

## 9 Incollamenti: il bordo orientato di un rettangolo

Supponiamo che  $\sigma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^N, \dots, \sigma_n : I_n \rightarrow \mathbb{R}^N$  siano delle  $M$ -superfici. Possiamo facilmente trovare delle  $M$ -superfici equivalenti  $\tilde{\sigma}_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^N, \dots, \tilde{\sigma}_n : J_n \rightarrow \mathbb{R}^N$ , con la stessa orientazione, in modo tale che i rettangoli  $J_1, \dots, J_n$  siano a due a due non sovrapposti e la loro unione risulti essere un rettangolo  $I$ .

**Definizione.** Chiameremo **incollamento** delle  $M$ -superfici  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  una funzione  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  la cui restrizione a  $\overset{\circ}{J}_1, \dots, \overset{\circ}{J}_n$  coincide con  $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n$ , rispettivamente; essa è differenziabile quasi ovunque, e possiamo definire  $\int_{\sigma} \omega$  per mezzo della stessa formula usata per le  $M$ -superfici di classe  $C^1$ . Quindi:

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\sigma_1} \omega + \dots + \int_{\sigma_n} \omega.$$

Abbiamo così “incollato” le  $M$ -superfici  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  e definito un integrale che non dipende dalla scelta delle  $M$ -superfici equivalenti, poiché esse conservano l’orientazione. Nella pratica non sarà mai necessario definire esplicitamente l’incollamento, ma ci sarà indispensabile la formula per l’integrale.

Supponiamo ora che  $I$  sia un rettangolo in  $\mathbb{R}^{M+1}$ , con  $M \geq 1$ :

$$I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{M+1}, b_{M+1}].$$

Denotiamo con  $I_k$  il rettangolo di  $\mathbb{R}^M$  ottenuto da  $I$  sopprimendo la  $k$ -esima componente:

$$I_k = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \dots \times [a_{M+1}, b_{M+1}].$$

Consideriamo, per ogni  $k$ , le  $M$ -superfici  $\alpha_k^+, \beta_k^+ : I_k \rightarrow \mathbb{R}^{M+1}$  definite da

$$\begin{aligned} \alpha_k^+(u_1, \dots, \widehat{u_k}, \dots, u_{M+1}) &= (u_1, \dots, u_{k-1}, a_k, u_{k+1}, \dots, u_{M+1}), \\ \beta_k^+(u_1, \dots, \widehat{u_k}, \dots, u_{M+1}) &= (u_1, \dots, u_{k-1}, b_k, u_{k+1}, \dots, u_{M+1}), \end{aligned}$$

dove il simbolo  $\widehat{\phantom{x}}$  sta ad indicare la soppressione della variabile sottostante. Consideriamo inoltre delle  $M$ -superfici  $\alpha_k^-, \beta_k^- : I_k \rightarrow \mathbb{R}^{M+1}$ , equivalenti a  $\alpha_k^+$  e  $\beta_k^+$ , rispettivamente, con orientazione opposta. (Stiamo qui considerando la situazione in cui  $N = M + 1$ .)

**Definizione.** Chiamiamo **bordo orientato** del rettangolo  $I$  una funzione  $\partial I$  incollamento delle seguenti  $M$ -superfici:

- (a)  $\alpha_k^-$  e  $\beta_k^+$  se  $k$  è dispari;
- (b)  $\alpha_k^+$  e  $\beta_k^-$  se  $k$  è pari.

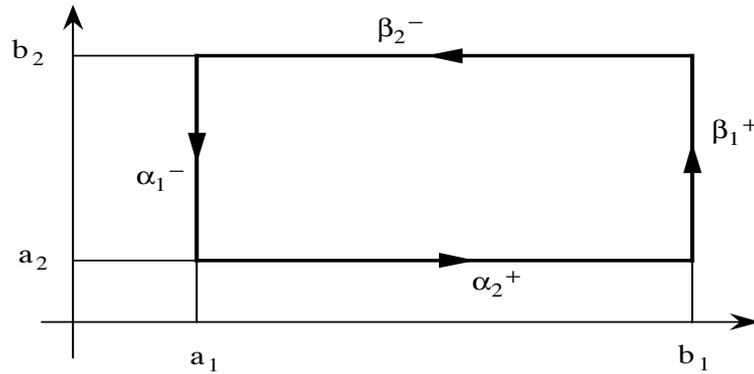
Se  $\omega$  è una  $M$ -forma differenziale definita su un sottoinsieme  $U$  di  $\mathbb{R}^{M+1}$  contenente l'immagine di  $\partial I$ , avremo quindi:

$$\int_{\partial I} \omega = \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k \int_{\alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \int_{\beta_k^+} \omega.$$

Se  $M = 1$ , consideriamo il rettangolo  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ . Allora, ad esempio:

$$\begin{aligned} \alpha_1^- &: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2, & v &\mapsto (a_1, a_2 + b_2 - v) \\ \beta_1^+ &: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2, & v &\mapsto (b_1, v) \\ \alpha_2^+ &: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, & u &\mapsto (u, a_2) \\ \beta_2^- &: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2, & u &\mapsto (a_1 + b_1 - u, b_2). \end{aligned}$$

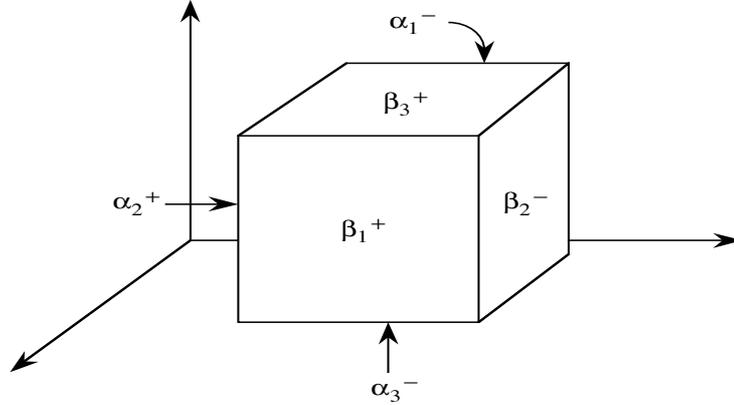
Si può visualizzare il bordo orientato  $\partial I$  come incollamento dei lati del rettangolo  $I$  orientati in modo che il perimetro sia percorso in senso antiorario.



Se  $M = 2$ , abbiamo, ad esempio:

$$\begin{aligned} \alpha_1^- &: [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}^3, & (v, w) &\mapsto (a_1, a_2 + b_2 - v, w) \\ \beta_1^+ &: [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}^3, & (v, w) &\mapsto (b_1, v, w) \\ \alpha_2^+ &: [a_1, b_1] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}^3, & (u, w) &\mapsto (u, a_2, w) \\ \beta_2^- &: [a_1, b_1] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}^3, & (u, w) &\mapsto (u, b_2, a_3 + b_3 - w) \\ \alpha_3^- &: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3, & (u, v) &\mapsto (a_1 + b_1 - u, v, a_3) \\ \beta_3^+ &: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3, & (u, v) &\mapsto (u, v, b_3). \end{aligned}$$

In questo caso, si può visualizzare il bordo orientato  $\partial I$  come incollamento delle sei facce del parallelepipedo  $I$ , tutte orientate in modo tale che il vettore normale sia sempre rivolto verso l'esterno.



## 10 La formula di Gauss

In questa sezione,  $I$  sarà un rettangolo di  $\mathbb{R}^N$ , con  $N \geq 2$  (quindi, rispetto alla sezione precedente, considereremo il caso  $N = M + 1$ ). Nel teorema che segue, si ottiene l'elegante **formula di Gauss**.

**Teorema.** Se  $\omega$  è una  $(N - 1)$ -forma differenziale di classe  $C^1$  definita su un aperto contenente un rettangolo  $I$  di  $\mathbb{R}^N$ , si ha:

$$\int_I d\omega = \int_{\partial I} \omega.$$

**Dimostrazione.** Possiamo scrivere  $\omega$  nella forma

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N F_j(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_N.$$

Allora

$$\begin{aligned} d\omega(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial x_m}(\mathbf{x}) dx_m \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_N \\ &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N. \end{aligned}$$

Essendo le derivate parziali delle  $F_j$  continue, esse sono integrabili sull'intervallo  $I$ , e possiamo usare la formula di riduzione di Fubini:

$$\int_I d\omega = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \int_I \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_N$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \int_{I_j} \left( \int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_N) dx_j \right) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_N \\
&= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \int_{I_j} [F_j(x_1, \dots, x_{j-1}, b_j, x_{j+1}, \dots, x_N) - \\
&\quad - F_j(x_1, \dots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_N)] dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_N,
\end{aligned}$$

per il teorema fondamentale. D'altra parte,

$$\int_{\partial I} \omega = \sum_{k=1}^N (-1)^k \int_{\alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \int_{\beta_k^+} \omega.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_k^+} \omega &= \sum_{j=1}^N \int_{\alpha_k^+} F_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_N \\
&= \sum_{j=1}^N \int_{I_k} (F_j \circ \alpha_k^+) \det(\alpha_k^+)_{(1, \dots, \hat{j}, \dots, N)} dx_1 \dots \widehat{dx_k} \dots dx_N \\
&= \int_{I_k} F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_N) dx_1 \dots \widehat{dx_k} \dots dx_N,
\end{aligned}$$

essendo

$$\det(\alpha_k^+)_{(1, \dots, \hat{j}, \dots, N)} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k, \\ 1 & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Procedendo similmente per  $\beta_k^+$ , alla fine si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial I} \omega &= \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \int_{I_k} [F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_N) \\
&\quad - F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_N)] dx_1 \dots \widehat{dx_k} \dots dx_N,
\end{aligned}$$

e la dimostrazione è completa. ■

## 11 Bordo orientato di una $M$ -superficie

In questa sezione,  $I$  sarà un rettangolo di  $\mathbb{R}^{M+1}$  e  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  una  $(M+1)$ -superficie.

**Definizione.** Se  $1 \leq M \leq N - 1$ , chiameremo **bordo orientato** di  $\sigma$  la funzione  $\partial\sigma = \sigma \circ \partial I$ , che risulta essere un incollamento delle seguenti  $M$ -superfici:

- (a)  $\sigma \circ \alpha_k^-$  e  $\sigma \circ \beta_k^+$  se  $k$  è dispari;
- (b)  $\sigma \circ \alpha_k^+$  e  $\sigma \circ \beta_k^-$  se  $k$  è pari.

Data una  $M$ -forma differenziale  $\omega$  il cui dominio contiene il supporto di  $\partial\sigma$ , avremo quindi

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k \int_{\sigma \circ \alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \int_{\sigma \circ \beta_k^+} \omega.$$

**Nota.** È utile estendere la scrittura  $\int_{\partial\sigma} \omega$  nel caso in cui  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  sia una curva, con  $N \geq 1$ , e  $\omega = f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una 0-forma differenziale; in questo caso, si pone:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

**Esempi.** Come illustrazione, consideriamo come al solito il caso  $N = 3$ . Cominciamo con tre esempi di bordo orientato di superfici.

