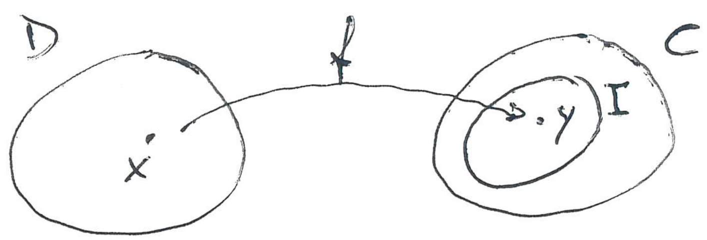
FUNZIONI - GENERALITÀ

Una *funzione* f è una legge che ad ogni elemento x di un certo insieme D $(x \in D)$ fa corrispondere un unico elemento y di un certo insieme C.

Si dice che y è l'*immagine* di x attraverso f e si scrive $y = f(x)$

Indicheremo inoltre con $I \subseteq C$ l'insieme degli elementi $y \in C$ che sono "raggiungibili" ovvero per i quali esiste $x \in D$ t.c. $y = f(x)$. Talvolta si usa la scrittura $I = f(D)$. I è definito *insieme immagine*.



$f: D \to C$

Esempio $f(x) = x^2$. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$I = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

Se per ogni $y \in I$ esiste ed è unico $x \in D$ tale che $f(x) = y$ allora la funzione f è <u>iniettiva</u>. ②

<u>Esempio</u>: $f(x) = x^3$ è iniettiva ma $f(x) = x^2$ non lo è

Se $I = C$ allora $f: D \to C$ è <u>suriettiva</u>

<u>Esempio</u> $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è suriettiva in quanto $I = \mathbb{R}^+ \subsetneq \mathbb{R}$. $f(x) = x^3$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva e suriettiva

Una funzione f iniettiva e suriettiva si dice <u>biiettiva</u>

<u>Composizione</u> Sia $y = f(t)$, $t = g(x)$

La funzione $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ si definisce <u>funzione composta</u>

<u>Esempio</u> $f(t) = \sqrt{t}$, $g(x) = x^2 + 3x$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 3x}$$

Funzioni inverse

Sia $y = f(x)$ una funzione biiettiva. Diremo che $x = g(y)$ è l'*inversa* di f se $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x$ e $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$. Scriveremo $g = f^{-1}$

Esempio
- $f(x) = x^3 \rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$
- $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad f(x) = x^2 \rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Funzioni elementari

- Funzioni polinomiali

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad D = \mathbb{R}$$

Esempi: $y = 1$ funzione costante

$y = 2x + 1$ retta

$y = x^2 - 3x + 1$ parabola

In generale $f(x)$ polinomio di grado n

- Funzioni razionali

$$y = \frac{P_n(x)}{q_m(x)}$$, P_n polinomio di grado n, q_m polinomio di grado m

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid q_m(x) \neq 0\}$$

Esempi:

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{iperbole}$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{3x^2 - 1}{x + 1}$$

Funzioni potenza $\quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a > 0$

$c = a^b$ è la potenza di base a ed esponente b

Proprietà

$a, b \in \mathbb{R}$

$a, b > 0$

$m, n \in \mathbb{R}$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Funzioni potenza $y = f(x) = x^b$. Il dominio in generale è $D = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

In alcuni casi il dominio può essere esteso a tutto $\mathbb{R}$; per esempio $D = \mathbb{R}$ per $b \in \mathbb{N}$. Se $b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$, allora $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, allora $D = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$

In generale comunque, lavorando con un esponente arbitrario $b \in \mathbb{R}$, si impone $D = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$