17 La dimostrazione del teorema di Poincaré

Consideriamo l'insieme $[0,1]\times U$, e indichiamo i suoi elementi con

$$(t,\boldsymbol{x})=(t,x_1,...,x_N).$$

Definiamo l'operatore lineare K che trasforma una generica $M-$forma differenziale

$$\alpha:[0,1]\times U\to\Omega_M(\mathbb{R}^{N+1})$$

in una $(M-1)-$forma differenziale

$$K(\alpha):U\to\Omega_{M-1}(\mathbb{R}^N)$$

nel modo seguente:

a) se $\alpha(t,\boldsymbol{x})=f(t,\boldsymbol{x})\,dt\wedge dx_{i_1}\wedge...\wedge dx_{i_{M-1}}$ (si noti che qui appare il termine dt), allora

$$K(\alpha)(\boldsymbol{x})=\left(\int_0^1 f(t,\boldsymbol{x})\,dt\right)\,dx_{i_1}\wedge...\wedge dx_{i_{M-1}}\,;$$

b) se $\alpha(t,\boldsymbol{x})=f(t,\boldsymbol{x})\,dx_{i_1}\wedge...\wedge dx_{i_M}$ (qui non appare il termine dt), allora

$$K(\alpha)=0;$$

c) in tutti gli altri casi, K è definito per linearità (per gli addendi in una generica $M-$forma differenziale α, il termine dt appare o non appare, e si applicano le due definizioni precedenti).

Definiamo inoltre le funzioni $\psi,\xi:U\to[0,1]\times U$ nel modo seguente:

$$\psi(x_1,...,x_N)=(0,x_1,...,x_N)\,,\qquad \xi(x_1,...,x_N)=(1,x_1,...,x_N)\,.$$

Lemma. *Per una $M-$forma differenziale di classe C^1 $\alpha:[0,1]\times U\to\Omega_M(\mathbb{R}^{N+1})$ si ha:*

$$d(K(\alpha))+K(d\alpha)=T_\xi\alpha-T_\psi\alpha\,.$$

Dimostrazione. Per la linearità, basterà considerare i due casi in cui la forma differenziale α sia di uno dei due tipi considerati in a) e b).

a) Se $\alpha(t,\boldsymbol{x})=f(t,\boldsymbol{x})\,dt\wedge dx_{i_1}\wedge...\wedge dx_{i_{M-1}}$, per la regola di Leibniz si ha:

$$d(K(\alpha))(\boldsymbol{x})=\sum_{m=1}^N\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_m}(t,\boldsymbol{x})\,dt\right)\,dx_m\wedge dx_{i_1}\wedge...\wedge dx_{i_{M-1}}\,;$$

d'altra parte,

$$\begin{aligned} d\alpha(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,\boldsymbol{x})\,dt\wedge dt\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{M-1}} + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_m}(t,\boldsymbol{x})\,dx_m\wedge dt\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{M-1}} \\ &= -\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_m}(t,\boldsymbol{x})\,dt\wedge dx_m\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{M-1}}\,, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} K(d\alpha)(\boldsymbol{x}) &= -\sum_{m=1}^{N}\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_m}(t,\boldsymbol{x})\,dt\right)dx_m\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{M-1}} \\ &= -d(K(\alpha))(\boldsymbol{x})\,. \end{aligned}$$

Inoltre, si ha che $T_\psi\alpha = T_\xi\alpha = 0$, essendo la prima componente di ψ e di ξ costante; quindi, l'uguaglianza in questo caso è dimostrata.

b) Se $\alpha(t,\boldsymbol{x}) = f(t,\boldsymbol{x})\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_M}$, si ha $K(\alpha)=0$ e quindi $d(K(\alpha))=0$; d'altra parte,

$$\begin{aligned} d\alpha(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,\boldsymbol{x})\,dt\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_M} + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_m}(t,\boldsymbol{x})\,dx_m\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_M}\,, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} K(d\alpha)(\boldsymbol{x}) &= \left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial t}(t,\boldsymbol{x})\,dt\right)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_M} \\ &= (f(1,\boldsymbol{x}) - f(0,\boldsymbol{x}))\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_M}\,. \end{aligned}$$

