15 La dimostrazione del teorema di Stokes-Cartan

Siano U un aperto di $\mathbb{R}^N$, V un aperto [7] di $\mathbb{R}^P$ e $\phi : V \to U$ una funzione di classe C^1 :

$$\phi(\boldsymbol{y}) = (\phi_1(\boldsymbol{y}), ..., \phi_N(\boldsymbol{y}))\,,$$

con $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_P) \in V$. Data una $M-$forma differenziale $\omega : U \to \Omega_M(\mathbb{R}^N)$,

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N} f_{i_1,...,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M}\,,$$

resta definita una $M-$forma differenziale $T_\phi\omega : V \to \Omega_M(\mathbb{R}^P)$, che chiameremo trasformata attraverso ϕ di ω, nel seguente modo:

$$T_\phi\omega(\boldsymbol{y}) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N} f_{i_1,...,i_M}(\phi(\boldsymbol{y})) d\phi_{i_1}(\boldsymbol{y}) \wedge ... \wedge d\phi_{i_M}(\boldsymbol{y})\,.$$

Si noti che

$$\begin{aligned} d\phi_{i_1}(\boldsymbol{y}) \wedge ... \wedge\, d\phi_{i_M}(\boldsymbol{y}) &= \\ &= \left(\sum_{j=1}^{P} \frac{\partial \phi_{i_1}}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}) dy_j \right) \wedge ... \wedge \left(\sum_{j=1}^{P} \frac{\partial \phi_{i_M}}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}) dy_j \right) \\ &= \sum_{j_1,...,j_M=1}^{P} \frac{\partial \phi_{i_1}}{\partial y_{j_1}}(\boldsymbol{y}) \cdots \frac{\partial \phi_{i_M}}{\partial y_{j_M}}(\boldsymbol{y})\, dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_M} \end{aligned}$$

(attenzione, qui gli indici $j_1, ..., j_M$ non sono in ordine crescente). È immediato verificare che, preso $c \in \mathbb{R}$, si ha

$$T_\phi(c\omega) = c\, T_\phi\omega\,;$$

se $\tilde{\omega}$ è una $\tilde{M}-$forma differenziale definita su U,

$$T_\phi(\omega \wedge \tilde{\omega}) = T_\phi\omega \wedge T_\phi\tilde{\omega}\,,$$

e se $M = \tilde{M}$,

$$T_\phi(\omega + \tilde{\omega}) = T_\phi\omega + T_\phi\tilde{\omega}\,.$$

Dimostriamo ora le seguenti proprietà.

Proposizione 1. *Se $\psi : W \to V$ e $\phi : V \to U$, allora*

$$T_\psi(T_\phi\omega) = T_{\phi\circ\psi}\omega\,.$$

[7] Nel caso in cui gli insiemi U e V non fossero degli aperti, si veda la nota a pag. 135.

Dimostrazione. Per le proprietà di linearità viste sopra, sarà sufficiente considerare il caso di una forma differenziale del tipo

$$\omega(\boldsymbol{x}) = f_{i_1,\dots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M}\,.$$

Abbiamo:

$$T_\psi(T_\phi\omega) = \left[(f_{i_1,\dots,i_M} \circ \phi) \sum_{j_1,\dots,j_M=1}^{P} \frac{\partial \phi_{i_1}}{\partial y_{j_1}} \cdots \frac{\partial \phi_{i_M}}{\partial y_{j_M}} \right] \circ \psi \; d\psi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\psi_{j_M}\,.$$

D'altra parte,

$$T_{\phi\circ\psi}\omega = (f_{i_1,\dots,i_M} \circ \phi \circ \psi)\, d(\phi\circ\psi)_{i_1} \wedge \dots \wedge d(\phi\circ\psi)_{i_M}\,,$$

ed essendo

$$d(\phi\circ\psi)_{i_k} = d(\phi_{i_k}\circ\psi) = \sum_{j=1}^{P} \left(\frac{\partial \phi_{i_k}}{\partial y_j} \circ \psi \right) d\psi_j\,,$$

si ha l'uguaglianza. ∎

Proposizione 2. *Supponiamo che ϕ sia di classe C^2. Se ω è di classe C^1, anche $T_\phi\omega$ lo è, e si ha:*

$$d(T_\phi\omega) = T_\phi(d\omega)\,.$$

Dimostrazione. Anche qui basta considerare il caso $\omega = f_{i_1,\dots,i_M}\, dx_{i_1} \wedge\dots\wedge dx_{i_M}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
d(T_\phi\omega) &= d(f_{i_1,\dots,i_M}\circ\phi) \wedge d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_M} + \\
&\qquad + (f_{i_1,\dots,i_M}\circ\phi)\, d(d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_M}) \\
&= d(f_{i_1,\dots,i_M}\circ\phi) \wedge d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_M} \\
&= \left[\sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\partial f_{i_1,\dots,i_M}}{\partial x_m} \circ \phi \right) d\phi_m \right] \wedge d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_M}\,.
\end{aligned}$$

