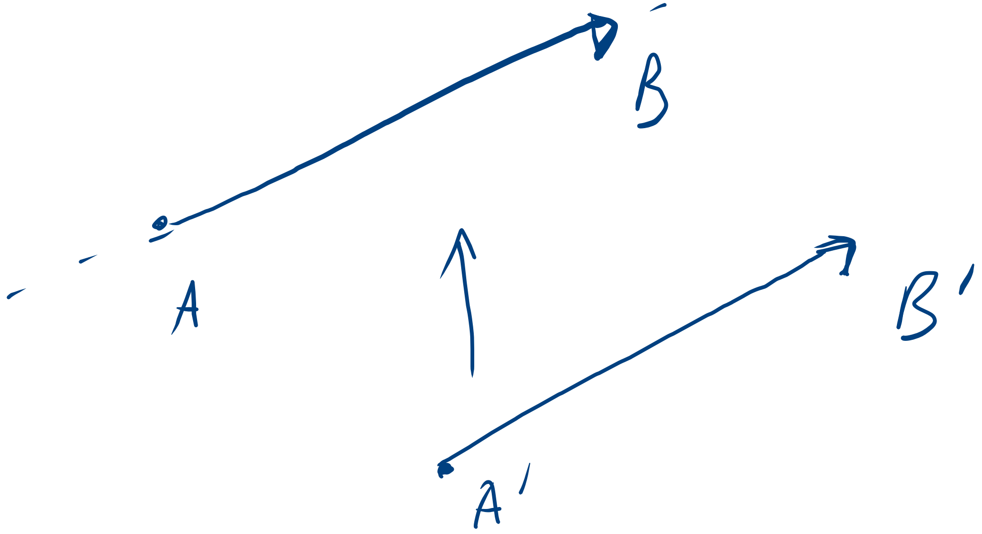
Vettore applicato = segmento orientato



$\vec{AB} \sim \vec{A'B'}$

tilde

$\vec{AB}$ equipollente ad $\vec{A'B'}$ se hanno

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} \text{1) stessa lunghezza} \\ \text{2) sono paralleli} \\ \text{3) lo stesso verso} \end{array}}\right\} \iff \exists \text{ traslazione del piano che manda } \vec{AB} \text{ in } \vec{A'B'}$$

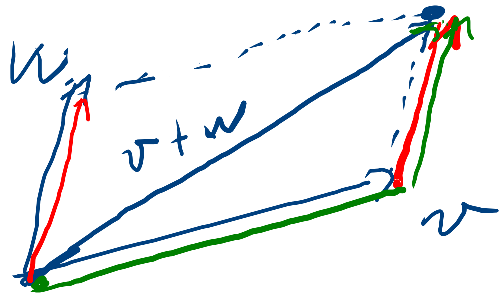
Un vettore geometrico è una classe di equipollenza di vettori applicati $\rightsquigarrow$ $\underline{V}$ = { vettori geometrici del piano }

