Programmazione Informatica
1. Introduzione e codifica dei numeri

Riccardo Zamolo
rzamolo@units.it

Università degli Studi Trieste
Ingegneria Civile e Ambientale

A.A. 2020-21

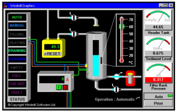
- *Informatica* (o *Scienza dell'informazione*): insieme delle discipline riguardanti la rappresentazione e l'elaborazione **automatica** delle **informazioni**:
  - *informazione*: qualsiasi forma espressiva che possa essere compresa ed elaborata dall'uomo;
  - *automatico*: le informazioni a disposizione vengono elaborate senza l'intervento diretto dell'uomo, al fine di ottenere un certo risultato (rappresentato a sua volta da informazioni).

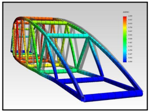
- Elaborazione automatica delle informazioni tramite calcolatori automatici elettronici digitali o *computer* (in inglese l'informatica è *Computer Science*):
  - *digitale*: opera su quantità discrete, ossia cifre e simboli di un alfabeto;
  - il computer deve essere istruito dall'uomo su come eseguire l'elaborazione automatica mediante l'assegnazione di *istruzioni*;
  - l'assegnazione di una ben determinata sequenza di istruzioni all'elaboratore avviene attraverso la scrittura di un *programma* in un determinato *linguaggio di programmazione*.

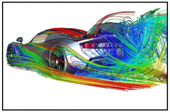
- Cosa c'entra la programmazione informatica con l'Ingegneria Civile e Ambientale?

$\overset{?}{\Longleftrightarrow}$

- Nella quasi totalità degli ambiti dell'ingegneria ci si avvale dell'uso del calcolatore elettronico a qualsiasi livello: studio, progettazione, realizzazione, controllo, misurazione, ecc. Si va dal semplice foglio di calcolo Excel, ai software per la gestione di processo, ai software di simulazione di fenomeni di problemi complessi:



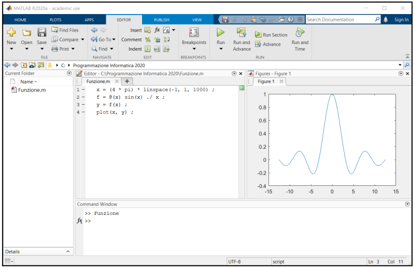




- Sebbene la programmazione dei problemi più complessi avviene ad opera di specialisti, è invece sempre richiesta la capacità di scrivere semplici programmi per effettuare calcoli di massima, su modelli semplificati, o per la gestione dei dati, a monte o a valle dei software specialistici, ecc.
- Non per ultima, la capacità di programmazione risulta utilissima agli studenti durante il corso di Laurea come strumento di supporto allo studio di tutti gli altri insegnamenti (analisi, geometria, fisica, ecc.).

- In questo corso l'attenzione sarà rivolta principalmente alla programmazione in ambiente MATLAB.
- MATLAB è l'abbreviazione di MATrix LABoratory: un ambiente per il calcolo numerico molto usato in ambito ingegneristico. Con MATLAB si intende anche il linguaggio di programmazione utilizzato in questo ambiente:

MATLAB logo



- A cosa serve? Serve a risolvere in maniera rapida ed efficace una vastissima gamma di problemi di generico carattere matematico, dai più semplici a quelli più complessi. In MATLAB si possono integrare agevolmente tutte le operazioni necessarie: input dati (da file, da tastiera, ecc.), elaborazione, output risultati (scrittura file, visualizzazione e/o salvataggio grafici e plot, ecc).

