AM110 - A.A. 2013/14

ALFONSO SORRENTINO

Esercizi sui limiti di successioni

Esercizio svolto 1. Usando la definizione di limite, dimostare che:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(e^{\pi\cos n}\right)}{n^2} = 0.$$

Soluzione.
Cominciamo da (a). Vogliamo dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall\, n \geq N_\varepsilon \quad \text{si ha} \quad \left|\frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Osserviamo che:

$$\left|\frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| \quad = \quad \left|\frac{2n-2n-3}{2(2n+3)}\right| = \frac{3}{4n+6}.$$

Quindi:

$$\left|\frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{4n+6} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}.$$

Basta scegliere un intero positivo $N_\varepsilon > \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}$.

Dimostriamo ora (b). Vogliamo dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall\, n \geq N_\varepsilon \quad \text{si ha} \quad \left|\frac{\sin\left(e^{\pi\cos n}\right)}{n^2}\right| < \varepsilon.$$

Osserviamo che:

$$\left|\frac{\sin\left(e^{\pi\cos n}\right)}{n^2}\right| \quad = \quad \frac{\left|\sin\left(e^{\pi\cos n}\right)\right|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Quindi:

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{\sin\left(e^{\pi\cos n}\right)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Basta scegliere un intero positivo $N_\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Esercizio svolto 2. Verificare i seguenti limiti usando la definizione:

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$;

b) $\lim_{n\to+\infty} \left(n - \sqrt{n^2-1}\right) = 0$;

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - n\sin n}{3n^2+\cos n} = \frac{1}{3}$;

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2 - n\sin n\right) = +\infty$.

Soluzione.

a) Vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$:
$$\left|\frac{n^2+4}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$
Infatti
$$\left|\frac{n^2+4}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{4n^2+6},$$
quindi basterà scegliere $N_0 > \max\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{\varepsilon} - 6},\, 0\right\}$.

b) Vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$:
$$\left|n - \sqrt{n^2-1}\right| < \varepsilon.$$
Osserviamo che
$$\left|n - \sqrt{n^2-1}\right| = n - \sqrt{n^2-1} = \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} < \frac{1}{n},$$
quindi sarà sufficiente scegliere $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

c) Vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$:
$$\left|\frac{n^2 - n\sin n}{3n^2+\cos n} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$
Osserviamo che:
$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2 - n\sin n}{3n^2+\cos n} - \frac{1}{3}\right| &= \frac{|3n\sin n + \cos n|}{|9n^2 + 3\cos n|} \leq \\
&\leq \frac{3n|\sin n| + |\cos n|}{9n^2+3\cos n} \leq \\
&\leq \frac{3n+1}{9n^2-3} \leq \\
&\leq \frac{3n+\sqrt{3}}{9n^2-3} = \\
&= \frac{1}{3n-\sqrt{3}},
\end{aligned}$$
quindi basta scegliere $N_0 > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{3}\right)$.

d) Vogliamo dimostrare che per ogni $M > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$:
$$n^2 - n\sin n > M.$$
Osserviamo che
$$n^2 - n\sin n > n^2 - n = n(n-1) > (n-1)^2,$$
quindi basterà scegliere $N_0 > 1 + \sqrt{M}$.

Esercizio svolto 3. Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che: