, si ha che $\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J)$ è compatto, e pertanto chiuso. Allora $\mathcal{M} \setminus (\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J))$ è relativamente aperto in $\mathcal{M}$, e $\sigma^{-1}(\mathcal{M} \setminus (\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J))$ è relativamente aperto in I, per cui la sua intersezione con $\mathring{I}$ è un insieme aperto. In modo analogo si dimostra che anche B è un insieme aperto.

Prendiamo un $\boldsymbol{v}_0 \in \mathring{J}$, e poniamo $\boldsymbol{x}_0 = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}_0)$. La matrice jacobiana $\tilde{\sigma}'(\boldsymbol{v}_0)$ ha rango M, e possiamo supporre senza perdita di generalità che le prime M righe siano linearmente indipendenti. Essendo $\mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-M}$, scriveremo ogni punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ nella forma $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, con $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^M$ e $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^{N-M}$. Inoltre, per non avere doppi indici in basso, scriveremo $\boldsymbol{x}_0 = (\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^0)$.

Sia $\Phi : J \times \mathbb{R}^{N-M} \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$\Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z})\,.$$

Allora $\Phi'(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{0})$ è invertibile, per cui Φ è un diffeomorfiismo locale: esistono un intorno aperto V_0 di $\boldsymbol{v}_0$, un intorno aperto Ω_0 di $\boldsymbol{0}$ in $\mathbb{R}^{N-M}$, e un intorno aperto W_0 di $\boldsymbol{x}_0$ tali che $\Phi : V_0 \times \Omega_0 \to W_0$ è un diffeomorfismo. Inoltre, possiamo assumere che $V_0 \subseteq \mathring{J}$. Sia $\Psi = \Phi^{-1} : W_0 \to V_0 \times \Omega_0$. Scriveremo $\Psi(\boldsymbol{x}) = (\Psi_1(\boldsymbol{x}), \Psi_2(\boldsymbol{x}))$, con $\Psi_1(\boldsymbol{x}) \in V_0$ e $\Psi_2(\boldsymbol{x}) \in \Omega_0$.

Dimostriamo ora che φ è di classe $\mathcal{C}^1$. Prendiamo un $\boldsymbol{u}_0 \in A$, e poniamo $\boldsymbol{x}_0 = \sigma(\boldsymbol{u}_0)$ e $\boldsymbol{v}_0 = \varphi(\boldsymbol{u}_0)$. Sia $\boldsymbol{v}_0$ come sopra, con $\tilde{\sigma}'(\boldsymbol{v}_0)$ avente le prime M righe linearmente independenti, per cui possiamo definire il diffeomorfismo locale $\Psi : W_0 \to V_0 \times \Omega_0$. Prendiamo un intorno aperto U_0 di $\boldsymbol{u}_0$, contenuto in A, tale che $\sigma(U_0) \subseteq W_0$. Allora, per $\boldsymbol{u} \in U_0$ e $\boldsymbol{v} \in B$,

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(\boldsymbol{u}) = \Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) = \Psi(\sigma(\boldsymbol{u}))\,.$$

Pertanto, φ coincide con $\Psi_1 \circ \sigma$ sull'insieme aperto U_0, il che mostra che φ è differenziabile con differenziale continuo.

In modo simmetrico si dimostra che $\varphi^{-1} : B \to A$ è di classe $\mathcal{C}^1$, per cui φ risulta essere un diffeomorfismo.

Dimostriamo ora che gli insiemi $I \setminus A$ e $J \setminus B$ sono trascurabili. Prendiamo in considerazione, ad esempio, il secondo:

$$J \setminus B = \partial J \cup (\mathring{J} \setminus B) = \partial J \cup \{\boldsymbol{v} \in \mathring{J} : \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \sigma(\partial I)\} \cup \{\boldsymbol{v} \in \mathring{J} : \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \tilde{\sigma}(\partial J)\}\,.$$

Sappiamo che ∂J è trascurabile; proviamo che $\{\boldsymbol{v} \in \mathring{J} : \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \sigma(\partial I)\}$ è anch'esso trascurabile.