- Perchè MATLAB? Perchè permette di scrivere velocemente un codice molto compatto sfruttando le potenzialità e le peculiarità dell'ambiente:

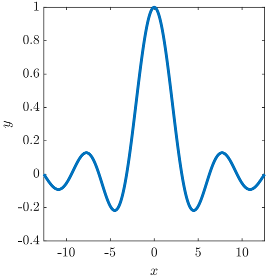
Studio di funzione:

```
% Ascissa x = [-4pi, 4pi]
x = (4*pi) * linspace(-1, 1, 500) ;

% f(x) = sin(x)/x
f = @(x) sin( x ) ./ x ;

% Calcolo y = f(x)
y = f(x) ;

% Plot con spessore doppio
plot(x, y, 'LineWidth', 2) ;
```



Algebra lineare:

```
% Matrice di rotazione
R = [ 0 1 ;
     -1 0 ] ;

% Vettore direzione
v = [ 1 ; .5 ] ;

% Rotazione vettore
w = R * v ;

% Diagonalizzazione R
[M, l] = eig( R ) ;
```

```
>> w
w =
 0.5000
-1.0000

>> M
M =
0.7071+0.0000i   0.7071+0.0000i
0.0000+0.7071i   0.0000-0.7071i
```

- Sistemi operativi supportati da MATLAB: Windows, Linux e macOS.
- MATLAB non è gratuito.
- L'Università degli Studi di Trieste ha una licenza Campus che consente agli studenti l'accesso a MATLAB da casa e in aula, nei laboratori e dai luoghi di ricerca, anche senza connessione alla rete.
- È sufficiente digitare **`"licenza campus matlab units"`** su un motore di ricerca e scegliere la prima pagina suggerita con dominio `mathworks.com` (link diretto qua). Cliccare quindi su "Accedi per iniziare" ed inserire le proprie credenziali di Ateneo per creare un account MathWorks seguendo il processo guidato (istruzioni qua).
- Una volta attivato l'account MathWorks, è possibile l'uso di MATLAB sia attraverso l'installazione sul proprio PC (consigliata) che attraverso l'uso di MATLAB online, attraverso browser, senza necessità di installazione. Ovviamente nell'ultimo caso è sempre necessaria una connessione internet.
- Si consiglia di installare MATLAB il prima possibile sul proprio PC. Al momento dell'installazione si consiglia di includere i seguenti *toolbox* che saranno utili soprattutto per l'ausilio allo studio di altri corsi:
  - *Symbolic Math Toolbox*: per la manipolazione simbolica di equazioni;
  - *Image Processing Toolbox*: per l'elaborazione delle immagini;
  - *Partial Differential Equation Toolbox*: per la risoluzione numerica di PDE con il *metodo degli elementi finiti*;

Elementi di informatica:

- Codifica delle informazioni
- Codifica dei numeri: rappresentazione posizionale e in virgola mobile
- Codifica del testo, dei segnali analogici e delle immagini
- Algebra Booleana
- Architettura del calcolatore
- Reti
- Algoritmi e strutture dati

Programmazione:

- Linguaggi di programmazione
- Basi di C
- MATLAB:
  - array e indicizzazione
  - funzioni
  - funzioni elementari (trigonometriche, esponenziali, ecc.)
  - algebra lineare: funzioni ed operazioni
  - analisi: funzioni ed operazioni
  - stringhe: funzioni ed operazioni
  - grafici/plot
  - I/O: funzioni
  - Esempi pratici d'applicazione

Modalità d'esame

Esame scritto. L'esame si compone di esercizi (scrittura di pseudocodice e/o codice MATLAB) e di domande di teoria. Le modalità d'esame potranno variare a seconda dell'evoluzione dell'attuale situazione sanitaria (covid-19).

Testi di riferimento

Stormy Attaway, "MATLAB: a practical introduction to programming and problem solving", Butterworth-Heinemann, 2017.
oppure qualsiasi testo introduttivo a MATLAB disponibile in biblioteca.

- *Alfabeto*: insieme finito di simboli, detti *caratteri*, distinti.
  - alfabeto latino: $\mathscr{L} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}\}$
  - alfabeto binario: $\mathscr{B} = \{0, 1\}$
  - alfabeto decimale: $\mathscr{D} = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$

- *Parola*: successione finita di caratteri di un alfabeto:
  - BGDAZWKHJ, UNITS, PN sono parole dell'alfabeto latino $\mathscr{L}$;
  - 010, 101010, 1 sono parole dell'alfabeto binario $\mathscr{B}$;
  - 34, 641, 13793 sono parole dell'alfabeto decimale $\mathscr{D}$.

