Logaritmi e funzioni logaritmo

Assegnata l'equazione $b = a^c$, $a>0$, $b>0$ l'esponente c si definisce "logaritmo in base a di b" e si scrive

$$\boxed{c = \log_a b} \qquad a>0,\ b>0$$

Dalle proprietà delle potenze seguono le seguenti proprietà

1. $\boxed{\log_a 1 = 0}$. Questo perché $a^0 = 1$
2. $\boxed{\log_a a = 1}$. Perché $a^1 = a$
3. $\boxed{\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2}$

   Sia $c_1 = \log_a b_1$ $\quad c_2 = \log_a b_2$

   Quindi $a^{c_1} = b_1$ $\quad a^{c_2} = a^{b_2}$

   $$a^{c_1} \cdot a^{c_2} = b_1 b_2 \,, \quad a^{c_1 + c_2} = b_1 b_2$$

   Pertanto $c_1 + c_2 = \log_a b_1 b_2$
4. $\boxed{\log_a (b_1 / b_2) = \log_a b_1 - \log_a b_2}$

Definisca come in 3.

$c_1 = \log_a b_1 \qquad c_2 = \log_a b_2$

$a^{c_1} = b_1 \qquad a^{c_2} = b_2$

$$\frac{a^{c_1}}{a^{c_2}} = \frac{b_1}{b_2} \rightarrow a^{c_1 - c_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

quindi $c_1 - c_2 = \log_a(b_1/b_2)$

5. $\boxed{\log_a(b^s) = s \log_a b \,, \quad s \in \mathbb{R}}$

Chiamo $c = \log_a b$ quindi $a^c = b$

$b^s = (a^c)^s = a^{cs}$. Pertanto

$$cs = \log_a(b^s)$$

6. $\boxed{\log_a a^b = b}$ Deriva dalla 5. e dalla 2.

7. $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ Deriva dalla definizione:

$$a^c = b \Rightarrow c = \log_a b$$

8. cambiamento di base

$$\boxed{\log_a b = \log_a d \cdot \log_d b}$$

Sia $c_1 = \log_a d \to a^{c_1} = d$

$c_2 = \log_d b \to d^{c_2} = b$

Quindi $(a^{c_1})^{c_2} = b \to a^{c_1 c_2} = b$

$$c_1 c_2 = \log_a b$$

Osservazioni

a) $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

Dalla 5. con $s = -1$

b) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

Questo perché $\log_a b \cdot \log_b a = \log_a a = 1$

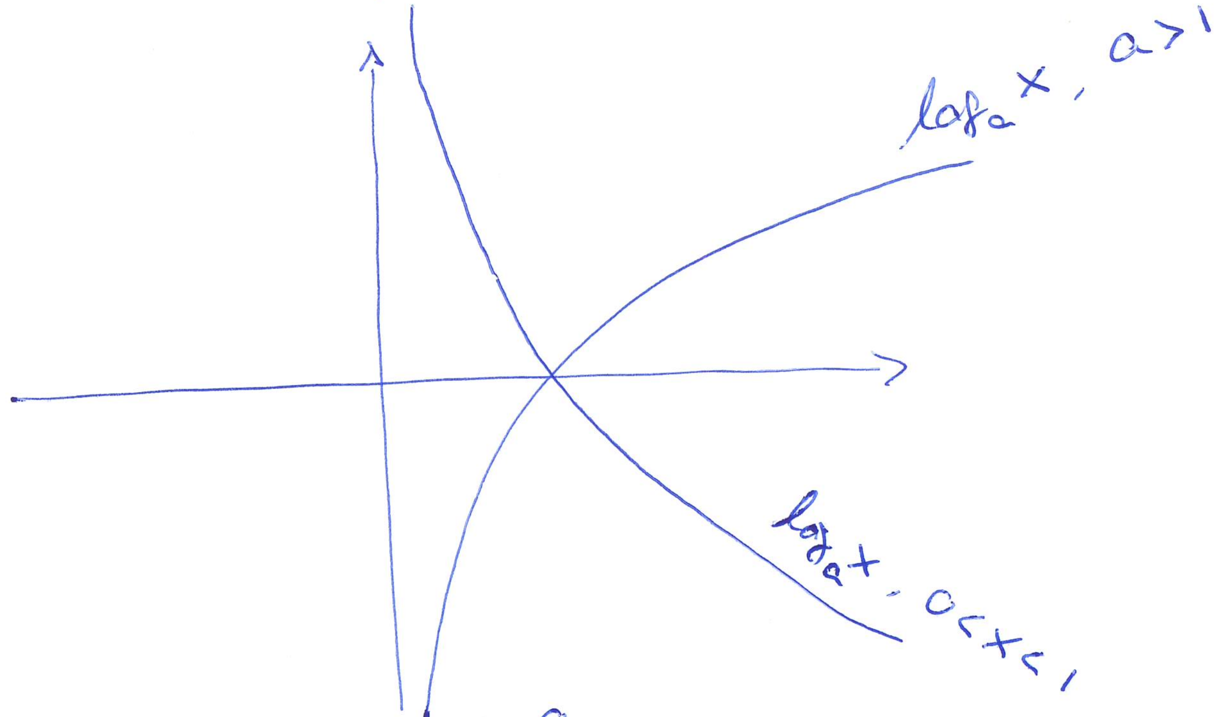
dalla 8.

Assegnato $a>0$, $a \neq 1$, la funzione $\boxed{y = \log_a x \,, \quad x>0}$ si definisce funzione logaritmo.

Per le proprietà 6,7 si ha che

$$a^{\log_a x} = x \,, \qquad \log_a a^x = x$$

e quindi la funzione $y=\log_a x$ è l'inversa di $y = a^x$



Si osserva che $\boxed{\log_{\frac{1}{a}} x} \overset{8.}{=} \log_{\frac{1}{a}} a \cdot \log_a x$

$$\overset{b)}{=} \frac{1}{\log_a\left(\frac{1}{a}\right)} \cdot \log_a x \overset{a),2.}{=} \boxed{-\log_a x}$$

Quindi le funzioni: $\log_a x$ e $\log_{1/a} x$

sono simmetriche rispetto all'asse x

Cambiamento di base per l'esponenziale

Supponiamo di voler scrivere a^{x_1} come

b^{x_2}, con a, x_1, b assegnati.

Devo risolvere rispetto x_2 l'equazione

$$a^{x_1} = b^{x_2} \rightarrow$$

$$\log_b a^{x_1} = \log_b b^{x_2}$$

$$x_1 \log_b a = x_2$$ e quindi

$$\boxed{a^{x_1} = b^{x_1 \log_b a}}$$

Sia $a>1$. Allora $\log_a x > 0$ per $x>1$ e $\log_a x < 0$ per $0<x<1$.

Proviamo il caso $x>1$; se fosse $\log_a x < 0$ allora

$$a^{\log_a x} < a^0$$

$$x < 1$$

che non va bene per ipotesi. Nello stesso modo si ragiona per $0<x<1$ e poi analogamente si tratta la situazione $0<a<1$