

5 ottobre

r Principio di Induzione

L'insieme dei numeri Naturali è

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Evidenziamo la seguente
proprietà

Axioma (Principio di Induzione)

Supponiamo che S sia un
sottoinsieme di \mathbb{N} , $S \subseteq \mathbb{N}$
che soddisfa:

1) $1 \in S$

2) $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$.

Allora $S = \mathbb{N}$

Teorema (Dimostrazioni per induzione)

Supponiamo che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ sia associata una proposizione $P(n)$

Supponiamo che

1') $P(1)$ è vera

2') $(P(n) \text{ è vera}) \Rightarrow (P(n+1) \text{ è vera})$

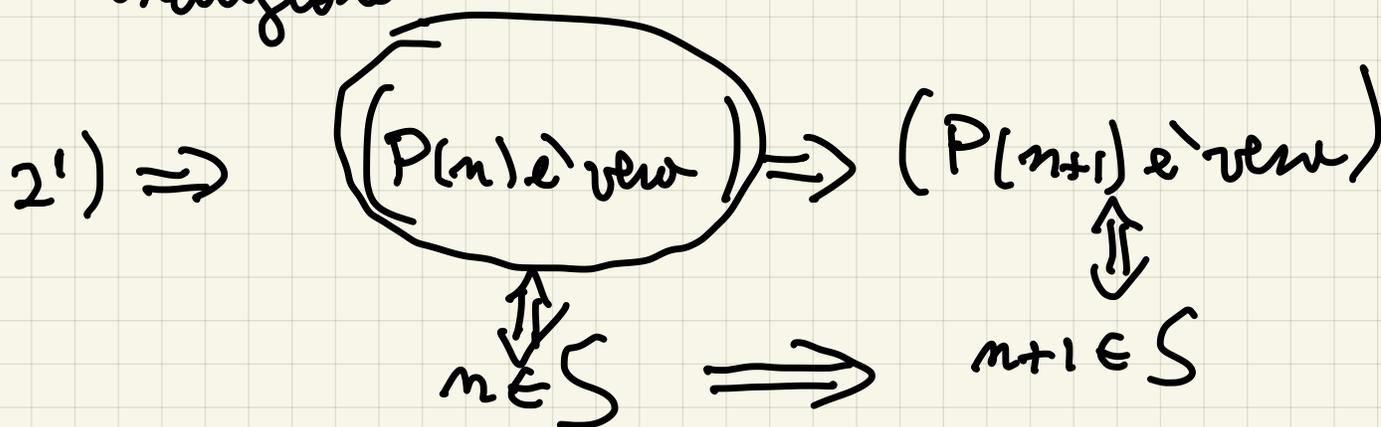
Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Dim Definiamo

$$S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è vera}\}$$

$$S \subseteq \mathbb{N}$$

1') $\Rightarrow 1 \in S \Rightarrow$ (1) del principio di induzione



2') \Rightarrow S soddisfa la 2) del principio di induzione

$S \subseteq \mathbb{N}$ soddisfa 1) e 2) del principio di induzione. Allora $S = \mathbb{N}$



$P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Teor (Bernoulli) $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall a \geq -1$

Si ha

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad P_n$$

Dim

a) Dimostriamo che P_1 è vera \checkmark

$$\begin{aligned} (1+a)^n \Big|_{n=1} &= (1+a)^1 = 1+a \\ (1+na) \Big|_{n=1} &= 1+a \quad \text{sono uguali} \end{aligned}$$

b) Dobbiamo dimostrare

$$P_n \text{ vera} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vera}$$

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n (1+a) \geq (1+na)(1+a) \\ &= 1+na+a+\cancel{na^2} \geq 1+(n+1)a \end{aligned}$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$$

$$a \geq -1$$



$$(1+a)^n \geq 1+na, \quad (1+a)$$

$$1+a \geq 0$$

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$