- *Codifica*: procedimento che permette di stabilire una *corrispondenza biunivoca* tra gli elementi di un insieme I e gli elementi di un sottoinsieme $\mathscr{Q}$ delle parole di un alfabeto:

Insieme I di 4 livelli di grigio $\longrightarrow$ 

$\updownarrow$ Codifica $\updownarrow$

Sottoinsieme $\mathscr{Q}$ dell'alfabeto $\mathscr{B}$: parole di 2 caratteri (2 bit) $\longrightarrow$ | 00 | 01 | 10 | 11 |

- Alfabeto di $b > 1$ caratteri corrispondenti agli interi tra 0 e $b - 1$:

$$\mathscr{A} = \{0, 1, \ldots, b - 1\}$$

- Sistemi di numerazione più frequenti:
  - binario (base 2): $\mathscr{B} = \{0, 1\}$
  - ottale (base 8): $\mathscr{O} = \{0, 1, 2, \ldots, 6, 7\}$
  - decimale (base 10): $\mathscr{D} = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$
  - esadecimale (base 16): $\mathscr{H} = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}\}$
- Rappresentazione *posizionale* di un numero $n \in \mathbb{N}$ in base b:

$$n = (a_k \ a_{k-1} \ldots \ a_1 \ a_0)_b$$

  dove i simboli $a_i \in \mathscr{A}$ sono chiamati *cifre*.
- Una cifra a_M è “più significativa" di un’altra cifra a_m se $M > m$.
- La forma posizionale è quindi equivalente ad una parola di $k+1$ caratteri dell’alfabeto $\mathscr{A}$.
- La precedente forma posizionale si può esprimere algebricamente:

$$n = a_k \cdot b^k + a_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$$

- Fissata la base b, ogni numero naturale n ha un’unica rappresentazione posizionale (a meno dell’aggiunta di zeri a sinistra).

- Base 2, $\mathscr{B} = \{0, 1\}$:

$$(31)_{10} = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11111)_2$$

- Base 8, $\mathscr{O} = \{0, 1, 2, \ldots, 6, 7\}$:

$$(31)_{10} = 3 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = (37)_8$$

- Base 10, $\mathscr{D} = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$:

$$(31)_{10} = 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = (31)_{10}$$

- Base 16, $\mathscr{H} = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}\}$:

$$(31)_{10} = 1 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = (1\mathrm{F})_{16}$$

$$\downarrow \qquad \nearrow$$

carattere dell'alfabeto $\mathscr{H}$ di valore $(15)_{10} \Rightarrow \mathrm{F}$

  - l'uso della base 16 è spesso indicato dal pedice H o dal prefisso `0x`.

- $\mathcal{NB}$: espressioni numeriche con operazioni "$\cdot$" e "$+$" sono da intendersi in base 10 senza l'uso esplicito del pedice$_{10}$, come per il pedice stesso.

- Espressione della forma posizionale del naturale n in base b:

$$\begin{aligned} n &= (a_k\ a_{k-1} \dots\ a_1\ a_0)_b \\ &= a_k \cdot b^k + a_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 \\ &= \underbrace{(a_k \cdot b^{k-1} + a_{k-1} \cdot b^{k-2} + \cdots + a_1 \cdot b^0)}_{q=(a_k\ a_{k-1} \dots\ a_1)_b} \cdot b + \underbrace{a0}_{r} \end{aligned}$$

  - q: quoziente della divisione intera di n per b;
  - la rappresentazione posizionale di q coincide con quella di n eliminando a_0 (cifra meno significativa), entrambe in base b;
  - r: resto della divisione intera di n per b ($0 \leq r < b$); $r = a_0$ è quindi la cifra meno significativa di n in base b.