D'altra parte, si ha

$$d\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial f_{i_1,\dots,i_M}}{\partial x_m}(\boldsymbol{x})\, dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M}\,,$$

per cui

$$T_\phi(d\omega) = \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\partial f_{i_1,\dots,i_M}}{\partial x_m} \circ \phi \right) d\phi_m \wedge d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_M}\,,$$

e la formula è dimostrata. ∎

Proposizione 3. *Se $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ è una $M-$ superficie con supporto contenuto in U, allora*

$$\int_\sigma \omega = \int_I T_\sigma \omega \,.$$

Dimostrazione. Come sopra, basta considerare il caso $\omega = f_{i_1,...,i_M}\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_I T_\sigma \omega &= \int_I f_{i_1,...,i_M}(\sigma(\boldsymbol{u})) \sum_{j_1,...,j_M=1}^{M} \frac{\partial \sigma_{i_1}}{\partial u_{j_1}}(\boldsymbol{u}) ... \frac{\partial \sigma_{i_M}}{\partial u_{j_M}}(\boldsymbol{u})\, du_{j_1} \wedge ... \wedge du_{j_M} \\ &= \int_I f_{i_1,...,i_M}(\sigma(\boldsymbol{u})) \det \sigma'_{(i_1,...,i_M)}(\boldsymbol{u})\, du \\ &= \int_\sigma \omega \,.\end{aligned}$$

■

Passiamo ora alla dimostrazione del **teorema di Stokes - Cartan**, di cui riscriviamo l'enunciato.

Teorema. *Sia $0 \le M \le N-1$. Se $\omega : U \to \Omega_M(\mathbb{R}^N)$ è una $M-$forma differenziale di classe C^1 e $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ una $(M+1)-$superficie il cui supporto è contenuto in U, si ha:*

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega \,.$$

Dimostrazione. Il caso $M = 0$ segue dal teorema fondamentale applicato alla funzione $\omega \circ \sigma : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo ora $1 \le M \le N-1$. Essendo

$$\int_{\sigma\circ\alpha_k^+} \omega = \int_{I_k} T_{\sigma\circ\alpha_k^+} \omega = \int_{I_k} T_{\alpha_k^+}(T_\sigma \omega) = \int_{\alpha_k^+} T_\sigma \omega \,,$$

con le analoghe uguaglianze per β_k^+ si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\sigma} \omega &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k \int_{\sigma\circ\alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \int_{\sigma\circ\beta_k^+} \omega \\ &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k \int_{\alpha_k^+} T_\sigma \omega + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \int_{\beta_k^+} T_\sigma \omega \\ &= \int_{\partial I} T_\sigma \omega \,.\end{aligned}$$

Se σ è di classe C^2, si ha che $T_\sigma\omega$ è di classe C^1 e, applicando la formula di Gauss a $T_\sigma\omega$, si ha

$$\int_{\partial I} T_\sigma\omega = \int_I d(T_\sigma\omega)\,.$$

Ma

$$\int_I d(T_\sigma\omega) = \int_I T_\sigma(d\omega) = \int_\sigma d\omega\,.$$

In definitiva, abbiamo visto che

$$\int_\sigma d\omega = \int_I d(T_\sigma\omega) = \int_{\partial I} T_\sigma\omega = \int_{\partial\sigma} \omega\,,$$

e il teorema, in questo caso, è dimostrato.

L'ipotesi che $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ sia di classe C^2 può essere tolta con un procedimento di approssimazione: è possibile costruire una successione $(\sigma_n)_n$ di $M-$superfici di classe C^2 che convergono a σ assieme a tutte le derivate parziali. La formula di Stokes-Cartan vale quindi per tali superfici, ed è sufficiente passare al limite facendo uso del teorema della convergenza dominata per concludere. ■