PROVA SCRITTA DI ANALISI 3
Anno accademico 2018/2019 – CdL MATEMATICA
APPELLO DEL 27.02.2019

1. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) + 9u(x) = x + 1, \\ \\ u(0) = 1\,, \quad u\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = 0\,. \end{cases}$$

2. Calcolare il volume del solido $E$ così definito:

$$E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| \le 1\,,\, 0 \le z \le x^2 + 1\Big\}\ .$$

3. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = |x + y| + 1 \le 2\,,\, |y| \le 1\Big\}\,,$$

dove $I$ è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area di tale superficie.

4. Sia $\omega : \mathbb{R}^3 \to \Omega_2(\mathbb{R}^3)$ la 2-forma differenziale definita da

$$\omega(x, y, z) = xy\; dy \wedge dz + xz\; dz \wedge dx - yz\; dx \wedge dy\,.$$

Dimostrare che è esatta, e trovare una 1-forma differenziale $\widetilde{\omega} : \mathbb{R}^3 \to \Omega_1(\mathbb{R}^3)$ tale che $d\widetilde{\omega} = \omega$. Calcolare quindi in due modi diversi $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ è la supreficie definita da

$$\sigma(u, v) = (u + v, u + v, u - v)\,.$$