- Schema *iterativo* per determinare le cifre di $n \in \mathbb{N}$ in base b:
  - divisione intera di n per b ($n = q \cdot b + r$): una delle cifre cercate è data dal resto r;
  - si ritorna al punto precedente, ma utilizzando ora il quoziente q, appena calcolato, al posto di n;
  - si ripete finchè $q = 0$;
  - l'ordine delle cifre ottenute va dalla meno alla più significativa.

- L'uomo è per natura abituato ad eseguire operazioni algebriche (somma, prodotto, divisione intera, ecc.) in base 10.

- Conversione da base $b \neq 10$ a base 10: conviene utilizzare la forma posizionale esplicita eseguendo tutte le operazioni in base 10:

$$(a_k \dots a_0)_b = (a_k)_{10} \cdot (b)_{10}^k + \dots + (a_0)_{10} \cdot (b)_{10}^0$$

  - da base 2 a base 10:

$$(1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = (13)_{10}$$

  - da base 8 a base 10:

$$(127)_8 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 64 + 16 + 7 = (87)_{10}$$

  - da base 16 a base 10:

$$(A2F)_{16} = \underset{A}{10} \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + \underset{F}{15} \cdot 16^0 = 2560 + 32 + 15 = (2607)_{10}$$

- Conversione da base 10 a base $b \neq 10$: conviene utilizzare lo schema iterativo dei resti delle divisioni intere per b, eseguendole in base 10:

$$(d_k \dots\ d_0)_{10} = \boxed{q_{10}} \cdot b_{10} + \underline{r_{10}}$$

  - da base 10 a base 2:

$$\begin{aligned}
(13)_{10} &= \boxed{6} \cdot 2 + \underline{1} && \Rightarrow && a_0 = 1 \\
(6)_{10} &= \boxed{3} \cdot 2 + \underline{0} && \Rightarrow && a_1 = 0 \\
(3)_{10} &= \boxed{1} \cdot 2 + \underline{1} && \Rightarrow && a_2 = 1 \\
(1)_{10} &= \boxed{0} \cdot 2 + \underline{1} && \Rightarrow && a_3 = 1
\end{aligned}$$

$$(13)_{10} = (\underbrace{a_3\ a_2\ a_1\ a_0}_{})_2 = (1101)_2$$

cifre a_i dalla più significativa (a_3) alla meno significativa (a_0)

- Conversione da base 10 a base $b \neq 10$:
  - da base 10 a base 8:

$$(87)_{10} = \boxed{10} \cdot 8 + \underline{7} \quad \Rightarrow \quad a_0 = 7$$
$$(10)_{10} = \boxed{1} \cdot 8 + \underline{2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2$$
$$(1)_{10} = \boxed{0} \cdot 8 + \underline{1} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1$$

$$(87)_{10} = (a_2\ a_1\ a_0)_8 = (127)_8$$

  - da base 10 a base 16:

$$(2607)_{10} = \boxed{162} \cdot 16 + \underline{15} \quad \Rightarrow \quad a_0 = (15)_{10} = \mathrm{F}_{16}$$
$$(162)_{10} = \boxed{10} \cdot 16 + \underline{2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2$$
$$(10)_{10} = \boxed{0} \cdot 16 + \underline{10} \quad \Rightarrow \quad a_0 = (10)_{10} = \mathrm{A}_{16}$$

$$(2607)_{10} = (a_2\ a_1\ a_0)_{16} = (\mathrm{A2F})_{16}$$

- Conversione da base $b \neq 10$ a base $c \neq 10$: conviene effettuare due conversioni di base $b \to d \to c$ usando $d = 10$ come base intermedia.
- Caso particolare: $c = b^m$ con $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

$$
\begin{aligned}
n &= (a_k\ a_{k-1} \ldots\ a_1\ a_0)_b \\
&= a_0 \cdot b^0 + a_1 \cdot b^1 + \cdots + a_{k-1} \cdot b^{k-1} + a_k \cdot b^k \quad \text{(ordine inverso)} \\
&= \underbrace{(a_0 \cdot b^0 + \cdots + a_{m-1} \cdot b^{m-1})}_{e_0\ (m \text{ termini})} \cdot b^0 \ + \\
&+ \underbrace{(a_m \cdot b^0 + \cdots + a_{2m-1} \cdot b^{m-1})}_{e_1\ (m \text{ termini})} \cdot b^m + \cdots = \\
&= e_0 \cdot c^0 + e_1 \cdot c^1 + \cdots = (e_h\ e_{h-1} \ldots\ e_1\ e_0)_c
\end{aligned}
$$

  - le cifre e_i di n in base c si ottengono direttamente dalla rappresentazione in base b raggruppando le cifre a_i in gruppi di m ed interpretando ciascun gruppo di cifre come un numero in base b:

$$
n = (\ldots \underbrace{a_{2m-1} \ldots a_m}_{e_1} \underbrace{a_{m-1} \ldots a_0}_{e_0})_b
$$

- Caso $c = b^m$ con $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$:
  - Da base $b = 2$ a base $c = 8$ $(m = 3)$:

$$(10111)_2 = (\underbrace{010}_{e_1}\underbrace{111}_{e_0})_2 = (27)_8$$

$$e_1 = (010)_2 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2 = (2)_8$$
$$e_0 = (111)_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 7 = (7)_8$$

  - Da base $b = 2$ a base $c = 16$ $(m = 4)$:

$$(101101)_2 = (\underbrace{0010}_{e_1}\underbrace{1101}_{e_0})_2 = (2D)_8$$

$$e_1 = (0010)_2 = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2 = (2)_{16}$$
$$e_0 = (1101)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13 = (D)_{16}$$

- Nel caso opposto (conversione di un numero $(e_h \dots e_0)_c$ da base $c = b^m$ a base b) ognuna delle cifre e_i origina un gruppo di m cifre; ciascun gruppo è la rappresentazione in base b delle corrispondente cifra e_i in base c.

- Rappresentazione posizionale di un numero non intero $q \geq 0$ in base b:

$$q = (a_k \; a_{k-1} \ldots \; a_0 \; . \; a_{-1} \ldots \; a_{-h})_b$$

- Punto "." tra a_0 e a_{-1}: *punto radice*. In base 10 è il solito punto decimale.
- Espressione algebrica:

$$q = \underbrace{a_k \cdot b^k + \cdots + a_0 \cdot b^0}_{\text{parte intera}} + \underbrace{a_{-1} \cdot b^{-1} + \cdots + a_{-h} \cdot b^{-h}}_{f(q),\ \text{parte non intera}}$$

- Fissata la base b, la parte non intera di ogni numero $q \geq 0$ ha un'unica rappresentazione posizionale (a meno dell'aggiunta di zeri a destra).

- Moltiplicando la parte non intera $f(q)$ di q per la base b si ha:

$$\begin{aligned} f(q) &= (0\,.\,a_{-1}\,a_{-2}\ldots\,a_{-h})_b \\ &= a_{-1}\cdot b^{-1} + a_{-2}\cdot b^{-2} + \cdots + a_{-h}\cdot b^{-h} \\ f(q)\cdot b &= \underbrace{a_{-1}\cdot b^{0}}_{\text{parte intera}} + \underbrace{a_{-2}\cdot b^{-1} + \cdots + a_{-h}\cdot b^{-h+1}}_{\text{parte non intera}} =: s(q) \end{aligned}$$

  cioè la parte intera di $f(q)\cdot b$ è la cifra più significativa a_{-1} della parte non intera $f(q)$ di q in base b.

- Schema *iterativo* per determinare le cifre della parte non intera di $q \geq 0$ in base b:
  - si prende la parte non intera $f(q)$ di q e si calcola $s(q) = b \cdot f(q)$;
  - una delle cifre cercate è data dalla parte intera di $s(q)$;
  - si ritorna al primo punto, ma utilizzando ora il valore $s(q)$, appena calcolato, al posto di q;
  - si ripete finchè $f(q) = 0$;
  - l'ordine delle cifre ottenute va dalla più alla meno significativa.

