Lezione 8 ottobre 2020 - 10:00 -11:00

lunedì 5 ottobre 2020 18:02

Visto ieri : DEFINIZIONE DI SPAZIO VETTORIALE REALE

ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI REALI :

⓪ gli spazi $\mathcal{V}^1$, $\mathcal{V}^2$ e $\mathcal{V}^3$ dei vettori liberi visti ieri sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$

① $\mathbb{R}$ è uno spazio vett. su $\mathbb{R}$

infatti:

$$+ : \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}_{=\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

così definite:

$(r, r') \longrightarrow r+r'$ usuale somma di numeri reali

$\mathbb{R}\times V \longrightarrow V$

$$\cdot : \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}_{=\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

scalari, vettori, vettori

$(a, r) \longrightarrow a\cdot r = ar$ usuale prodotto nei reali

Esercizio : verificare che $+$ e $\cdot$ soddisfano V1, .., V8.

② Cons. $\underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{notazione}} = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{$coppie ordinate di numeri reali$\}$

$$= \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$ se $x_1 \neq x_2$

Anche $\mathbb{R}^2$ è sp. vett. su $\mathbb{R}$:

infatti :

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \longrightarrow (x_1+y_1, x_2+y_2)$$

cioè $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (\underbrace{x_1+y_1}, \underbrace{x_2+y_2})$ somma in $\mathbb{R}$

$$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(a, (x_1, x_2)) \longrightarrow (a x_1, a x_2)$$

$a \cdot (x_1, x_2) = (\underbrace{a x_1}, \underbrace{a x_2})$ prodotto in $\mathbb{R}$

Esercizio : $+$ e $\cdot$ soddisfano V1, ..., V8

NEUTRO : $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

OPPOSTO : (x_1, x_2) , il suo opposto è $(-x_1, -x_2)$

CONVENZIONE :

Da ora in poi gli elementi di $\mathbb{R}^2$ considerato come spazio vettoriale verranno indicati così : $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

invece di (x_1, x_2)

③ Cons. $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{$terne ordinate di numeri reali$\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

IN MODO ANALOGO a $\mathbb{R}^2$, si possono definire $+$ e $\cdot$ che lo rendono spazio vettoriale su $\mathbb{R}$:

$$+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} := \underbrace{\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{pmatrix}}_{\text{somme in } \mathbb{R}}$$

$$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\left(a, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right) \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}a x_1\\a x_2\\a x_3\end{pmatrix}}_{\text{prodotti in } \mathbb{R}}$$

④ Cons. $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$, $n \in \mathbb{N}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

i suoi elementi sono STRINGHE di lunghezza n di numeri reali, dette anche n-UPLE.

$\mathbb{R}^n$ può essere munito di una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$;

infatti: $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

è definita da

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}$$

$$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$a \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}a x_1\\a x_2\\\vdots\\a x_n\end{pmatrix}$$

Esercizio: Dimostrare che sono soddisfatti V1, V2, ..., V8.

⑤ Sia $\mathcal{F} := \{$funzioni $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$

Anche $\mathcal{F}$ può essere munito di una struttura di spazio vettoriale:

$$+ : \mathcal{F}\times\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

$f + g :=$ funzione somma

cioè : $(f+g)(x) := \overbrace{f(x) + g(x)}^{\text{somma in } \mathbb{R}}$

diremo anche : definiamo la somma di funzioni PUNTUALMENTE

$$\cdot : \mathbb{R}\times\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

$(a, f) \longrightarrow a\cdot f =$ funzione prodotto

dove $(a\cdot f)(x) = \underbrace{a f(x)}_{\text{prodotto in } \mathbb{R}}$