PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 3
Anno accademico 2019/2020 – CdL MATEMATICA
Terza simulazione – 18.01.2020

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = xe^x \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Svolgimento. Cerco dapprima le soluzioni dell'equazione omogenea $y'' - 2y' + y = 0$. Il polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ ha solo la radice $\lambda = 1$, con molteplicità 2, per cui le soluzioni sono del tipo

$$y(x) = ae^x + bxe^x.$$

Ora cerco una soluzione particolare dell'equazione $y'' - 2y' + y = xe^x$.
Primo modo - per simiglianza. Essendo il termine forzante del tipo $xe^{\gamma x}$ con $\gamma = 1$ uguale alla radice $\lambda = 1$ del polinomio caratteristico, cerco la soluzione del tipo

$$y(x) = x^2 e^x(\alpha x + \beta)\,.$$

Facendo i calcoli,

$$y'(x) = e^x(\alpha x^3 + (3\alpha + \beta)x^2 + 2\beta x)\,,$$

$$y''(x) = e^x(\alpha x^3 + (6\alpha + \beta)x^2 + (6\alpha + 4\beta)x + 2\beta)\,,$$

e sostituendo trovo che deve essere $\alpha = \frac{1}{6}$ e $\beta = 0$. Una soluzione particolare è quindi

$$y(x) = \tfrac{1}{6}x^3 e^x.$$

Secondo modo - variazione delle costanti. Cerco una soluzione della forma

$$y(x) = a(x)e^x + b(x)xe^x.$$

Vedo che

$$y'(x) = [a'(x) + a(x) + b'(x)x + b(x)(1 + x)]e^x,$$

e impongo che sia

$$a'(x) + b'(x)x = 0\,.$$

Quindi,

$$y''(x) = [a'(x) + a(x) + b'(x)(1 + x) + b(x)(2 + x)]e^x,$$

per cui, dopo le opportune semplificazioni,

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = [a'(x) + b'(x)(1 + x)]e^x\,.$$

Pertanto, $y(x)$ sarà soluzione di $y'' - 2y' + y = xe^x$ se

$$\begin{cases} a'(x) + b'(x)x = 0\,, \\ a'(x) + b'(x)(1+x) = x\,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, trovo $a'(x) = -\frac{1}{3}x^3$, $b'(x) = x$, da cui

$$a(x) = -\tfrac{1}{3}x^3, \qquad b(x) = \tfrac{1}{2}x^2.$$

Una soluzione particolare è quindi

$$y(x) = -\tfrac{1}{3}x^3e^x + \tfrac{1}{2}x^2xe^x = \tfrac{1}{6}x^3e^x.$$

Ecco quindi che tutte le soluzioni di $y'' - 2y' + y = xe^x$ sono del tipo

$$y(x) = ae^x + bxe^x + \tfrac{1}{6}x^3e^x.$$

Ora imponiamo le condizioni iniziali e troviamo $a = 1$ e $b = -1$. La soluzione del problema di Cauchy è pertanto

$$y(x) = e^x - xe^x + \tfrac{1}{6}x^3e^x.$$

2. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |y| \le 9 - x^2 - z^2\}\,.$$

Svolgimento. Passo a coordinate cilindriche nelle (x,z), ottenendo

$$\begin{aligned} |E| &= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^3 \Big(\int_{-(9-\rho^2)}^{9-\rho^2} \rho\, dy \Big)\, d\rho \Big) d\theta \\ &= 2\pi \int_0^3 2\rho(9-\rho^2)\, d\rho \\ &= 2\pi \Big[9\,\rho^2 - \frac{1}{2}\,\rho^4 \Big]_0^3 = 81\,\pi\,. \end{aligned}$$

3. Trovare una 1-parametrizzazione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 = (z+1)^2 \le 4\big\}\,,$$

Calcolare quindi la lunghezza di tale curva.

Svolgimento. Impongo $y = t$, per cui $x = t^2$ e $z + 1 = \pm t$. Ottengo cos due curve $\gamma_\pm : [0,2] \to \mathbb{R}^3$, definite da

$$\gamma_\pm(t) = (t^2, t, -1 \pm t)\,.$$

Per ottenere un'unica parametrizzazione possiamo definire $\gamma : [-2,2] \to \mathbb{R}^3$ così:

$$\gamma(t) = (t^2, |t|, -1 + t)\,.$$

Si noti che in realtà questa curva non è derivabile in $t = 0$. Possiamo comunque calcolarne la lunghezza con la formula

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} \|\gamma'(t)\|\,dt &= 2\int_{0}^{2} \|\gamma_+'(t)\|\,dt \\ &= 2\int_{0}^{2} \sqrt{4t^2+2}\,dt \\ &= \Big[\tfrac{1}{2}t\,\sqrt{4t^2+2} + \sinh^{-1}(\sqrt{2}t)\Big]_0^2 \\ &= 6\sqrt{2} + \sinh^{-1}(2\sqrt{2})\,.\end{aligned}$$

4. Sia $\omega : \mathbb{R}^3 \to \Omega_2(\mathbb{R}^3)$ la 2-forma differenziale definita da

$$\omega(x_1,x_2,x_3) = x_2x_3\,dx_2\wedge dx_3 + 2\,dx_3\wedge dx_1 + x_1x_2\,dx_1\wedge dx_2\,.$$

Trovare una 1-forma differenziale $\tilde{\omega}$ tale che $d\tilde{\omega} = \omega$. Calcolare quindi in due modi diversi $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [0,1]\times[-1,0] \to \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u,v) = (u,v,uv)\,.$$