- L'uomo è per natura abituato ad eseguire operazioni algebriche (somma, prodotto, divisione intera, ecc.) in base 10.
- Conversione da base $b \neq 10$ a base 10: conviene utilizzare la forma posizionale esplicita eseguendo tutte le operazioni in base 10. Consideriamo solo la parte non intera:

$$(0\,.\,a_{-1}\ldots\ a_{-h})_b = (a_{-1})_{10}\cdot(b)_{10}^{-1} + \ldots + (a_{-h})_{10}\cdot(b)_{10}^{-h}$$

  - da base 2 a base 10:

$$(0.101)_2 = 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} = 0.5 + 0 + 0.125 = (0.625)_{10}$$

  - da base 8 a base 10:

$$(0.24)_8 = 2\cdot 8^{-1} + 4\cdot 8^{-2} = 0.25 + 0.0625 = (0.3125)_{10}$$

  - da base 16 a base 10:

$$(0.AC)_{16} = \underset{A}{10}\cdot 16^{-1} + \underset{C}{12}\cdot 16^{-2} = 0.625 + 0.046875 = (0.671875)_{10}$$

- Conversione da base 10 a base $b \neq 10$: conviene utilizzare lo schema iterativo delle moltiplicazioni per b, eseguendole in base 10. Consideriamo solo la parte non intera:

$$(0\,.\,d_{-1}\ldots\ d_{-h})_{10}\cdot b_{10} = (\underline{a_{-1}})_{10} + \boxed{(0\,.\,a_{-2}\ldots\ a_{-h})_b}_{10}$$

  - $(0.625)_{10}$ da base 10 a base 2:

$$\begin{aligned}
0.625\cdot 2 &= 1.25 = \underline{1} + \boxed{0.25} &&\Rightarrow\quad a_{-1} = 1\\
0.25\cdot 2 &= 0.5\ \ = \underline{0} + \boxed{0.5} &&\Rightarrow\quad a_{-2} = 0\\
0.5\cdot 2 &= 1.0\ \ = \underline{1} + \boxed{0.0} &&\Rightarrow\quad a_{-3} = 1
\end{aligned}$$

$$(0.625)_{10} = (0\,.\,\underbrace{a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}})_2 = (0.101)_2$$

cifre a_i dalla più significativa (a_{-1}) alla meno significativa (a_{-3})

- Conversione da base 10 a base $b \neq 10$:
  - $(0.3125)_{10}$ da base 10 a base 8:

$$0.3125 \cdot 8 = 2.5 = \underline{2} + \boxed{0.5} \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = 2$$

$$0.5 \cdot 8 = 4.0 = \underline{4} + \boxed{0.0} \quad \Rightarrow \quad a_{-2} = 4$$

$$(0.3125)_{10} = (0\ .\ a_{-1}\ a_{-2})_8 = (0.24)_8$$

  - $(0.671875)_{10}$ da base 10 a base 16:

$$0.671875 \cdot 16 = 10.75 = \underline{10} + \boxed{0.75} \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = (10)_{10} = \mathrm{A}_{16}$$

$$0.75 \cdot 16 = 12.0 = \underline{12} + \boxed{0.0} \quad \Rightarrow \quad a_{-2} = (12)_{10} = \mathrm{C}_{16}$$

$$(0.671875)_{10} = (0\ .\ a_{-1}\ a_{-2})_{16} = (0.\mathrm{AC})_{16}$$

- Massimo intero rappresentabile con k cifre in base b:

$$N = (\underbrace{(b-1)\;(b-1)\ldots(b-1)}_{k \text{ cifre}})_b = (1\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ cifre}})_b - 1 = b^k - 1$$

- Cifre necessarie a rappresentare un dato numero $n \in \mathbb{N}$:

$$k = \lceil \log_b(n+1) \rceil$$

- Nel sistema posizionale il numero di cifre k necessario a rappresentare un numero cresce con il valore del numero stesso: la rappresentazione posizionale del numero di Avogadro $n \approx 6 \cdot 10^{23}$ in base 2 richiederebbe $k = 79$ cifre.
- Maggiore è la base, più numeroso è l'alfabeto e minore è il numero di cifre necessarie alla rappresentazione di un intero.
- Minima differenza *relativa* tra due numeri naturali successivi $n-1$ e n con al massimo k cifre in base b:

$$\Delta_{\text{rel}} = \frac{1}{n} > \frac{1}{b^k - 1}$$

- Δ_{rel} non è costante ma è inversamente proporzionale ad n.

