PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 3
Anno accademico 2019/2020 – CdL MATEMATICA
Seconda simulazione – 10.01.2020

1. Trovare i punti di equilibrio dell'equazione differenziale

$$y''(x) + 4y(x) - [y(x)]^3 = 0\,,$$

e stabilire se sono stabili o no. Disegnare quindi l'andamento delle orbite nel piano delle fasi.

Svolgimento. Scriviamo il sistema equivalente

$$y_1' = y_2\,, \qquad y_2' = -4y_1 + y_1^3\,,$$

e vediamo che la funzione $f(y_1, y_2) = (y_2, -4y_1 + y_1^3)$ si annulla in tre punti:

$$(0,0)\,, \qquad (-2,0)\,, \qquad (2,0)\,.$$

Le matrici jacobiane $Jf(-2,0)$ e $Jf(2,0)$ hanno autovalori reali non nulli, di segno opposto. Pertanto i punti $(-2,0)$ e $(2,0)$ sono equilibri instabili. La matrice $Jf(0,0)$ ha invece come autovalori $\pm 2i$: un'informazione che non permette di decidere sulla stabilità o meno dell'equilibrio $(0,0)$.

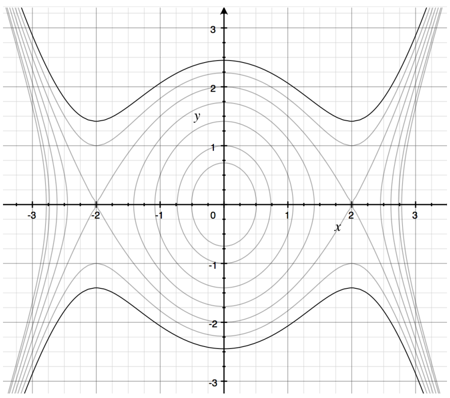
Introduciamo allora la funzione

$$H(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_1^2 - \frac{1}{4}y_1^4\,.$$

Vediamo che, se $(y_1(t), y_2(t))$ è una soluzione del nostro sistema, allora

$$\frac{d}{dt}H(y_1(t), y_2(t)) = y_2(t)y_2'(t) + (4y_1(t) - y_1(t)^3)y_1'(t) = 0\,,$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ciò implica che la funzione H rimane costante lungo le orbite delle soluzioni. In un piccolo intorno di $(0,0)$, si può vedere che le linee di livello di H sono curve chiuse, in quanto il termine $2y_1^2$ domina rispetto al termine $-\frac{1}{4}y_1^4$. Ne segue che $(0,0)$ è stabile (ma non asintoticamente stabile).



2. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4\,,\ |x-y| \leq 1\}\,.$$

Svolgimento. Operiamo una rotazione attorno all'asse z di angolo $\pi/4$ in modo da ottenere l'insieme

$$\widehat{E} = \left\{(u,v,z) \in \mathbb{R}^3 : u^2+v^2+z^2 \leq 4\,,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\,.$$

Passiamo a coordinate cilindriche ponendo $v = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$, e abbiamo

$$\begin{aligned}|E| = |\widehat{E}| &= \int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Big(\int_0^{\sqrt{4-u^2}}\rho\,d\rho\Big)du\Big)d\theta \\ &= 2\pi\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\tfrac{1}{2}(4-u^2)\,du = \pi\left[4u-\frac{u^3}{3}\right]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{23}{6}\pi\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

3. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1\,,\ -2+x \leq z \leq 2+x\big\}\,,$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area di tale superficie.

Svolgimento. Poniamo $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $t = z-x$ e abbiamo la parametrizzazione

$$\sigma : [0,2\pi]\times[-2,2] \to \mathbb{R}^3 \qquad \sigma(\theta,t) = (\cos\theta, \sin\theta, t+\cos\theta)\,.$$

Calcoliamo

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta,t) = (\sin\theta, \cos\theta, -\sin\theta)\,, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t}(\theta,t) = (0,0,1)\,,$$

per cui

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta,t) \times \frac{\partial\sigma}{\partial t}(\theta,t) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\,.$$

Ne segue che l'area di $\mathcal{M}$ vale

$$\int_{[0,2\pi]\times[-2,2]}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta,t)\times\frac{\partial\sigma}{\partial t}(\theta,t)\right\|d\theta\,dt = \int_{[0,2\pi]\times[-2,2]} 1\,d\theta\,dt = 8\pi\,.$$

4. Sia $\omega : \mathbb{R}^3 \to \Omega_1(\mathbb{R}^3)$ la 2-forma differenziale definita da

$$\omega(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_3\,dx_2\wedge dx_3 - x_1x_3^2\,dx_1\wedge dx_2\,.$$

Trovare una 1-forma differenziale $\tilde{\omega}$ tale che $d\tilde{\omega} = \omega$. Calcolare quindi $\int_\sigma \omega$ in due modi diversi, dove $\sigma : [0,1]\times[2,3] \to \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u,v) = (u^2, u+v, v^2)\,.$$

