5 ottobre

· Principio di Induzione

L'insieme dei numeri Naturali è

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Evidenziamo la seguente proprietà

Assioma (Principio di Induzione)

Supponiamo che S sia un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, $S \subseteq \mathbb{N}$ che soddisfa:

1) $1 \in S$

2) $n \in S \Longrightarrow n+1 \in S$.

Allora $S = \mathbb{N}$

Teorema (Dimostrazioni per induzione)

Supponiamo che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ sia associata una proposizione $P(n)$

Supponiamo che

1') $P(1)$ è vera

2') $(P(n) \text{ è vera}) \Longrightarrow (P(n+1) \text{ è vera})$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Dim Definiamo

$$S = \{ n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è vera} \}$$

$S \subseteq \mathbb{N}$

1') $\Longrightarrow 1 \in S \Longrightarrow$ 1) del principio di induzione

$$2') \Longrightarrow \begin{array}{ccc} (P(n) \text{ è vera}) & \Longrightarrow & (P(n+1) \text{ è vera}) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ n \in S & \Longrightarrow & n+1 \in S \end{array}$$

2') $\Longrightarrow$ S soddisfa la 2) del principio di induzione

$S \subseteq \mathbb{N}$ soddisfa 1) e 2) del principio di induzione. Allora $S = \mathbb{N}$

$\Updownarrow$

$P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Teor (Bernoulli) $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall a \geq -1$

Si ha

$$(1+a)^n \geq 1+na \qquad P_n$$

<u>Dim</u>

a) Dimostriamo che P_1 è vera ✓

$$(1+a)^n\big|_{n=1} = (1+a)^1 = 1+a$$

$$(1+na)\big|_{n=1} = 1+a$$ sono uguali

b) Dobbiamo dimostrare

$$P_n \text{ vera} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vera}$$

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a) \geq (1+na)(1+a)$$

$$= 1 + na + a + \cancel{na^2} \geq 1 + (n+1)a$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a \qquad a \geq -1 \iff 1+a \geq 0$$

$$\boxed{(1+a)^n \geq 1 + na \quad \cdot (1+a)}$$

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$