METODI AVANZATI DI TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI

cioè

TEORIA DEI CAMPI III

GRUPPI e ALGEBRE di LIE

GRUPPO : insieme con un'operazione $\cdot : G \times G \to G$ t.c.

1) Identità : $\exists\, \mathbb{1} \in G$ t.c. $\mathbb{1} \cdot g = g \cdot \mathbb{1} = g \quad \forall g \in G$
2) Inverso : $\forall g \in G \quad \exists\, g^{-1} \in G$ t.c. $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = \mathbb{1}$
3) Associatività : $\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$

Siamo interessati a GRUPPI CONTINUI, cioè gruppi che contengono elementi arbitrariam. vicini a $\mathbb{1}$

↳ detti GRUPPI DI LIE e hanno una struttura di VARIETÀ DIFFERENZIALE

ES. $G = SO(n) = \{\text{matrici ortogonali } n \times n\}$
$= \{ O \in M_{n\times n} \mid O^T O = \mathbb{1} = O O^T \}$

- è un gruppo col prodotto di matrici :
$O_1 \cdot O_2 \in SO(n) \qquad (O_1 O_2)^T O_1 O_2 = O_2^T \underbrace{O_1^T O_1}_{\mathbb{1}} O_2 = \mathbb{1}$

- è una varietà. Restringiamoci a $n=2$ $SO(2)$
Parametrizziamo gli elem. di $SO(2)$ scegliendo una "coordinata" :
$$O = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \varphi \in [0, 2\pi[$$

⇝ $SO(2)$ è diffeomorfo al CERCHIO S^1

$\mathbb{1} \leftrightarrow \varphi = 0 \;\Big|\; \varphi = \epsilon \ll 1$
$$O = \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} \epsilon^2/2 & \\ & \epsilon^2/2 \end{pmatrix} + \dots$$

Consideriamo lo spazio tangente a $\mathbb{1}$ $\quad T_{\mathbb{1}}G$.

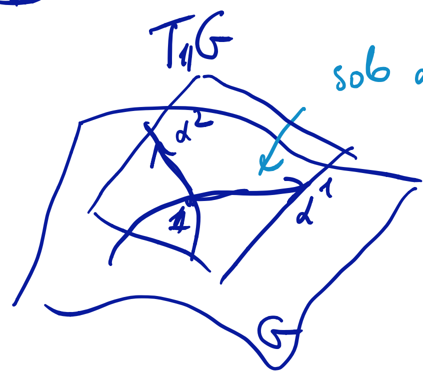
Esso è chiamato l' ALGEBRA DI LIE associata a G

ALGEBRA DI LIE $\mathcal{G}$: è uno SPAZIO VETTORIALE con un prodotto BILINEARE ANTISIMM. $[\,,\,] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ che soddisfa l'id. di Jacobi

$[\,,\,]$ su $\mathcal{G} = T_{\mathbb{1}}G$ è dato da $[\,,\,]$ sui campi vett. di G

(X, Y campi vett., deriv. di Lie $\mathcal{L}_X Y = \sum_i (X^i \partial_i Y - Y^i \partial_i X) = -\mathcal{L}_Y X = [X, Y]$)

Essendo G una varietà diff., possiamo scegliere un set di coordinate α^a $\quad a = 1, \dots, \dim G$ tali che $\alpha^a = 0 \leftrightarrow \mathbb{1}$

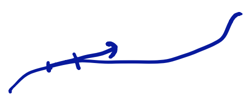


solo α^1 cambia $\quad \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \alpha^2_0 \\ \vdots \\ \alpha^d_0 \end{pmatrix}$

Prendiamo le linee coordinate
i vett. tg a tali linee
fanno una base per $T_{\mathbb{1}}G$

Prendiamo linea coord. α^1

Se $\alpha^1 \ll 1$ allora l'elemento



$$g(\alpha) = \mathbb{1} + i\alpha^1 \underbrace{T^1}_{\text{vett. tg alla linea coord. } \alpha^1}$$

Elem. infinitesimo (spostam. infinitesimo lungo vett. $\vec{\alpha} = \alpha^a \vec{T}^a$)

(*) $\quad g(\alpha) = \mathbb{1} + i\alpha^a T^a \quad$ (somma su a implicito)

T^a sono detti: GENERATORI del gruppo di Lie G e formano una base per $\mathcal{G} = T_{\mathbb{1}}G$.

$$[V, W] = [\alpha^a T^a, \beta^b T^b] = \alpha^a \beta^b [T^a, T^b]$$

$$[T^a, T^b] \in \mathcal{G} \Rightarrow [T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

COSTANTI DI STRUTTURA

Integrando $(\star)$, otteniamo

$$g(\alpha) = e^{i\alpha^a T^a} \qquad \text{(MAPPA ESPONENZIALE)}$$

- Ci restringeremo a Gruppi di Lie COMPATTI e di DIMENSIONE FINITA

- Se un generatore T "commuta" con tutti gli altri, allora T genera un SOTTOGRUPPO ABELIANO $U(1)$

$$e^{iT\alpha + iT^2\alpha^2 + \dots + iT^d\alpha^d} = e^{i\alpha T} e^{i\sum_{i=2}^{d} \alpha^i T^i}$$

- Quando G non contiene sottogruppi abeliani, il gruppo è detto SEMI-SEMPLICE

Se i generatori non possono essere divisi in due sottoinsiemi che commutano fra loro, allora è detto SEMPLICE.

