PRIMO FOGLIO DI ESERCIZI DI GEOMETRIA
A.A. 2020/2021
PROF. VALENTINA BEORCHIA

(1) Sia
$$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$
l'insieme dei polinomi in una indeterminata, a coefficienti in $\mathbb{R}$, di grado minore o uguale a 3. Si dimostri che V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

(2) Sia
$$V = \mathbb{R}[x]_3$$
l'insieme dei polinomi in una indeterminata, a coefficienti in $\mathbb{R}$, di grado uguale a 3. Si dimostri che V non è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

(3) Si dimostri che l'insieme $\mathbb{Z}_4$ dei resti della divisione per 4 con la somma e prodotto indotti da $\mathbb{Z}$ non è un campo.

(4) Per ogni numero naturale $n \neq 0$, si consideri l'insieme $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ dei resti della divisione per n, che si denota con $\mathbb{Z}_n$. Definiamo due operazioni $\oplus$ e $\odot$ nel modo seguente:
- $a \oplus b$ è il resto della divisione per n di $a + b$;
- $a \odot b$ è il resto della divisione per n di ab

Si dimostri che le operazioni $\oplus$ e $\odot$ soddisfano le proprietà $K1, K2, K3, K5$, e che per ogni $a \in \mathbb{Z}_n$ esiste lopposto $-a$ per loperazione $\oplus$.

(5) * *facoltativo:* Si dimostri che $\mathbb{Z}_n$ è un campo se e solo se n è un numero primo.