1. Sia  $\sigma : [r, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $0 \leq r < R$ , data da

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 0).$$

Il suo supporto è un cerchio se  $r = 0$ , una corona circolare se  $r > 0$ . Il bordo orientato  $\partial\sigma$  è dato dall'incollamento delle seguenti quattro curve:

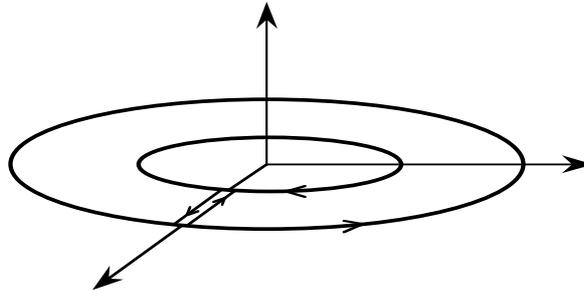
$$\sigma \circ \alpha_1^-(v) = (r \cos v, -r \sin v, 0),$$

$$\sigma \circ \beta_1^+(v) = (R \cos v, R \sin v, 0),$$

$$\sigma \circ \alpha_2^+(u) = (u, 0, 0),$$

$$\sigma \circ \beta_2^-(u) = (r + R - u, 0, 0).$$

La prima curva ha come supporto una circonferenza di raggio  $r$ , che degenera nell'origine nel caso in cui  $r = 0$ . La seconda ha come supporto una circonferenza di raggio  $R$ . Si noti però che il verso di percorrenza di queste due circonferenze è opposto. Le ultime due curve sono equivalenti con orientazioni opposte.

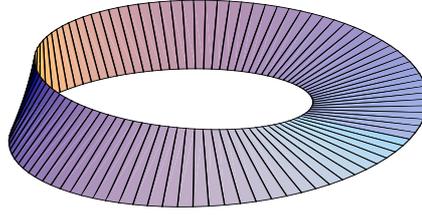


Sia ora dato, per esempio, il campo vettoriale  $F(x, y, z) = (-y, x, xye^z)$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\sigma} \langle F | d\ell \rangle &= \int_{\sigma \circ \alpha_1^-} \langle F | d\ell \rangle + \int_{\sigma \circ \beta_1^+} \langle F | d\ell \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} [-r^2 \sin^2 v - r^2 \cos^2 v] dv + \int_0^{2\pi} [R^2 \sin^2 v + R^2 \cos^2 v] dv \\ &= 2\pi(R^2 - r^2). \end{aligned}$$

2. Consideriamo la superficie  $\sigma : [r, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $0 < r < R$ , definita da

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) = & \left( \left( \frac{r+R}{2} + \left( u - \frac{r+R}{2} \right) \cos \left( \frac{v}{2} \right) \right) \cos v, \right. \\ & \left( \frac{r+R}{2} + \left( u - \frac{r+R}{2} \right) \cos \left( \frac{v}{2} \right) \right) \sin v, \\ & \left. \left( u - \frac{r+R}{2} \right) \sin \left( \frac{v}{2} \right) \right), \end{aligned}$$



il cui supporto è un nastro di Möbius. In questo caso, il bordo orientato è dato dall'incollamento di:

$$\begin{aligned} \sigma \circ \alpha_1^-(v) = & \left( \left( \frac{r+R}{2} + \frac{R-r}{2} \cos \left( \frac{v}{2} \right) \right) \cos v, \right. \\ & - \left( \frac{r+R}{2} + \frac{R-r}{2} \cos \left( \frac{v}{2} \right) \right) \sin v, \\ & \left. - \frac{R-r}{2} \sin \left( \frac{v}{2} \right) \right), \\ \sigma \circ \beta_1^+(v) = & \left( \left( \frac{r+R}{2} + \frac{R-r}{2} \cos \left( \frac{v}{2} \right) \right) \cos v, \right. \\ & \left( \frac{r+R}{2} + \frac{R-r}{2} \cos \left( \frac{v}{2} \right) \right) \sin v, \\ & \left. \frac{R-r}{2} \sin \left( \frac{v}{2} \right) \right), \\ \sigma \circ \alpha_2^+(u) = & (u, 0, 0), \\ \sigma \circ \beta_2^-(u) = & (u, 0, 0). \end{aligned}$$

Si noti che in questo caso le ultime due curve sono identiche.

3. Consideriamo la superficie  $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$\sigma(\phi, \theta) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi),$$

il cui supporto è la sfera di raggio  $R > 0$  centrata nell'origine. In questo caso, il bordo orientato è dato dall'incollamento di:

$$\begin{aligned} \sigma \circ \alpha_1^-(\theta) &= (0, 0, R), \\ \sigma \circ \beta_1^+(\theta) &= (0, 0, -R), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma \circ \alpha_2^+(\phi) &= (R \sin \phi, 0, R \cos \phi), \\ \sigma \circ \beta_2^-(\phi) &= (R \sin \phi, 0, -R \cos \phi).\end{aligned}$$

Si noti che le prime due curve sono degenerate in un punto, mentre le ultime due sono equivalenti con orientazioni opposte. Quindi, qualsiasi sia il campo vettoriale  $F$ , si avrà  $\int_{\partial\sigma} \langle F | d\ell \rangle = 0$ .