Sia $\boldsymbol{v}_0 \in \mathring{J}$ tale che $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}_0) \in \sigma(\partial I)$. Allora esiste un $\boldsymbol{u}_0 \in \partial I$ tale che $\sigma(\boldsymbol{u}_0) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}_0)$. Ragionando come sopra, definiamo $\Psi : W_0 \to V_0 \times \Omega_0$. Sia U_0 un intorno aperto di $\boldsymbol{u}_0$ tale che $\sigma(U_0 \cap I) \subseteq W_0$. Dimostriamo che

$$\mathring{J} \cap \tilde{\sigma}^{-1}(\sigma(U_0 \cap \partial I)) \subseteq (\Psi_1 \circ \sigma)(U_0 \cap \partial I)\,.$$

In effetti, prendendo $\boldsymbol{v} \in \mathring{J} \cap \tilde{\sigma}^{-1}(\sigma(U_0 \cap \partial I))$, abbiamo che $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \sigma(U_0 \cap \partial I)$. Allora, essendo $\Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v})$, abbiamo che $\Psi(\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) \in V_0 \times \Omega_0$, da cui $\boldsymbol{v} \in \Psi_1(\sigma(U_0 \cap \partial I))$, e l'inclusione è così dimostrata. Ora, siccome $\Psi_1 \circ \sigma$ è di classe $\mathcal{C}^1$, abbiamo che $(\Psi_1 \circ \sigma)(U_0 \cap \partial I)$ è trascurabile. Infine, la conclusione che $\{\boldsymbol{v} \in \mathring{J} : \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \sigma(\partial I)\}$ è trascurabile segue dal fatto che ∂I è compatto, e pertanto può essere ricoperto da un numero finito di insiemi aperti come U_0.

Resta da dimostrare che $\{\boldsymbol{v} \in \mathring{J} : \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \tilde{\sigma}(\partial J)\}$ è trascurabile. Sia $\boldsymbol{v}_0 \in \mathring{J}$ tale che $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}_0) \in \tilde{\sigma}(\partial J)$. Allora, esiste un $\tilde{\boldsymbol{v}}_0 \in \partial J$ tale che $\tilde{\sigma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_0) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}_0)$. Sia $\widetilde{V}_0$ un intorno aperto di $\tilde{\boldsymbol{v}}_0$ tale che $\tilde{\sigma}(\widetilde{V}_0 \cap J) \subseteq W_0$. Come sopra si vede che $\mathring{J} \cap \tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\sigma}(\widetilde{V}_0 \cap \partial J)) \subseteq (\Psi_1 \circ \tilde{\sigma})(\widetilde{V}_0 \cap \partial J)$, il che mostra che $\mathring{J} \cap \tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\sigma}(\widetilde{V}_0 \cap \partial J))$ è trascurabile. La conclusione segue come sopra, ricoprendo ∂J con un numero finito di insiemi aperti come $\widetilde{V}_0$. ■

7 Integrale di una forma differenziale

Vogliamo ora definire la nozione di integrale di una $M-$forma differenziale su una $M-$superficie. Supponiamo di avere una $M-$forma differenziale

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_M \le N} f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M}\,,$$

definita su un sottoinsieme U di $\mathbb{R}^N$ contenente il supporto di una $M-$superficie $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$, con $1 \le M \le N$. Possiamo considerare, al variare degli indici $i_1, \ldots, i_M$, le funzioni $\sigma_{(i_1,...,i_M)} : I \to \mathbb{R}^M$ definite da

$$\sigma_{(i_1,...,i_M)} : \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_{i_1}(u_1, ..., u_M) \\ \vdots \\ \sigma_{i_M}(u_1, ..., u_M) \end{pmatrix}.$$

Definizione. *Diremo che la $M-$forma differenziale $\omega : U \to \Omega_M(\mathbb{R}^N)$ è integrabile sulla $M-$superficie $\sigma : I \to U$ se, per ogni scelta degli indici $i_1, ..., i_M$ nell'insieme $\{1, ..., N\}$, si ha che $(f_{i_1,...,i_M} \circ \sigma) \det \sigma'_{(i_1,...,i_M)}$ è integrabile su I. In tal caso, si pone*

$$\int_\sigma \omega = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N} \int_I f_{i_1,...,i_M}(\sigma(\boldsymbol{u})) \det \sigma'_{(i_1,...,i_M)}(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u}\,.$$

