Polinomi

$\deg(x^{1000} - 1) = 1000$ $\quad \deg(1) = 0$

$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \dots$

$\deg\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

indeterminate

$3x - x^2$

grado

$6x^{10} - x^2 + 1$

$\deg(0) = -\infty$

deg $\quad$ grado

degree

per def.

$6y$

$\frac{1}{2} \qquad 1, \; 0$

$\deg f = 10$

$f = x^{10} - x^9 + 1$

$\deg(6y) = 1$

$\mathbb{K}$ campo ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ...)

$\underline{\mathbb{K}[X]}$ = insieme dei polinomi in X a coeff. in $\mathbb{K}$

$\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$

$f, g \in \mathbb{K}[X] \rightsquigarrow f + g \in \mathbb{K}[X]$

<u>Es.</u> $f = 3x^3 - x$

$g = 6x^3 - x^2 + 1$

$\underline{f + g = 9x^3 - x^2 - x + 1}$

$\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathbb{K}[X] \rightsquigarrow \lambda \cdot f$

$\lambda = 2$

$2f = 6x^3 - 2x$

$\mathbb{K}[x]$ è uno spazio vett. su $\mathbb{K}$ $\circledast$

MATRICI

$m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$

Def. Una matrice di tipo $m \times n$ a entrate in $\mathbb{K}$ è il dato di $m \cdot n$ elementi di $\mathbb{K}$ rappresentati con una tabella:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

righe

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

colonne

$a_{ij} \in \mathbb{K}$

indice di riga

indice di colonna

Se $m = n$ la matrice è detta matrice quadrata

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 3 \times 3$$

Una matrice di tipo $1 \times n$ = Vettore riga

$$\underline{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}}$$

Se di tipo $m \times 1$ = Vettore colonna

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A^{(i)}$ i-esime rige $\qquad A^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$

$A_{(j)}$ j-esime colonne

$$A_{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonale principale (solo per mat. quadrate)

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notazione

L'insieme delle matrici $m \times n$ a entrate in $\mathbb{K}$ si denota con

$$\boxed{M_{m,n}(\mathbb{K})}$$

$\rightarrow M_{2,3}(\mathbb{R})$

$\rightarrow M_4(\mathbb{Q})$

Si pone $\underline{M_m(\mathbb{K})} \overset{def}{=} M_{m,m}(\mathbb{K})$ (matrici quadrate)

<u>Somme</u>

$$\underline{A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})} \qquad A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad B = (b_{ij})$$

$\rightsquigarrow$

$$A + B \overset{\text{def}}{=} (a_{ij} + b_{ij}) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$1 = a_{11}$

$a_{12} = -1$

$a_{21} = 1$

$a_{22} = 0$

Molt. Scalare

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$\lambda \in \mathbb{K}$

$\rightsquigarrow \underbrace{\lambda \cdot A}_{} \overset{\text{def}}{=} (\underbrace{\lambda a}_{}{}_{ij})$

Es

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$M_{m,n}(\mathbb{K})$ è uno spazio vett. su $\mathbb{K}$ $\circledast$

Matrice nulla

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

el. neutro di $+$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$A = (a_{ij})$

$\underline{-A} = (-a_{ij})$

$$A \in M_1(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$$

$$A = (a) \cong a$$

identificazione

$$\mathbb{K}^n \cong M_{1,n}(\mathbb{K}) \cong M_{n,1}(\mathbb{K})$$

Combinazioni lineari

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ vettori di V

Def Una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ è un'espressione del tipo

$$\underline{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n} \in V$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

Es $v_1 = (1,-1)$, $v_2 = (0,1)$, $v_3 = (5,0) \in \mathbb{R}^2$

$$v_1 - v_2 = (1,-2)$$

$$2v_1 + v_2 + \frac{1}{5} v_3 = (3,-1)$$

OSS Se $n=1$, cioè abbiamo un solo vett. v_1, una combi. lin. di v_1 è semplicemente

λv_1 (multiplo di v_1)

Sottospazi vettoriali

V sp. vett. su $\mathbb{K}$

$U \subset V$ sottoinsieme

Def. $U \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V se:

1) $U \neq \emptyset$
2) rispetto alle operazioni $+_V$, $\cdot_V$, U è uno spazio vett.