Svolgimento. La forma differenziale determinail campo di vettori $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_2x_3, 2, x_1x_2)\,.$$

Esso è solenoidale: si verifica infatti che $\mathrm{div}F = 0$. Per il teorema di Poincaré, esiste un potenziale vettore $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, per cui $\mathrm{rot}V = F$, definito da

$$\begin{aligned}V(x_1,x_2,x_3) &= \int_0^1 tF(tx_1,tx_2,tx_3)\times(x_1,x_2,x_3)\,dt \\ &= (x_3 - \tfrac{1}{4}x_1x_2^2\,,\, \tfrac{1}{4}x_1^2x_2 - \tfrac{1}{4}x_2x_3^2\,,\, \tfrac{1}{4}x_2^2x_3 - x_1)\,.\end{aligned}$$

Questo campo di vettori V determina la 1-forma differenziale

$$\tilde{\omega}(x_1,x_2,x_3) = (x_3 - \tfrac{1}{4}x_1x_2^2)\,dx_1 + (\tfrac{1}{4}x_1^2x_2 - \tfrac{1}{4}x_2x_3^2)\,dx_2 + (\tfrac{1}{4}x_2^2x_3 - x_1)\,dx_3\,,$$

tale che $d\tilde{\omega} = \omega$.

Calcoliamo ora direttamente

$$\begin{aligned}\int_\sigma F\cdot dS &= \int_{[0,1]\times[-1,0]} (uv^2, 2, uv)\cdot(-v,-u-1)\,du\,dv \\ &= \int_0^1 \Big(\int_{-1}^{0} (-uv^3 - 2u + uv)\,dv\Big)du \\ &= \int_0^1 \Big[-\tfrac{1}{4}uv^4 - 2uv + \tfrac{1}{2}uv^2\Big]_{v=-1}^{v=0} du \\ &= \int_0^1 (-\tfrac{9}{4}u)\,du = -\frac{9}{8}\,.\end{aligned}$$

Usando la formula di Stokes-Ampère,

$$\int_\sigma F \cdot dS = \int_\sigma \mathrm{rot} V \cdot dS = \int_{\partial\sigma} V \cdot d\ell \,.$$

Calcoliamo quest'ultimo, ricordando che $\partial\sigma$ è incollamento di $\sigma \circ \alpha_1^-$, $\sigma \circ \beta_1^+$, $\sigma \circ \alpha_2^+$ e $\sigma \circ \beta_2^-$, con

$$\begin{aligned}
\alpha_1^- &: [-1,0] \to \mathbb{R}^2 \,, & \alpha_1^-(v) &= (0, 1-v) \,, \\
\beta_1^+ &: [-1,0] \to \mathbb{R}^2 \,, & \beta_1^+(v) &= (1, v) \,, \\
\alpha_2^+ &: [0,1] \to \mathbb{R}^2 \,, & \alpha_2^+(v) &= (u, -1) \,, \\
\beta_2^- &: [0,1] \to \mathbb{R}^2 \,, & \beta_2^-(v) &= (1-u, 0) \,,
\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
\sigma \circ \alpha_1^- &: [-1,0] \to \mathbb{R}^3 \,, & (\sigma \circ \alpha_1^-)(v) &= (0, 1-v) \,, \\
\sigma \circ \beta_1^+ &: [-1,0] \to \mathbb{R}^3 \,, & (\sigma \circ \beta_1^+)(v) &= (1, v) \,, \\
\sigma \circ \alpha_2^+ &: [0,1] \to \mathbb{R}^3 \,, & (\sigma \circ \alpha_2^+)(v) &= (u, -1) \,, \\
\sigma \circ \beta_2^- &: [0,1] \to \mathbb{R}^3 \,, & (\sigma \circ \beta_2^-)(v) &= (1-u, 0) \,.
\end{aligned}$$

Calcolo

$$\int_{\sigma \circ \alpha_1^-} V \, d\ell = \int_{-1}^0 (0,0,0) \cdot (0,-1,0) \, dv = 0 \,,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma \circ \beta_1^+} V \, d\ell &= \int_{-1}^0 (v - \tfrac{1}{4}v^2, \tfrac{1}{4}v - \tfrac{1}{4}v^3, \tfrac{1}{4}v^3 - 1) \cdot (0,1,1) \, dv \\
&= \int_{-1}^0 (\tfrac{1}{4}v - 1) \, dv = \Big[\tfrac{1}{8}v^2 - v\Big]_{-1}^0 = -\frac{9}{8} \,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma \circ \alpha_2^+} V \, d\ell &= \int_0^1 (-\tfrac{5}{4}u, 0, -\tfrac{5}{4}u) \cdot (1,0,-1) \, du \\
&= \int_0^1 0 \, du = 0 \,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma \circ \beta_2^-} V \, d\ell &= \int_0^1 (0,0,u-1) \cdot (-1,0,0) \, du \\
&= \int_0^1 0 \, du = 0 \,.
\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\sigma} V \cdot d\ell &= \int_{\sigma \circ \alpha_1^-} V \, d\ell + \int_{\sigma \circ \beta_1^+} V \, d\ell + \int_{\sigma \circ \alpha_2^+} V \, d\ell + \int_{\sigma \circ \beta_2^-} V \, d\ell \\
&= 0 - \frac{9}{8} + 0 + 0 = -\frac{9}{8} \,.
\end{aligned}$$