Inoltre, si ha:

$$\begin{aligned} T_\xi\alpha(\boldsymbol{x}) &= f(1,\boldsymbol{x})\,d\xi_{i_1}(\boldsymbol{x})\wedge\ldots\wedge d\xi_{i_M}(\boldsymbol{x}) \\ &= f(1,\boldsymbol{x})\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_M}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_\psi\alpha(\boldsymbol{x}) &= f(0,\boldsymbol{x})\,d\psi_{i_1}(\boldsymbol{x})\wedge\ldots\wedge d\psi_{i_M}(\boldsymbol{x}) \\ &= f(0,\boldsymbol{x})\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_M}\,. \end{aligned}$$

La formula è quindi dimostrata anche in questo caso. ■

Possiamo ora intraprendere la dimostrazione del **teorema di Poincaré**, di cui riportiamo l'enunciato.

Teorema. *Sia U un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ stellato rispetto ad un punto $\bar{\boldsymbol{x}}$. Per $1 \leq M \leq N$, una $M-$forma differenziale $\omega : U \to \Omega_M(\mathbb{R}^N)$ di classe C^1 è esatta se e solo se essa è chiusa. In tal caso, se ω è del tipo*

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N} f_{i_1,...,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M} \,,$$

una $(M-1)-$forma differenziale $\tilde{\omega}$ tale che $d\tilde{\omega} = \omega$ è data da

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\boldsymbol{x}) = &\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N} \sum_{s=1}^{M} (-1)^{s+1}(x_{i_s} - \bar{x}_{i_s}) \cdot \\ &\cdot \left(\int_0^1 t^{M-1} f_{i_1,...,i_M}(\bar{\boldsymbol{x}} + t(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}))\, dt \right) dx_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge ... \wedge dx_{i_M} \,.\end{aligned}$$

Dimostrazione. Per semplificare la scrittura, possiamo supporre $\bar{\boldsymbol{x}} = (0, 0, ..., 0)$; sia $\phi : [0, 1] \times U \to U$ definita da

$$\phi(t, x_1, ..., x_N) = (tx_1, ..., tx_N) \,.$$

Consideriamo $T_\phi \omega$, la trasformata attraverso ϕ di ω. Essa è la forma differenziale di grado M definita su $[0, 1] \times U$ come segue:

$$\begin{aligned}&T_\phi \omega(t, \boldsymbol{x}) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N} f_{i_1,...,i_M}(t\boldsymbol{x})(x_{i_1} dt + t\, dx_{i_1}) \wedge ... \wedge (x_{i_M} dt + t\, dx_{i_M}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N} f_{i_1,...,i_M}(t\boldsymbol{x})[t^M dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M} + \\ &\qquad + t^{M-1} \sum_{s=1}^{M} (-1)^{s-1} x_{i_s} dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge ... \wedge dx_{i_M}] \,.\end{aligned}$$

Poniamo $\tilde{\omega} = K(T_\phi \omega)$. Resta da dimostrare che $d\tilde{\omega} = \omega$. Essendo ω chiusa, si ha:

$$K(d(T_\phi \omega)) = K(T_\phi(d\omega)) = K(T_\phi(0)) = K(0) = 0 \,.$$

Per il lemma precedente, abbiamo che

$$\begin{aligned}d\tilde{\omega} &= d(K(T_\phi \omega)) \\ &= T_\xi(T_\phi \omega) - T_\psi(T_\phi \omega) - K(d(T_\phi \omega)) \\ &= T_\xi(T_\phi \omega) - T_\psi(T_\phi \omega) \\ &= T_{\phi \circ \xi} \omega - T_{\phi \circ \psi} \omega \,.\end{aligned}$$

Essendo $\phi \circ \xi$ la funzione identità e $\phi \circ \psi$ la funzione nulla, si ha che $T_{\phi\circ\xi}\omega = \omega$ e $T_{\phi\circ\psi}\omega = 0$, il che completa la dimostrazione. $\blacksquare$