Vediamo ora un esempio di bordo orientato di un volume in  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $\sigma : [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  il volume definito da

$$\sigma(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi),$$

il cui supporto è la palla, centrata nell'origine, di raggio  $R > 0$ . Il bordo orientato  $\partial\sigma$  è dato dall'incollamento delle seguenti sei superfici:

$$\begin{aligned}\sigma \circ \alpha_1^-(\phi, \theta) &= (0, 0, 0), \\ \sigma \circ \beta_1^+(\phi, \theta) &= (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi), \\ \sigma \circ \alpha_2^+(\rho, \theta) &= (0, 0, \rho), \\ \sigma \circ \beta_2^-(\rho, \theta) &= (0, 0, -\rho), \\ \sigma \circ \alpha_3^-(\rho, \phi) &= ((R - \rho) \sin \phi, 0, (R - \rho) \cos \phi), \\ \sigma \circ \beta_3^+(\rho, \phi) &= (\rho \sin \phi, 0, \rho \cos \phi).\end{aligned}$$

Si noti che la prima superficie è degenerata in un punto (l'origine), la seconda ha come supporto la sfera intera, la terza e la quarta sono degenerate in due curve mentre le rimanenti due sono equivalenti con orientazioni opposte. In questo esempio, quindi, dato un campo vettoriale  $F$ , si avrà sempre

$$\int_{\partial\sigma} \langle F | dS \rangle = \int_{\sigma \circ \beta_1^+} \langle F | dS \rangle.$$

## 12 La formula di Stokes - Cartan

Enunciamo la seguente generalizzazione del teorema di Gauss, in cui si ottiene l'importante **formula di Stokes - Cartan**.

**Teorema.** Sia  $0 \leq M \leq N - 1$ . Se  $\omega : U \rightarrow \Omega_M(\mathbb{R}^N)$  è una  $M$ -forma differenziale di classe  $C^1$  e  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  una  $(M + 1)$ -superficie il cui supporto è contenuto in  $U$ , si ha:

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

Si noti che il caso  $M = 0$ ,  $N = 1$  e  $\sigma(u) = u$  è una versione del teorema fondamentale, anche se qui si richiede che la derivata di  $\omega$  sia continua.

La dimostrazione generale del teorema di Stokes-Cartan è data nell'appendice 2. Ci limiteremo qui a considerare alcuni corollari che si ottengono, nel caso  $N = 3$ , quando  $M$  assume i valori 0, 1 e 2. È interessante dimostrare direttamente questi corollari, adattando la dimostrazione generale a questi casi particolari.

Il caso  $M = 0$ . Consideriamo una 0-forma differenziale  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  e otteniamo il seguente

**Teorema.** Sia  $\omega = f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione scalare di classe  $C^1$  e  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva con supporto contenuto in  $U$ . Allora:

$$\int_{\sigma} \langle \text{grad } f | d\ell \rangle = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

**Dimostrazione.** Consideriamo la funzione  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $G(t) = f(\sigma(t))$ . Essa è di classe  $C^1$ , e per il teorema fondamentale si ha

$$\int_a^b G'(t) dt = G(b) - G(a).$$

Siccome  $G'(t) = \langle \text{grad } f(\sigma(t)) | \sigma'(t) \rangle$ , ne segue la formula cercata. ■

**Nota.** L'integrale di linea del gradiente di una funzione  $f$  non dipende dalla curva scelta, ma soltanto dal valore della funzione nei due estremi  $\sigma(b)$  e  $\sigma(a)$ .

**Esempio.** Siano dati il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = - \left( \frac{x}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \frac{y}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right)$$

e la curva  $\sigma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ . Vogliamo calcolare l'integrale di linea  $\int_{\sigma} \langle F | d\ell \rangle$ . Osserviamo che  $F = \text{grad } f$ , con

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

e quindi:

$$\int_{\sigma} \langle F | d\ell \rangle = f(\sigma(4\pi)) - f(\sigma(0)) = \frac{1}{\sqrt{1 + 16\pi^2}} - 1.$$

Il caso  $M = 1$ . Consideriamo una 1-forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) dx_1 + F_2(\mathbf{x}) dx_2 + F_3(\mathbf{x}) dx_3$$

e otteniamo la **formula di Stokes-Ampère**.

**Teorema.** Sia  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo di vettori di classe  $C^1$  e  $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie con supporto contenuto in  $U$ . Si ha:

$$\int_{\sigma} \langle \text{rot } F | dS \rangle = \int_{\partial\sigma} \langle F | d\ell \rangle.$$

**A parole.** Il flusso del rotore del campo  $F$  attraverso la superficie  $\sigma$  coincide con l'integrale di linea di  $F$  lungo il bordo di  $\sigma$ .

**Dimostrazione.** Posto  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ , definiamo la seguente 1-forma differenziale  $\tilde{\omega} : I \rightarrow \Omega_1(\mathbb{R}^2)$  :

$$\tilde{\omega}(u, v) = \left\langle F(\sigma(u, v)) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \right. \right\rangle du + \left\langle F(\sigma(u, v)) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right. \right\rangle dv.$$

Iniziamo a valutare il suo integrale su  $\alpha_1^-$  :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1^-} \tilde{\omega} &= \int_{a_2}^{b_2} \left\langle F(\sigma(a_1, a_2 + b_2 - v)) \left| -\frac{\partial \sigma}{\partial v}(a_1, a_2 + b_2 - v) \right. \right\rangle dv \\ &= \int_{\sigma \circ \alpha_1^-} \langle F | d\ell \rangle. \end{aligned}$$

Si verificano poi le analoghe uguaglianze per l'integrale su  $\beta_1^+$ ,  $\alpha_2^+$  e  $\beta_2^-$ , per cui si ha che

$$\int_{\partial I} \tilde{\omega} = \int_{\partial \sigma} \langle F | d\ell \rangle.$$

Supponiamo ora che  $\sigma$  sia di classe  $C^2$ . Allora  $\tilde{\omega}$  è di classe  $C^1$  e, con un po' di conti, si trova:

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}(u, v) &= \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left\langle F(\sigma(u, v)) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right. \right\rangle - \frac{\partial}{\partial v} \left\langle F(\sigma(u, v)) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \right. \right\rangle \right] du \wedge dv \\ &= \left\langle \operatorname{rot} F(\sigma(u, v)) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right. \right\rangle du \wedge dv, \end{aligned}$$

per cui

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_{\sigma} \langle \operatorname{rot} F | dS \rangle.$$

La formula di Gauss applicata a  $\tilde{\omega}$  permette quindi di concludere.

