PROVA SCRITTA DI ANALISI 3
Anno accademico 2019/2020 – CdL Matematica
Appello del 18.02.2020

1. Risolvere il seguente problema dei due punti:

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = \sin x + \sin(3x) \\ y'\Big(-\dfrac{\pi}{2}\Big) = 0\,, \quad y'\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = 0\,. \end{cases}$$

2. Calcolare il volume del solido E così definito:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + 4y^2 \leq 1 - z \leq 1\}\,.$$

3. Trovare una 2-parametrizzazione $\sigma : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = y^2 - 1\,,\ |x - z| \leq 1\,,\ |x + z| \leq 2\Big\}\,.$$

Calcolare quindi l'area di tale superficie.

4. Sia $\omega : \mathbb{R}^3 \to \Omega_2(\mathbb{R}^3)$ la 2-forma differenziale definita da

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3\, dx_2 \wedge dx_3 + x_3x_1\, dx_3 \wedge dx_1 + x_1x_2\, dx_1 \wedge dx_2\,.$$

Calcolare $\int_\sigma \omega$, dove $\sigma : [-2, 2] \times [1, 3] \to \mathbb{R}^3$ è la superficie definita da

$$\sigma(u, v) = (u^2, u + v, v^2)\,.$$

Trovare una 1-forma differenziale $\tilde{\omega}$ tale che $d\tilde{\omega} = \omega$. Esplicitare $\partial\sigma$ e verificare che $\int_{\partial\sigma} \tilde{\omega} = \int_\sigma \omega$.