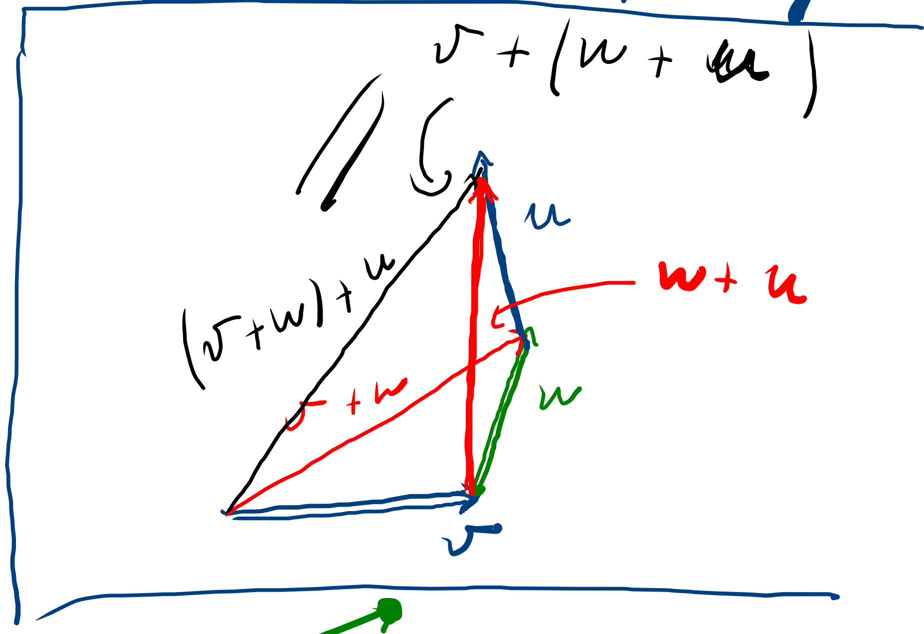
$A = B$

$0 = [\vec{AA}]$ vettore nullo

$\vec{BB}$

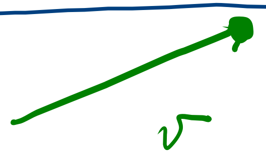
$v = [\vec{AB}]$





$v, w \in V \rightsquigarrow \underline{v + w = w + v}$

Commutativa



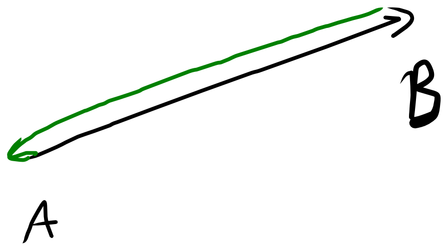
$\underline{v + 0 = v}$

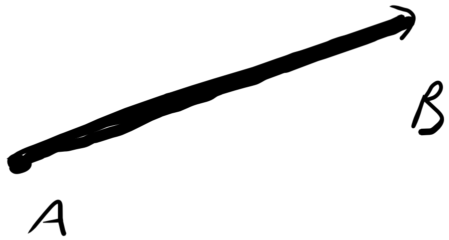
$(v + w) + u$

$v + (w + u)$

$$v = [\overrightarrow{AB}] \rightsquigarrow -v \overset{\text{def}}{=} [\overrightarrow{BA}]$$

$$\boxed{v + (-v) = 0}$$





Moltiplicazione scalare

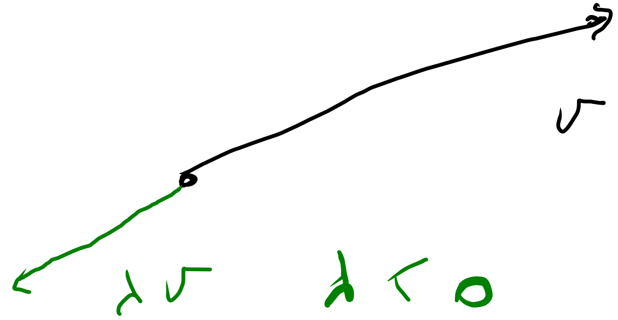
$\|v\| \overset{def}{=}$ lunghezza di v $\overset{def}{=}$ lunghezza di AB

$\lambda \in \mathbb{R}$, $v = [\overrightarrow{AB}]$

$\lambda \cdot v$ = vettore $\parallel v$ di lunghezza $|\lambda| \cdot \|v\|$ col verso di v se $\lambda > 0$ e il verso opposto se $\lambda < 0$