L'ipotesi che  $\sigma$  sia di classe  $C^2$  può infine essere tolta con un procedimento di approssimazione: è possibile costruire una successione  $(\sigma_n)_n$  di superfici di classe  $C^2$  che convergono a  $\sigma$  assieme a tutte le derivate parziali. La formula di Stokes-Ampère vale quindi per tali superfici e, passando al limite, per il teorema della convergenza dominata, abbiamo la conclusione. ■

**Esempio.** Sia  $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$  e  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva definita da  $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, 0)$ ; vogliamo calcolare l'integrale di linea  $\int_{\gamma} \langle F | d\ell \rangle$ . Abbiamo già visto come calcolare questo integrale facendo uso diretto della definizione. Procediamo ora in un altro modo: definiamo la superficie  $\sigma : [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  data da  $\sigma(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$ . Osserviamo che  $\gamma = \sigma \circ \beta_1^+$ , per cui si ha:

$$\int_{\gamma} \langle F | d\ell \rangle = \int_{\sigma \circ \beta_1^+} \langle F | d\ell \rangle = \int_{\partial\sigma} \langle F | d\ell \rangle = \int_{\sigma} \langle \text{rot } F | dS \rangle.$$

Osserviamo che  $\text{rot } F(x, y, z) = (0, 0, 2)$  e

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}(\rho, \theta) \times \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\rho, \theta) = (0, 0, \rho).$$

Ne segue che

$$\int_{\gamma} \langle F | d\ell \rangle = \int_0^R \int_0^{2\pi} \langle (0, 0, 2) | (0, 0, \rho) \rangle d\theta d\rho = 2\pi R^2.$$

Il caso  $M = 2$ . Consideriamo una 2-forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\mathbf{x}) dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2$$

e otteniamo la **formula di Stokes-Ostrogradski**.

**Teorema.** Sia  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo di vettori di classe  $C^1$  e supponiamo che  $\sigma : I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{R}^3$  sia regolare e iniettiva su  $\overset{\circ}{I}$  con  $\det \sigma' > 0$ , e  $\sigma(I) \subset U$ . Allora:

$$\int_{\sigma(I)} \text{div } F = \int_{\partial\sigma} \langle F | dS \rangle.$$

**In termini intuitivi.** L'integrale della divergenza del campo  $F$  sull'insieme  $V = \sigma(I)$  coincide con il flusso di  $F$  uscente da  $V$ .

**Dimostrazione.** Consideriamo la seguente 2-forma differenziale  $\tilde{\omega} : I \rightarrow \Omega_2(\mathbb{R}^3)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\mathbf{u}) = & \left\langle F(\sigma(\mathbf{u})) \left| \frac{\partial\sigma}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_3}(\mathbf{u}) \right. \right\rangle du_2 \wedge du_3 + \\ & + \left\langle F(\sigma(\mathbf{u})) \left| \frac{\partial\sigma}{\partial u_3}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \right. \right\rangle du_3 \wedge du_1 + \\ & + \left\langle F(\sigma(\mathbf{u})) \left| \frac{\partial\sigma}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right. \right\rangle du_1 \wedge du_2 \end{aligned}$$

Considerata la superficie  $\beta_1^+$ , si ha:

$$\int_{\beta_1^+} \tilde{\omega} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \left\langle F(b_1, u_2, u_3) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(b_1, u_2, u_3) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_3}(b_1, u_2, u_3) \right. \right\rangle du_2 du_3 \\
&= \int_{\beta_1^+} \langle F | dS \rangle.
\end{aligned}$$

Calcolando analogamente gli integrali sulle altre cinque superfici che compongono  $\partial I$ , si conclude che

$$\int_{\partial I} \tilde{\omega} = \int_{\partial \sigma} \langle F | dS \rangle.$$

Supponiamo ora che  $\sigma$  sia di classe  $C^2$ . Allora  $\tilde{\omega}$  è di classe  $C^1$  e, facendo i conti, con un po' di pazienza si ha:

$$\begin{aligned}
d\tilde{\omega}(\mathbf{u}) &= \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left\langle F(\sigma(\mathbf{u})) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_3}(\mathbf{u}) \right. \right\rangle + \right. \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial u_2} \left\langle F(\sigma(\mathbf{u})) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u_3}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \right. \right\rangle + \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_3} \left\langle F(\sigma(\mathbf{u})) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\mathbf{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(\mathbf{u}) \right. \right\rangle \right] du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 \\
&= \operatorname{div} F(\sigma(\mathbf{u})) \det \sigma'(\mathbf{u}) du_1 \wedge du_2 \wedge du_3.
\end{aligned}$$

Quindi, si ha:

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_I \operatorname{div} F(\sigma(\mathbf{u})) \det \sigma'(\mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

D'altra parte, siccome  $\sigma$  induce un diffeomorfismo tra  $\overset{\circ}{I}$  e  $\sigma(\overset{\circ}{I})$  con  $\det \sigma' > 0$ , per il teorema di cambiamento di variabili

$$\int_I \operatorname{div} F(\sigma(\mathbf{u})) \det \sigma'(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_{\sigma(I)} \operatorname{div} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

La formula di Gauss applicata a  $\tilde{\omega}$  permette quindi di concludere.