Ad esempio, ω sarà integrabile su σ qualora tutte le sue componenti siano funzioni continue. Notiamo che si ha:

$$\sigma'_{(i_1,...,i_M)}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial(\sigma_{i_1}, ..., \sigma_{i_M})}{\partial(u_1, ..., u_M)}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{i_1}}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & ... & \frac{\partial \sigma_{i_1}}{\partial u_M}(\boldsymbol{u}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_{i_M}}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & ... & \frac{\partial \sigma_{i_M}}{\partial u_M}(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}.$$

Se definiamo, per ogni $\boldsymbol{x} \in U$ e per ogni $\boldsymbol{u} \in I$ i vettori $\binom{N}{M}-$dimensionali

$$F(\boldsymbol{x}) = (f_{i_1,...,i_M}(\boldsymbol{x}))_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N}\,,$$
$$\Sigma(\boldsymbol{u}) = \Big(\det \sigma'_{(i_1,...,i_M)}(\boldsymbol{u})\Big)_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N}\,,$$

si ha che

$$\int_\sigma \omega = \int_I \langle F(\sigma(\boldsymbol{u})) | \Sigma(\boldsymbol{u}) \rangle\, d\boldsymbol{u}\,,$$

dove $\langle \cdot | \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^{\binom{N}{M}}$.

È importante vedere come cambia l'integrale di una forma differenziale ω su due $M-$superfici equivalenti aventi la stessa orientazione oppure orientazione opposta.

Teorema. *Siano $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\sigma} : J \to \mathbb{R}^N$ due $M-$superfici equivalenti. Se hanno la stessa orientazione, allora*

$$\int_\sigma \omega = \int_{\tilde{\sigma}} \omega\,;$$

se hanno orientazione opposta, allora

$$\int_\sigma \omega = -\int_{\tilde{\sigma}} \omega\,.$$

Dimostrazione. Abbiamo una $M-$forma differenziale del tipo

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M} \, .$$

Sia $\varphi : A \to B$, come nella definizione di $M-$superfici equivalenti, tale che $\sigma = \tilde\sigma \circ \varphi$. Per il teorema di cambiamento di variabili nell'integrale, si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \omega &= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} \int_A f_{i_1,\ldots,i_M}(\tilde\sigma(\varphi(\boldsymbol{u}))) \det(\tilde\sigma\circ\varphi)'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u} \\
&= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} \int_A f_{i_1,\ldots,i_M}(\tilde\sigma(\varphi(\boldsymbol{u}))) \det\tilde\sigma'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\varphi(\boldsymbol{u})) \det\varphi'(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u} \\
&= \pm \sum_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} \int_B f_{i_1,\ldots,i_M}(\tilde\sigma(\boldsymbol{v})) \det\tilde\sigma'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} \\
&= \pm \int_{\tilde\sigma} \omega \, ,
\end{aligned}$$

con segno positivo se $\det\varphi' > 0$, negativo se $\det\varphi' < 0$. ■

Nota. In generale, se σ e $\tilde\sigma$ sono equivalenti, non sempre si ha l'uguaglianza $|\int_\sigma \omega| = |\int_{\tilde\sigma}\omega|$. Non è detto infatti che esse abbiano la stessa orientazione od orientazione opposta. Ad esempio, se consideriamo le due superfici $\sigma, \tilde\sigma : [1,2]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definite da

$$\begin{aligned}
&\sigma(u,v) = \\
&\left(\left(\frac32 + \left(u-\frac32\right)\cos\frac v2\right)\cos v, \left(\frac32 + \left(u-\frac32\right)\cos\frac v2\right)\sin v, \left(u-\frac32\right)\sin\frac v2\right), \\
&\tilde\sigma(u,v) = \sigma\left(u, v+\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}$$

si può vedere che sono entrambe parametrizzazioni dello stesso insieme (un nastro di Möbius) e pertanto sono equivalenti (il lettore è invitato ad esplicitare un diffeomorfismo $\varphi : A \to B$ con le proprietà della definizione). D'altra parte, se consideriamo la 2-forma differenziale $\omega(x_1,x_2,x_3) = dx_{12}$, determinata dal campo vettoriale costante $(0,0,1)$, facendo i conti si ottiene

$$\int_\sigma \omega = 0 \, , \quad \int_{\tilde\sigma} \omega = -3\sqrt2 \, .$$

Consideriamo ora il caso importante in cui $M = N$.