$|\lambda| \, \|v\|$

Se $\lambda = 0$ $\quad 0 \cdot v = 0$

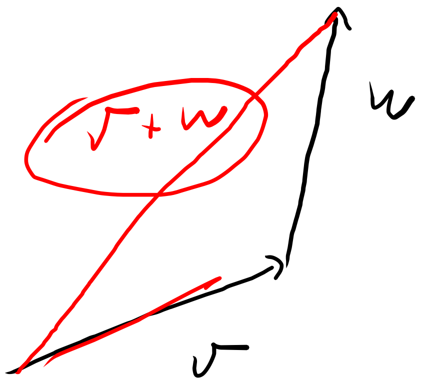


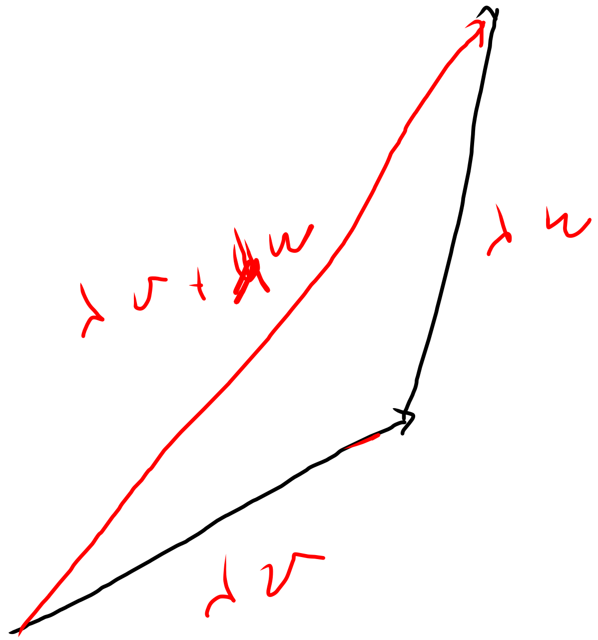
Se $\lambda = 1$ $\quad 1 \cdot v = v$

$$\lambda \cdot (v+w) \stackrel{?}{=} \lambda v + \lambda w \quad \checkmark$$

$\lambda = 0$ ✓

$\lambda > 0$





$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v \quad \circledast$$

$$(\lambda \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \quad \circledast$$

L'insieme dei vettori geometrici del piano Euclideo
è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q} = \{$ numeri razionali $\}$

$-3, 0, 100, \frac{3}{7}, \frac{19}{5}, \frac{-173}{4}$

Spazi vettoriali razionali (o su $\mathbb{Q}$)

Es. $\mathbb{Q}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}\}$

addizione $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) \stackrel{def}{=} (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$

Molt. Scal. $\lambda \cdot (a_1, \dots, a_n) \stackrel{def}{=} (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$

$\lambda \in \mathbb{Q}$, $a_i \in \mathbb{Q}$

Proprietà degli spazi vettoriali

$\mathbb{K}$ = campo $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \ldots)$ $\qquad$ V $\mathbb{K}$-spazio vett.

Spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ $\qquad$ $\mathbb{K}$-spazi vettoriali

0) Proprietà associativa di $+_V$

$v_1, \ldots, v_n \in V$ $\qquad$ $((v_1 + v_2) + \ldots) + v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

$$(v+u)+w = v+(u+w) = v+u+w$$

Prop. commutativa $\qquad v_2 + v_n + v_1 + \ldots$

1) $0 \cdot v = 0_V$

Dim

$$v + 0 \cdot v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = (1+0) \cdot v = 1 \cdot v = v$$

$$v + 0 \cdot v = v \implies$$

$$v + 0 \cdot v - v = v - v$$

$$0_V + 0 \cdot v = 0_V$$

$$0 \cdot v = 0_V$$

2) $\underline{(-1)\cdot v = -v}$

<u>Dim</u>

$$0_V \overset{(1)}{=} \underline{0\cdot v = (1-1)}\cdot v \overset{\text{assume}}{=} 1\cdot v + (-1)\cdot v =$$

$$\overset{\text{assiome 8}}{=} v + (-1)\cdot v$$

$$0_V = v + (-1)\cdot v$$

$$\Rightarrow \quad 0_V - v = \cancel{v} + (-1)\cdot v - \cancel{v}$$

$$-v = (-1)\cdot v$$

3) $\underline{0_V}$ è l'unico vettore di V che è elemento neutro di $+_V$

<u>Dim</u> Sia $0'$ un elemento neutro di $+_V$

$$\underline{0' + v = v} \qquad \forall v \in V$$

$$0' + \underbrace{v - v}_{0_V} = \underbrace{v - v}_{0_V}$$

$$0' + 0_V = 0_V$$

$$0' = 0_V$$

4) Per ogni $v \in V$, $-v$ è l'unico opposto di v

$$\boxed{-0_V = 0_V}$$

<u>Dim</u> Sia v_1 un opposto di v

$$v + v_1 = 0_V$$

$$v + v_1 - v = 0_V - v$$

$$\underbrace{0_V + v_1} = -v$$

$$\boxed{v_1 = -v}$$

5) Dati v e $w \in V$, l'equazione

$$\underline{x + v = w}$$

ammette sempre una sola soluzione in V

<u>Dim</u> <u>unicità</u>

Se x esiste $\quad x + v = w$

$$\Rightarrow x + v - v = w - v$$

$$x + 0_V = w - v$$

$$x = \underline{w - v}$$

<u>Esistenza</u> Poniamo $x = w - v$: $\quad \underline{(w - v) + v} = w - v + v$

$$= w + 0_V = \underline{w}$$

Esercizio. Verificare le proprietà seguenti:

6) $\lambda v = 0_V \iff \lambda = 0$ oppure $v = 0_V$

7) $\forall\, v, w \in V$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, esiste un'unica soluzione dell'equazione

$$\lambda x + v = w$$

con $x \in V$.