PROVA SCRITTA DI ANALISI 3
Anno accademico 2018/2019 – CdL MATEMATICA
APPELLO DEL 14.06.2019

1. Risolvere, se possibile, il seguente problema:

$$\begin{cases} u''(x) + 4u(x) = 1 - 2\cos^2(x), \\ \\ u(0) = u(2\pi)\,, \quad u'(0) = u'(2\pi)\,. \end{cases}$$

2. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq -1\,,\ y \geq -1\,,\ x + y \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq 1 - y^2\right\}\ .$$

3. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\,,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\},$$

dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$. Calcolare quindi la lunghezza di tale curva.

4. Sia $\omega : \mathbb{R}^3 \to \Omega_2(\mathbb{R}^3)$ la 2-forma differenziale definita da

$$\omega(x, y, z) = x\, dy \wedge dz - 2y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy\,.$$

Dimostrare che è esatta, e trovare una 1-forma differenziale $\widetilde{\omega} : \mathbb{R}^3 \to \Omega_1(\mathbb{R}^3)$ tale che $d\widetilde{\omega} = \omega$. Calcolare quindi in due modi diversi $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ è la supreficie definita da

$$\sigma(u, v) = (u, u + v, v)\,.$$