L'ipotesi che  $\sigma$  sia di classe  $C^2$  può infine essere tolta con un procedimento di approssimazione, come nel teorema precedente. ■

**Esempio.** Si voglia calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = ([x^2 + y^2 + z^2]x, [x^2 + y^2 + z^2]y, [x^2 + y^2 + z^2]z)$$

attraverso una superficie sferica parametrizzata da  $\eta : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 :$

$$\eta(\phi, \theta) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi).$$

Ci ricordiamo che  $\eta = \sigma \circ \beta_1^+$ , dove  $\sigma : I = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è il volume dato da

$$\sigma(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi).$$

Abbiamo quindi:

$$\int_{\eta} \langle F | dS \rangle = \int_{\partial\sigma} \langle F | dS \rangle = \int_{\sigma(I)} \operatorname{div} F.$$

Essendo  $\operatorname{div} F(x, y, z) = 5(x^2 + y^2 + z^2)$ , passando a coordinate sferiche si ha:

$$\int_{\sigma(I)} \operatorname{div} F = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R (5\rho^2)(\rho^2 \sin \phi) d\rho d\phi d\theta = 4\pi R^5.$$

### 13 Risultati analoghi in $\mathbb{R}^2$

Supponiamo che  $U$  sia un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  e troviamo due interessanti corollari del teorema di Stokes-Cartan. Analogamente al caso  $N = 3$ , si definisce l'integrale di linea di un campo di vettori  $F = (F_1, F_2)$  lungo una curva  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$\int_{\sigma} \langle F | d\ell \rangle = \int_a^b [F_1(\sigma(t))\sigma_1'(t) + F_2(\sigma(t))\sigma_2'(t)] dt.$$

Abbiamo il seguente risultato, analogo a quello ottenuto nella sezione precedente nel caso  $N = 3$ .

**Teorema.** Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione scalare di classe  $C^1$  e  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva con immagine contenuta in  $U$ . Allora:

$$\int_{\sigma} \left\langle \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \middle| d\ell \right\rangle = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)).$$

Prendendo invece  $M = 2$ , otteniamo la **formula di Gauss-Green**.

**Teorema.** Sia  $F = (F_1, F_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo di vettori di classe  $C^1$  e supponiamo che la superficie  $\sigma : I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sia regolare e iniettiva su  $\overset{\circ}{I}$  con  $\det \sigma' > 0$ , e  $\sigma(I) \subset U$ . Allora:

$$\int_{\sigma(I)} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \int_{\partial\sigma} \langle F | d\ell \rangle.$$

**Dimostrazione.** Similmente a quanto fatto nella dimostrazione del teorema di Stokes-Ampère, consideriamo la forma differenziale ausiliaria  $\tilde{\omega} : I \rightarrow \Omega_1(\mathbb{R}^2)$  definita da

$$\tilde{\omega}(u, v) = \left\langle F(\sigma(u, v)) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \right. \right\rangle du + \left\langle F(\sigma(u, v)) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right. \right\rangle dv$$

e verifichiamo che

$$\int_{\partial I} \tilde{\omega} = \int_{\partial \sigma} \langle F | d\ell \rangle.$$

Se  $\sigma$  è di classe  $C^2$ , allora  $\tilde{\omega}$  è di classe  $C^1$  e, facendo i conti, si trova

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}(u, v) &= \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left\langle F(\sigma(u, v)) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right. \right\rangle - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial v} \left\langle F(\sigma(u, v)) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \right. \right\rangle \right] du \wedge dv \\ &= \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\sigma(u, v)) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\sigma(u, v)) \right) \det \sigma'(u, v) du \wedge dv. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_I \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\sigma(u, v)) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\sigma(u, v)) \right) \det \sigma'(u, v) du dv,$$

e siccome  $\sigma$  induce un diffeomorfismo tra  $\overset{\circ}{I}$  e  $\sigma(\overset{\circ}{I})$  con  $\det \sigma' > 0$ , per il teorema di cambiamento di variabili

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_{\sigma(I)} \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

La formula di Gauss applicata a  $\tilde{\omega}$  permette quindi di concludere.

Analogamente a quanto visto nel caso  $N = 3$ , si può ora togliere l'ipotesi che  $\sigma$  sia di classe  $C^2$  con un procedimento di approssimazione. ■

**Esempio.** Consideriamo la superficie  $\sigma : I = [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $\sigma(\rho, \theta) = (A\rho \cos \theta, B\rho \sin \theta)$ , il cui supporto è una superficie ellittica avente semiassi di lunghezza  $A > 0$  e  $B > 0$ . Si prenda il campo di vettori  $F(x, y) = (-y, x)$ . Essendo

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 2$$

e (come nel caso del cerchio)

$$\int_{\partial \sigma} \langle F | d\ell \rangle = \int_{\sigma \circ \beta_1^+} \langle F | d\ell \rangle,$$

la formula di Gauss-Green ci da:

$$\int_{\sigma(I)} 2 dx dy = \int_0^{2\pi} \langle (-B \sin \theta, A \cos \theta) | (-A \sin \theta, B \cos \theta) \rangle d\theta = 2\pi AB.$$

Se ne ricava l'area della superficie ellittica:  $\mu(\sigma(I)) = \pi AB$ .