Svolgimento. Il campo di vettori associato a ω è

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 x_3, 0, -x_1 x_3^2)\,.$$

Si verifica che $d\omega = 0$, ossia che $\mathrm{div}F = 0$. Per il Teorema di Poincaré, esiste un campo di vettori V tale che $\mathrm{rot}V = F$. Precisamente,

$$V(x_1, x_2, x_3) = \int_0^1 tF(tx_1, tx_2, tx_3)\times(x_1, x_2, x_3)\,dt = \frac{1}{5}(x_1x_2x_3^2, -2x_1^2x_3^2, x_1^2x_2x_3).$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned}\int_\sigma F\cdot dS &= \int_{[0,1]\times[2,3]} (u^4v^2, 0, -u^2v^4)\cdot(2v, -4uv, 2u)\,du\,dv \\ &= \int_0^1 \left(\int_2^3 (2u^4v^3 - 2u^3v^4)\,dv\right) du \\ &= \int_0^1 \left(\frac{65}{2}\,u^4 - \frac{422}{5}\,u^3\right) du = -\frac{73}{5}\,.\end{aligned}$$

D'altra parte, usando la formula di Stokes-Ampère, abbiamo che

$$\int_\sigma F\cdot dS = \int_\sigma \mathrm{rot}V\cdot dS = \int_{\partial\sigma} V\,d\ell\,.$$

Scriviamo

$$\begin{array}{ll} \alpha_1^- : [2,3]\to\mathbb{R}^2 & \alpha_1^-(v) = (0, 5-v) \\ \beta_1^+ : [2,3]\to\mathbb{R}^2 & \beta_1^-(v) = (1, v) \\ \alpha_2^+ : [0,1]\to\mathbb{R}^2 & \alpha_2^+(u) = (u, 2) \\ \beta_2^- : [0,1]\to\mathbb{R}^2 & \beta_2^-(u) = (1-u, 3) \end{array}$$

e ricordiamo che $\partial\sigma$ è incollamento di

$$\begin{array}{ll} \sigma\circ\alpha_1^- : [2,3]\to\mathbb{R}^3 & \sigma\circ\alpha_1^-(v) = (0, 5-v, (5-v)^2) \\ \sigma\circ\beta_1^+ : [2,3]\to\mathbb{R}^3 & \sigma\circ\beta_1^-(v) = (1, 1+v, v^2) \\ \sigma\circ\alpha_2^+ : [0,1]\to\mathbb{R}^3 & \sigma\circ\alpha_2^+(u) = (u^2, u+2, 4) \\ \sigma\circ\beta_2^- : [0,1]\to\mathbb{R}^3 & \sigma\circ\beta_2^-(u) = ((1-u)^2, 4-u, 9) \end{array}$$

Calcoliamo i quattro integrali corrisponenti:

$$\begin{aligned}\int_{\sigma\circ\alpha_1^-} V\,d\ell &= \int_2^3 V((\sigma\circ\alpha_1^-)(v))\cdot(\sigma\circ\alpha_1^-)'(v)\,dv \\ &= \int_2^3 (0,0,0)\cdot(0,-1,\,2v-10)\,dv = 0\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\sigma\circ\beta_1^+} V\,d\ell &= \int_2^3 V((\sigma\circ\beta_1^+)(v))\cdot(\sigma\circ\beta_1^+)'(v)\,dv\\ &= \frac{1}{5}\int_2^3 ((1+v)v^4, -2v^4, (1+v)v^2)\cdot(0,1,2v)\,dv\\ &= \frac{1}{5}\int_2^3 2v^3\,dv = \frac{13}{2}\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\sigma\circ\alpha_2^+} V\,d\ell &= \int_0^1 V((\sigma\circ\alpha_2^+)(u))\cdot(\sigma\circ\alpha_2^+)'(u)\,du\\ &= \frac{1}{5}\int_0^1 (16u^2(u+2), -32u^4, 4u^4(u+2))\cdot(2u,1,0)\,du\\ &= \frac{1}{5}\int_0^1 64u^3\,du = \frac{16}{5}\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\sigma\circ\beta_2^-} V\,d\ell &= \int_0^1 V((\sigma\circ\beta_2^-)(u))\cdot(\sigma\circ\beta_2^-)'(u)\,du\\ &= \frac{1}{5}\int_0^1 (81(1-u)^2(4-u), -162(1-u)^4, 9(1-u)^4(4-u))\cdot(2u-2,-1,0)\,du\\ &= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{243}{2}(1-u)^3\,du = -\frac{243}{10}\,.\end{aligned}$$

Sommando, otteniamo

$$\int_{\partial\sigma} V\,d\ell = 0 + \frac{13}{2} + \frac{16}{5} - \frac{243}{10} = -\frac{73}{5}\,.$$