Teorema. *Sia $M = N$; se σ è regolare e iniettiva su $\mathring{I}$ con $\det\sigma' > 0$ e ω è della forma*

$$\omega(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N \, ,$$

allora $\int_\sigma \omega = \int_{\sigma(I)} f$.

Dimostrazione. Facendo uso del teorema del diffeomorfismo locale, si vede che σ induce un diffeomorfismo tra $\mathring{I}$ e $\sigma(\mathring{I})$. Essendo trascurabili sia la frontiera di I che la sua l'immagine attraverso l'applicazione σ (vedi il lemma a p. 98) tenendo conto del teorema di cambiamento di variabili, avremo

$$\begin{aligned}\int_\sigma \omega &= \int_I f(\sigma(\boldsymbol{u}))\det(\sigma'(\boldsymbol{u}))\,d\boldsymbol{u}\\ &= \int_{\mathring{I}} f(\sigma(\boldsymbol{u}))\det(\sigma'(\boldsymbol{u}))\,d\boldsymbol{u}\\ &= \int_{\sigma(\mathring{I})} f = \int_{\sigma(I)} f\,.\end{aligned}$$

■

Se σ è la funzione identità, si ha che $\sigma(I) = I$ e al posto di $\int_\sigma \omega$ si userà scrivere $\int_I \omega$.

Vediamo il significato della definizione data quando $N = 3$. Se $M = 1$, $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva e ω è una 1-forma differenziale:

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\,dx_1 + F_2(\boldsymbol{x})\,dx_2 + F_3(\boldsymbol{x})\,dx_3\,.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\int_\sigma \omega &= \int_a^b [F_1(\sigma(t))\sigma_1'(t) + F_2(\sigma(t))\sigma_2'(t) + F_3(\sigma(t))\sigma_3'(t)]\,dt\\ &= \int_a^b \langle F(\sigma(t))|\sigma'(t)\rangle\,dt\,.\end{aligned}$$

Questa quantità si chiama **integrale di linea** [2] del campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$ lungo la curva σ, e si indica con il simbolo

$$\int_\sigma \langle F|d\ell\rangle\,.$$

Esempio. Calcoliamo l'integrale di linea del campo $F(x,y,z) = (-y,x,z^2)$ lungo la curva $\sigma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Si ha:

$$\int_\sigma \langle F|d\ell\rangle = \int_0^{2\pi} [(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + t^2]\,dt = 2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\,.$$

[2] In meccanica si usa questo concetto, ad esempio, per definire il **lavoro** di una particella che descrive una curva in un campo di forze.

Se $M = 2$, $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ è una superficie e ω è una 2-forma differenziale:

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\boldsymbol{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2 \,.$$

Si trova:

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \omega = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \Bigg[& F_1(\sigma(u,v)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} + \\
& + F_2(\sigma(u,v)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} + \\
& + F_3(\sigma(u,v)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \Bigg] \, du\, dv \\
= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} & \left\langle F(\sigma(u,v)) \middle| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\rangle du\, dv \,.
\end{aligned}$$

Questa quantità si chiama **integrale di superficie** o **flusso** [3] del campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$ attraverso la superficie σ, e si indica con il simbolo

$$\int_\sigma \langle F | dS \rangle \;.$$

Esempio. Calcoliamo il flusso del campo $F(x,y,z) = (-y, x, z^2)$ attraverso la superficie $\sigma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(u,v) = (u^2, v, u+v)$. Si ha:

$$\int_\sigma \langle F | dS \rangle = \int_0^1 \int_0^1 [(-v)(-1) + u^2(-2u) + (u+v)^2(2u)]\, du\, dv = \frac{3}{2} \,.$$