## 14 Forme differenziali esatte

Ci interessiamo ora al problema di trovare in quali casi una forma differenziale data possa essere scritta come il differenziale esterno di una forma differenziale da determinarsi. In questa sezione, supporremo  $M \geq 1$ .

**Definizione.** Una  $M$ -forma differenziale  $\omega$  si dice **chiusa** se  $d\omega = 0$ ; si dice **esatta** se esiste una  $(M-1)$ -forma differenziale  $\tilde{\omega}$  tale che  $d\tilde{\omega} = \omega$ .

Ogni forma differenziale esatta è chiusa: se  $\omega = d\tilde{\omega}$ , allora  $d\omega = d(d\tilde{\omega}) = 0$ . Il viceversa non sempre è vero.

**Esempio.** La 1-forma differenziale definita su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  da

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

è chiusa, come facilmente si verifica: ponendo

$$F_1(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad F_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

per ogni  $(x, y) \neq (0, 0)$ , si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y).$$

Calcoliamo l'integrale di linea del campo di vettori  $F = (F_1, F_2)$  che determina la forma differenziale sulla curva  $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \langle F | d\ell \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(t)) | \sigma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t) | (-\sin t, \cos t) \rangle dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che  $\omega$  sia esatta, cioè che esista una funzione  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$ . In tal caso, essendo  $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$ , si avrebbe:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \langle F | d\ell \rangle &= \int_{\sigma} \left\langle \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \middle| d\ell \right\rangle \\ &= f(\sigma(2\pi)) - f(\sigma(0)) = 0, \end{aligned}$$

in contraddizione con quanto sopra.

La situazione descritta nell'esempio precedente non può verificarsi se, ad esempio, l'insieme  $U$  su cui è definita la forma differenziale è un aperto stellato rispetto ad un punto  $\bar{x}$ , cioè contiene, per ogni suo punto  $x$ , tutto il segmento che congiunge  $x$  a  $\bar{x}$ . Vale infatti il seguente **teorema di Poincaré**:

**Teorema.** Sia  $U$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^N$  stellato rispetto ad un punto  $\bar{\mathbf{x}}$ . Per  $1 \leq M \leq N$ , una  $M$ -forma differenziale  $\omega : U \rightarrow \Omega_M(\mathbb{R}^N)$  di classe  $C^1$  è esatta se e solo se essa è chiusa. In tal caso, se  $\omega$  è del tipo

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} f_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M},$$

una  $(M-1)$ -forma differenziale  $\tilde{\omega}$  tale che  $d\tilde{\omega} = \omega$  è data da

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\mathbf{x}) = & \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \sum_{s=1}^M (-1)^{s+1} (x_{i_s} - \bar{x}_{i_s}) \cdot \\ & \cdot \left( \int_0^1 t^{M-1} f_{i_1, \dots, i_M}(\bar{\mathbf{x}} + t(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge \dots \wedge dx_{i_M}. \end{aligned}$$

La dimostrazione generale di questo teorema verrà data nell'appendice 2. Come nel caso del teorema di Stokes-Cartan, considereremo qui solo alcuni corollari che si ottengono nel caso  $N = 3$ , fornendone anche una dimostrazione diretta. Per semplificare la scrittura, supporremo senza perdita di generalità  $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 0)$ .

Il caso  $M = 1$ . Un campo di vettori  $F = (F_1, F_2, F_3)$ , di classe  $C^1$ , definito su un sottoinsieme aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^3$ , determina una 1-forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) dx_1 + F_2(\mathbf{x}) dx_2 + F_3(\mathbf{x}) dx_3.$$

Essa è chiusa se e solo se  $\text{rot } F = 0$ . In questo caso, il campo di vettori si dice **irrotazionale**. Diremo invece che il campo di vettori  $F$  è **conservativo** se esiste una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $F = \text{grad } f$ . In tal caso  $f$  si dice un **potenziale scalare** del campo  $F$ .<sup>6</sup>

**Teorema.** Se  $U$  è stellato rispetto all'origine, si ha che il campo di vettori  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  è conservativo se e solo se esso è irrotazionale, e in tal caso una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $F = \text{grad } f$  è data da:

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \langle F(t\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle dt.$$

Ogni altra funzione  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $F = \text{grad } \tilde{f}$  si ottiene da  $f$  aggiungendo una costante.

---

<sup>6</sup>In meccanica spesso è la funzione  $-f$  a chiamarsi "potenziale".

**Dimostrazione.** Poniamo  $\tilde{\omega} = f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Verifichiamo che  $d\tilde{\omega} = \omega$ . Usando la regola di Leibniz, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \langle F(t\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) t x_i \right) + F_j(t\mathbf{x}) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t\mathbf{x}) t x_i \right) + F_j(t\mathbf{x}) \right) dt. \end{aligned}$$

Definendo  $\phi(t) = tF_j(t\mathbf{x})$ , si ha che

$$\phi'(t) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t\mathbf{x}) t x_i \right) + F_j(t\mathbf{x}),$$

e per il teorema fondamentale si ha quindi:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = F_j(\mathbf{x}),$$

il che dimostra che  $F = \text{grad } f$ . La seconda parte del teorema segue dal fatto che, se  $\text{grad } f = \text{grad } \tilde{f}$ , allora  $f - \tilde{f}$  deve essere costante su  $U$ . ■

**Esempio.** Consideriamo il campo di vettori  $F(x, y, z) = (2xz + y, x, x^2)$  che, come si verifica facilmente, è irrotazionale. Si trova:

$$f(x, y, z) = \int_0^1 ((2t^2 x^2 z + txy) + txy + t^2 x^2 z) dt = xy + x^2 z.$$

Il caso  $M = 2$ . Un campo di vettori  $F = (F_1, F_2, F_3)$ , di classe  $C^1$ , definito su un sottoinsieme aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^3$ , determina una 2-forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\mathbf{x}) dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2.$$

Essa è chiusa se e solo se  $\text{div } F = 0$ . In questo caso, il campo di vettori si dice **solenoidale**. Si dice che  $F$  ha un **potenziale vettore** se esiste un campo di vettori  $V = (V_1, V_2, V_3)$  tale che  $F = \text{rot } V$ .