Prop. $U \subset V$ è sottospazio vett. di V $\iff$

1) U è non vuoto $\Longrightarrow$ OVVIA

$\Longleftarrow$ $(*)$

2) $u_1, u_2 \in U \Longrightarrow u_1 + u_2 \in U$ (chiuso rispetto a $+_V$)

3) $\lambda \in \mathbb{K},\ u \in U \Longrightarrow \lambda u \in U$ (chiuso rispetto a $\cdot_V$)

oppure 1) e

2') $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K},\ u_1, u_2 \in U \Longrightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$

Es. $V \subseteq V$ sottospazio vett.

$\{0_V\} \subset V$ " " $\Big\}$ sottospazi vett. banali

$\uparrow$

<u>Sottosp. nullo</u>

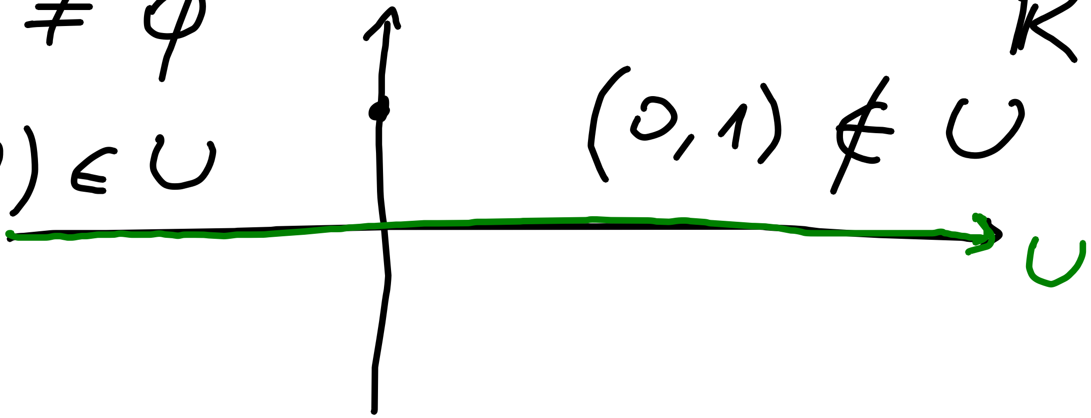
$V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ sottosp. vett. di $\mathbb{R}^2$

$(0,0) \in U \implies U \neq \emptyset$

$\mathbb{R}^2$ <u>proprio</u>

$(a,0) + (b,0) = (a+b, 0) \in U$

$(0,1) \notin U$



$\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot (a,0) = (\lambda a, 0) \in U$

Es $\mathbb{R}$ $(=\mathbb{R}^1)$ come spaz. vett. su $\mathbb{R}$

Prop. Gli unici sottospaz. vett. di $\mathbb{R}$ sono quelli banali.

Dim $U \subset \mathbb{R}$ sottosp. vett., U non nullo

$\Longrightarrow \exists\, a \in U,\ a \neq 0$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda a \in U$

Prendiamo $v \in \mathbb{R}$

$\lambda a = v$

$\lambda = v a^{-1}$

$(v a^{-1}) \cdot a = v$

$\Longrightarrow U = \mathbb{R}$

Proprietà 6

Se V è un $\mathbb{K}$ spazio vett., $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$

allora $\lambda v = 0_V \iff \lambda = 0$ oppure $v = 0_V$

Dim $\Leftarrow$

$0 \cdot v = 0_V$ ✓

$\lambda \cdot 0_V \stackrel{?}{=} 0_V$ ✓

$$\lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V$$

$$\lambda \cdot 0_V - \lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V - \lambda \cdot 0_V$$

$$0_V = \lambda \cdot 0_V + 0_V = \lambda \cdot 0_V$$

$(\Rightarrow)$ Se $\underbrace{\lambda v = 0_V}$ e $\underbrace{\lambda \neq 0}$

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda v) = \lambda^{-1} \cdot 0_V$$

$$(\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot v = 0_V$$

$$1 \cdot v = 0_V$$

$$v = 0_V$$