8 Funzioni scalari e misura $M-$superficiale

Siano

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_M \le N} f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M} \,,$$

una $M-$forma differenziale definita su un sottoinsieme U di $\mathbb{R}^N$, con $1 \le M \le N$, e $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$, una $M-$superficie con supporto contenuto in U. Ricordiamo che

$$\int_\sigma \omega = \int_I \langle F(\sigma(\boldsymbol{u})) | \Sigma(\boldsymbol{u}) \rangle \, d\boldsymbol{u} \,,$$

[3] In fluidodinamica si usa questo concetto, ad esempio, per definire la quantità di fluido che attraversa una superficie in un'unità di tempo.

dove

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{x}) &= (f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x}))_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} \ , \\
\Sigma(\boldsymbol{u}) &= \Big(\det \sigma'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\boldsymbol{u})\Big)_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} \ .
\end{aligned}
$$

Nelle applicazioni, oltre all'integrale di una $M-$forma differenziale, è utile definire l'integrale di una funzione scalare $f : U \to \mathbb{R}$ su di una $M-$superficie.

Definizione. *La funzione $f : U \to \mathbb{R}$ è integrabile sulla $M-$superficie $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ se $(f \circ \sigma)||\Sigma||$ è integrabile su I. In tal caso, si pone*

$$
\begin{aligned}
\int_\sigma f &= \int_I f(\sigma(\boldsymbol{u}))||\Sigma(\boldsymbol{u})||\, d\boldsymbol{u} \\
&= \int_I f(\sigma(\boldsymbol{u})) \left[\sum_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} \Big(\det \sigma'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\boldsymbol{u})\Big)^2\right]^{1/2} d\boldsymbol{u} \, .
\end{aligned}
$$

In questo caso, l'integrale non differisce per $M-$superfici equivalenti.

Teorema. *Se σ e $\tilde{\sigma}$ sono due $M-$superfici equivalenti, si ha:*

$$
\int_\sigma f = \int_{\tilde{\sigma}} f \, .
$$

Dimostrazione. Con le notazioni introdotte in precedenza, essendo $\sigma(\boldsymbol{u}) = \tilde{\sigma}(\varphi(\boldsymbol{u}))$ con $\varphi : A \to B$, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\Sigma(\boldsymbol{u}) &= \Big(\det \sigma'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\boldsymbol{u})\Big)_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} \\
&= \Big(\det \Big(\tilde{\sigma}'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\varphi(\boldsymbol{u}))\varphi'(\boldsymbol{u})\Big)\Big)_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} \\
&= \Big(\det \tilde{\sigma}'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\varphi(\boldsymbol{u}))\Big)_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} \det \varphi'(\boldsymbol{u}) \\
&= \tilde{\Sigma}(\varphi(\boldsymbol{u})) \det \varphi'(\boldsymbol{u}) \, .
\end{aligned}
$$

Pertanto, per il teorema di cambiamento di variabili, essendo $I\backslash A$ e $J\backslash B$ trascurabili, si ha:

$$
\begin{aligned}
\int_\sigma f &= \int_A f(\sigma(\boldsymbol{u}))||\Sigma(\boldsymbol{u})||\, d\boldsymbol{u} \\
&= \int_A f(\tilde{\sigma}(\varphi(\boldsymbol{u})))||\tilde{\Sigma}(\varphi(\boldsymbol{u}))||\; |\det \varphi'(\boldsymbol{u})|\, d\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_B f(\tilde\sigma(\boldsymbol{v}))||\tilde\Sigma(\boldsymbol{v})||\,d\boldsymbol{v} \\
&= \int_{\tilde\sigma} f\,.
\end{aligned}
$$

■

Nel caso $M = 1$, abbiamo una curva $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ e, data una funzione scalare f definita sul supporto di σ, si ha:

$$
\int_\sigma f = \int_a^b f(\sigma(t))||\sigma'(t)||\,dt\,.
$$

È interessante il caso in cui f è costantemente uguale a 1 : in accordo con l'idea fisica del moto di una particella lungo un percorso descritto dalla funzione σ, in questo caso l'integrale di linea si chiama **lunghezza** [4] (o misura curvilinea) della curva σ, e si scrive:

$$
\iota_1(\sigma) = \int_a^b ||\sigma'(t)||\,dt\,.
$$

Esempio. Sia $\sigma : [0, b] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$. Il suo supporto è un arco di parabola, e la sua lunghezza è data da:

$$
\begin{aligned}
\iota_1(\sigma) &= \int_0^b \sqrt{1+(2t)^2}\,dt \\
&= \int_{\sinh^{-1}(0)}^{\sinh^{-1}(2b)} \frac{1}{2}(\cosh u)^2\,du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u+\sinh u\cosh u}{2}\right]_0^{\sinh^{-1}(2b)} \\
&= \frac{1}{4}\left(\sinh^{-1}(2b) + 2b\sqrt{1+4b^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2b+\sqrt{1+4b^2}\right) + \frac{b}{2}\sqrt{1+4b^2}\,.
\end{aligned}
$$

Se $M = 2$ e $N = 3$, abbiamo una superficie $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ e, data una funzione scalare f definita sul supporto di σ, si ha:

$$
\int_\sigma f = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(\sigma(u,v)) \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\,dv\,.
$$

[4] Naturalmente questa definizione è anche giustificata da considerazioni geometriche, che preferiamo omettere per ragioni di brevità, sul concetto intuitivo che di solito si ha della lunghezza di un cammino.

È interessante il caso in cui f è costantemente uguale a 1 : in questo caso si chiama **area** (o misura superficiale) della superficie σ il seguente integrale:

$$\iota_2(\sigma) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv\,.$$

Nel caso in cui la superficie risulti essere una 2-parametrizzazione di un certo insieme, questo integrale è il flusso di un campo di vettori che in ogni punto della superficie coincide con il versore normale. [5]

Esempio. Sia $\sigma : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\phi,\theta) = (R \sin\phi \cos\theta, R \sin\phi \sin\theta, R\cos\phi)\,.$$

Il suo supporto è una sfera di raggio R, e la sua area è data da:

$$\begin{aligned}\iota_2(\sigma) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{(R^2 \sin^2\phi \cos\theta)^2 + (R^2 \sin^2\phi \sin\theta)^2 + (R^2 \sin\phi\cos\theta)^2}\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin\phi \, d\phi\, d\theta \\ &= 4\pi R^2\,.\end{aligned}$$

In generale, nel caso in cui f è costantemente uguale a 1 abbiamo

$$\int_\sigma 1 = \int_I ||\Sigma(\boldsymbol{u})||\, d\boldsymbol{u}\,,$$

il che ci porta alla seguente

Definizione. *Si dice* **misura** $M-$**superficiale** *di una* $M-$*superficie* $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ *il seguente integrale:*

$$\iota_M(\sigma) = \int_I \left[\sum_{1\le i_1 < \ldots < i_M \le N} \Big(\det \sigma'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\boldsymbol{u}) \Big)^2 \right]^{1/2} d\boldsymbol{u}\,.$$

Come ragionevolmente ci si aspetta, dall'ultimo teorema dimostrato segue immediatamente che due $M-$superfici equivalenti hanno sempre la stessa misura $M-$superficiale.

Esempio. Le due curve $\sigma, \tilde{\sigma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definite da

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t))\,, \quad \tilde{\sigma}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))\,,$$

pur avendo lo stesso supporto, non sono equivalenti. Infatti, come facilmente si vede, $\iota_1(\sigma) = 2\pi$ mentre $\iota_1(\tilde{\sigma}) = 4\pi$.

[5] Naturalmente anche la definizione di area può essere giustificata da considerazioni geometriche, anche se la questione risulta molto più delicata che nel caso delle curve.

Alla luce di quanto sopra, è possibile dare la seguente

Definizione. *Si chiama* **misura** $M-$**dimensionale** *di un insieme* $M-$*parametrizzabile* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ *la misura* $M-$*superficiale di una qualunque sua* $M-$*parametrizzazione.*

Nei casi $M = 1, 2$, la misura $M-$dimensionale di $\mathcal{M}$ si chiama spesso **lunghezza** o **area** di $\mathcal{M}$, rispettivamente. Si potrà parlare, ad esempio, di lunghezza di una circonferenza e di area di una sfera.

Se $M = N$, si può verificare che la misura $N-$dimensionale dell'insieme $\mathcal{M}$ coincide con la misura usuale che abbiamo trattato nel capitolo 2.