**Teorema.** Se  $U$  è stellato rispetto all'origine, si ha che il campo di vettori  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ha un potenziale vettore se e solo se esso è solenoidale, e in tal caso un campo di vettori  $V : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $F = \text{rot } V$  è dato da:

$$V(\mathbf{x}) = \left( \int_0^1 t(F_2(t\mathbf{x})x_3 - F_3(t\mathbf{x})x_2) dt, \right.$$

$$\int_0^1 t(F_3(t\mathbf{x})x_1 - F_1(t\mathbf{x})x_3) dt, \\ \int_0^1 t(F_1(t\mathbf{x})x_2 - F_2(t\mathbf{x})x_1) dt),$$

che scriveremo brevemente

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^1 t(F(t\mathbf{x}) \times \mathbf{x}) dt.$$

Ogni altro campo di vettori  $\tilde{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $F = \text{rot } \tilde{V}$  si ottiene da  $V$  aggiungendo il gradiente di una qualsiasi funzione scalare.

**Dimostrazione.** Consideriamo la 1-forma differenziale determinata dal campo  $V$  :

$$\tilde{\omega}(\mathbf{x}) = \left( \int_0^1 t(F_2(t\mathbf{x})x_3 - F_3(t\mathbf{x})x_2) dt \right) dx_1 + \\ + \left( \int_0^1 t(F_3(t\mathbf{x})x_1 - F_1(t\mathbf{x})x_3) dt \right) dx_2 + \\ + \left( \int_0^1 t(F_1(t\mathbf{x})x_2 - F_2(t\mathbf{x})x_1) dt \right) dx_3.$$

Dobbiamo dimostrare che  $d\tilde{\omega} = \omega$ . Per la regola di Leibniz, tenuto conto del fatto che  $\omega$  è chiusa, troviamo:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^1 t(F_1(t\mathbf{x})x_2 - F_2(t\mathbf{x})x_1) dt - \\ - \frac{\partial}{\partial x_3} \int_0^1 t(F_3(t\mathbf{x})x_1 - F_1(t\mathbf{x})x_3) dt = \\ = \int_0^1 \left( t^2 \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(t\mathbf{x})x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(t\mathbf{x})x_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(t\mathbf{x})x_3 \right) + 2tF_1(t\mathbf{x}) \right) dt \\ = F_1(\mathbf{x})$$

(applicando il teorema fondamentale alla funzione  $\phi(t) = t^2 F_1(t\mathbf{x})$ ). Analogamente si dimostrano le rimanenti due uguaglianze, concludendo la dimostrazione della formula. La seconda parte del teorema segue dal fatto che, se  $\text{rot } V = \text{rot } \tilde{V}$ , allora, per il teorema precedente,  $V - \tilde{V}$  è un campo di vettori conservativo. ■

**Esempio.** Consideriamo il campo di vettori solenoidale  $F(x, y, z) = (y, z, x)$ . Si ha:

$$V(x, y, z) = \int_0^1 t(ty, tz, tx) \times (x, y, z) dt = \frac{1}{3}(z^2 - xy, x^2 - yz, y^2 - xz)$$

Il caso  $M = 3$ . Una funzione scalare  $f$ , di classe  $C^1$ , definita su un sottoinsieme aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^3$ , determina una 3-forma differenziale

$$\omega(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Essa è sempre chiusa, essendo  $d\omega$  una 4-forma differenziale definita su un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema.** Se  $U$  è stellato rispetto all'origine, la funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  è sempre della forma  $f = \operatorname{div} W$ , dove  $W : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  è il campo di vettori definito da

$$W(\mathbf{x}) = \left( \int_0^1 t^2 f(t\mathbf{x}) dt \right) \mathbf{x}.$$

Ogni altro campo di vettori  $\tilde{W} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $F = \operatorname{div} \tilde{W}$  si ottiene da  $W$  aggiungendo il rotore di un qualsiasi campo di vettori.

**Dimostrazione.** Usando la regola di Leibniz, si ha:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^1 t^2 f(t\mathbf{x}) x_1 dt + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^1 t^2 f(t\mathbf{x}) x_2 dt + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_0^1 t^2 f(t\mathbf{x}) x_3 dt \\ &= \int_0^1 \left( t^3 \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(t\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(t\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(t\mathbf{x}) \right) + 3t^2 f(t\mathbf{x}) \right) dt \\ &= f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

come si vede applicando il teorema fondamentale alla funzione  $\phi(t) = t^3 f(t\mathbf{x})$ . La seconda parte del teorema segue dal fatto che, se  $\operatorname{div} W = \operatorname{div} \tilde{W}$ , allora, per il teorema precedente,  $W - \tilde{W}$  ha un potenziale vettore. ■

**Esempio.** Consideriamo la funzione scalare  $f(x, y, z) = xyz$ . Si ha:

$$W(x, y, z) = \int_0^1 t^5 xyz dt(x, y, z) = \frac{1}{6}(x^2 yz, xy^2 z, xyz^2).$$