- Minimo valore rappresentabile $\varepsilon > 0$ con h cifre in base b per la parte non intera:

$$\varepsilon = (0.\underbrace{00\ldots01}_{h \text{ cifre}})_b = b^{-h}$$

- Il minimo valore rappresentabile $\varepsilon > 0$ coincide con la minima differenza tra due numeri con h cifre per la parte non intera (esclusi gli zeri a destra).
- Minima differenza relativa tra due numeri $q - \varepsilon$ e q, $0 < q < 1$, con h cifre per la parte non intera:

$$\Delta_{\text{rel}} = \left|\frac{\varepsilon}{q}\right| = \frac{b^{-h}}{q} \quad \Rightarrow \quad h = \lceil -\log_b \Delta_{\text{rel}} - \log_b q \rceil$$

- Il numero di cifre h necessarie a garantire una data differenza relativa minima non è costante ma aumenta al diminuire di q.
- Numeri non interi in basi diverse possono non essere rappresentabili con un numero finito di cifre h:

$$(0.1)_3 = 1 \cdot 3^{-1} = (0.333333\ldots)_{10} = (0.\bar{3})_{10}$$

- Svantaggi della rappresentazione posizionale:
  - è scomoda per rappresentare certe grandezze quali ad esempio quelle che si riscontrano nei problemi scientifici: numeri molto grandi o molto piccoli;
  - la minima differenza relativa tra due numeri rappresentabili non è costante ma dipende dal modulo del numero stesso.

- Rappresentazione in *virgola mobile* (*floating point*) di un numero $x \in \mathbb{R}$:

$$x = \pm(0\,.\,z_1\ z_2 \ldots z_n)_b \cdot b^{\pm(e_1\ e_2\ \ldots\ e_m)_b}$$

  dove i simboli z_i e e_i sono cifre del sistema di numerazione (posizionale) in base b scelto.
  - *mantissa*: $\pm(0\,.\,z_1\ z_2 \ldots z_n)_b$, $z_1 \geq 1$ tranne $x = 0$;
  - *esponente*: $\pm(e_1\ e_2\ \ldots\ e_m)_b$;
  - i segni di mantissa ed esponente possono essere espressi utilizzando diverse convenzioni.

- Massimo valore rappresentabile in base b con n cifre per la mantissa e m per l'esponente:

$$X = (0\,.\,\underbrace{(b-1)\ldots(b-1)}_{n\ \text{cifre}})_b \cdot b^{\overbrace{((b-1)\ldots(b-1))_b}^{m\ \text{cifre}}} \approx b^{b^m-1}$$

- Cifre dell'esponente necessarie a rappresentare un dato numero x:

$$m = \lceil \log_b \left(\log_b |x| + 1 \right) \rceil$$

- Minima differenza tra $x = \pm(0\,.\,z_1 \ldots z_n)_b \cdot b^{\pm(e_1\,\cdots\,e_m)_b}$ e $x + \varepsilon$:

$$\varepsilon = \pm(0.\underbrace{00\ldots01}_{n\ \text{cifre}})_b \cdot b^{\pm(e_1\,\cdots\,e_m)_b}$$

- Minima differenza relativa $(z_1 \geq 1)$:

$$\Delta_{\text{rel}} = \left|\frac{\varepsilon}{x}\right| = \frac{(0.\overbrace{00\ldots01}^{n\ \text{cifre}})_b}{(0\,.\,z_1\ldots z_n)_b} = \frac{b^{-n}}{(0\,.\,z_1\ldots z_n)_b} < b^{-(n-1)}$$

- Δ_{rel} non dipende da x, tranne per $x \approx 0$ $(z_1 = 0)$.