- In generale l'Alg di Lie sarà della forma

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{i=1}^{\# ab} \langle T^i \rangle \bigoplus_{\alpha = \text{algebre semplici}} \mathcal{G}^\alpha$$

[Killing - Cartan]

È possibile CLASSIFICARE tutte le alg. di Lie semplici (compatte)

$\boxed{A_n \rightsquigarrow G = SO(n+1)}$

$B_n \rightsquigarrow G = SO(2n+1)$

$C_n \rightsquigarrow G = Sp(n)$

$D_n \rightsquigarrow G = SO(2n)$ Lorentz

Classiche

E_6 F_4

E_7 G_2

E_8

Eccezionali

$$SU(N) = \left\{ U \in M_{N\times N}(\mathbb{C}) \,\middle|\, U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1} \;\&\; \det U = 1 \right\}$$

$\downarrow$

$\mathcal{G}$? $\quad U = e^{iT} \quad T = \alpha^a T^a \in \mathcal{G}_{SU(N)}$

Che proprietà ha T affinché $U \in SU(N)$?

$$U^\dagger = e^{-iT^\dagger} \qquad U^\dagger U = \mathbb{1} \Rightarrow e^{-iT^\dagger} \cdot e^{iT} = \mathbb{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-iT^\dagger} = e^{-iT} \Longrightarrow T^\dagger = T$$

mappa esp è isomorf.

T è hermitiana

$1 = \det U \Rightarrow \quad 1 = \det e^{iT} = e^{i\, trT} \Rightarrow trT = 0$

T è traceless

$$\mathfrak{g}_{SU(N)} = \{ T \in M_{N\times N}(\mathbb{C}) \mid T^\dagger = T \;\&\; tr\,T = 0 \}$$

Es. $SU(2)$ è generato da matrici 2×2 hermitiane e traceless

$\rightarrow$ base è data da matrici di Pauli σ^i

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i \underbrace{\epsilon^{ijk}}_{f^{ijk}} \frac{\sigma^k}{2}$$

Verifichiamo che $U = e^{i\alpha^i\sigma^i}$ è unitaria

$$U = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^m (\alpha^i\sigma^i)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m}}{(2m+1)!} i (\alpha^i\sigma^i)^{2m} \alpha^i\sigma^i$$

$n = 2m+1$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!} (\alpha^i\sigma^i)^{2k}$$

$(\alpha^i\sigma^i)^2 =$
$= \|\alpha\|^2 \cdot \mathbb{1}$

$$= \mathbb{1} \cos\|\alpha\| + i \frac{\alpha^i\sigma^i}{\|\alpha\|} \operatorname{sen}\|\alpha\|$$

$$U^\dagger = \mathbb{1} \cos\|\alpha\| - i \frac{\alpha^i\sigma^i}{\|\alpha\|} \operatorname{sen}\|\alpha\| \qquad U^\dagger U = \mathbb{1}$$

RAPPRESENTAZIONI

"I campi trasformano sotto il gruppo G"

$\rightarrow$ significa che il campo vive in una RAPPRESENTAZ. del gruppo di Lie G.

Una RAPP. dell'alg. di Lie $\mathcal{G}$ è un insieme di MATRICI $d_R \times d_R$ $\quad t_R^a \quad a = 1, \dots, d = \dim \mathcal{G}$ che soddisfano le stesse regole di commutazione dei generatori T^a di $\mathcal{G}$, cioè

$$[t_R^a, t_R^b] = i f^{abc} t_R^c$$

commutatore $t_R^a t_R^b - t_R^b t_R^a$

Le matrici t_R^a agiscono su uno SPAZIO VETT. V_R d_R-dimensionale. d_R è detto la DIMENSIONE della RAPP. R.

Una RAPP arbitraria può essere messa nella forma diagonale a blocchi (con una scelta opportuna della base in V_R)

tutti i generatori sono simultaneam. block-diagonal

$$T^1 = \left(\begin{array}{c|c} \ast & 0 \\ \hline 0 & \ast \end{array}\right)\begin{array}{l} \}\, d_R - m \\ \}\, m \end{array}, \quad T^2 = \left(\begin{array}{c|c} \ast & 0 \\ \hline 0 & \ast \end{array}\right)\begin{array}{l} \}\, d_R - m \\ \}\, m \end{array} \dots$$

- Una rapp. di gr.po Lie è detta RIDUCIBILE.
  I blocchi corrisp. a RAPP. IRRIDUCIBILI.

- Se G è SEMISEMPLICE, allora $\forall R$ t^a_R sono traceless

- Fissiamo la normalizzazione di t^a_R.
  - $\mathrm{tr}\, t^a_R$? ma $\mathrm{tr}\, t^a_R = 0$
  - $\mathrm{tr}\, t^a_R t^b_R = D^{ab}$ per un'algebra semplice D^{ab} è diagonalizz. e def. positiva $\Rightarrow$

    $\Rightarrow$ D^{ab} può essere portata nella forma

$$\mathrm{tr}\left(t^a_R t^b_R\right) = C(R)\,\delta^{ab} \qquad (*)$$

Fissato $C(R)$ per una particolare rapp. R, $C(R)$ è dato in tutte le altre rapp.

Per $SU(N)$ c'è una rapp. molto particolare, detta RAPP. FONDAMENTALE $\dim = N$

$$R = N$$

Normalizzazione tipicam. scelta è $C(N) = 1/2$

Osservazione: si può usare $(*)$ per scrivere

$$f^{abc} = -\frac{i}{C(R)}\,\mathrm{tr}\left(\left[t^a_R, t^b_R\right] t^c_R\right)$$