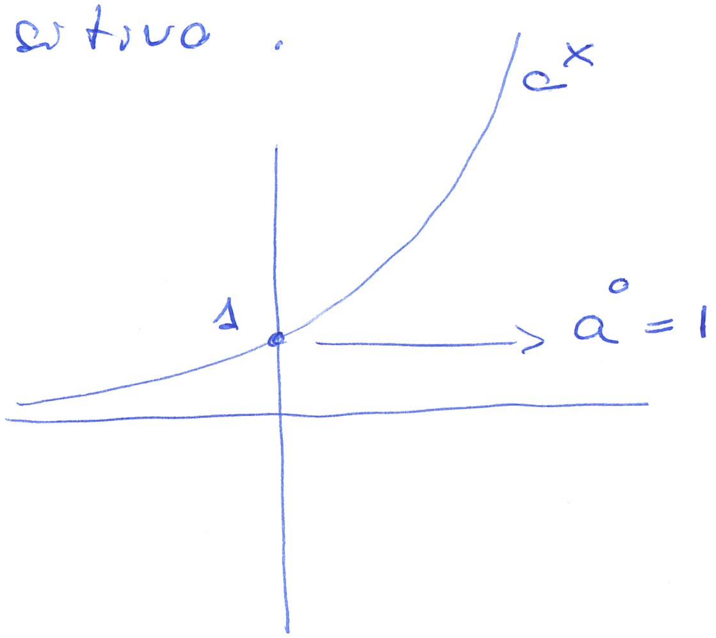
Funzioni esponenziali A partire della nozione di potenza chiamiamo **funzione esponenziale** una funzione del tipo

$$\boxed{y = a^x \quad \text{con } x \in \mathbb{R}, \ a > 0}$$

Vi sono due situazioni fondamentali: $a > 1$ e $0 < a < 1$ (per $a = 1$ si ottiene semplicemente la retta $y = 1$ in quanto $1^x = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$). In entrambe le situazioni $\boxed{a^x > 0 \ \forall x}$ in quanto una base positiva elevata a qualunque esponente dà sempre un risultato positivo.

Caso $a > 1$



(2)

- <u>per $x>0$, $a^x>1$</u> Infatti se prendiamo $x=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ abbiamo

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m. \quad a^{1/n}>1 \text{ se } a>1$$

(basta elevare alla n a dx e sx)

e quindi $a^{m/n}=(\underbrace{a^{1/n}}_{>1})^m>1$

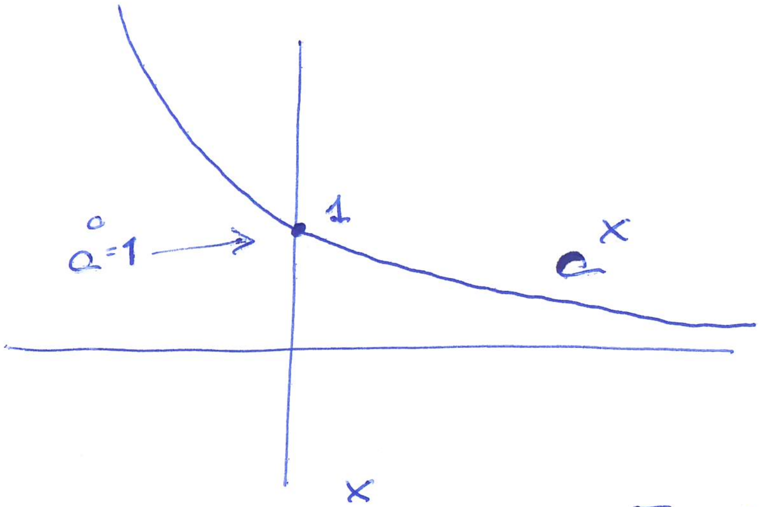
- <u>per $x<0$, $0<a^x<1$.</u> Poiché $x=-|x|$, abbiamo $a^x=\frac{1}{a^{|x|}}$.

Per quanto visto sopra $a^{|x|}>1$ e quindi $\frac{1}{a^{|x|}}<1$

- <u>$x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$</u> Vero perché $a^{x_1}<a^{x_2} \Leftrightarrow 1<\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}=a^{x_2-x_1}$

$\Leftrightarrow x_2>x_1$

Caso $0 < a < 1$



- per $x > 0$ $a^x < 1$. Infatti scrivendo

$a = \frac{1}{b}$, con $b > 1$, abbiamo

$$a^x = \frac{1}{\underbrace{b^x}_{>1}} < 1$$

- per $x < 0$ $a^x > 1$ Come prima,

$$a^x = \frac{1}{\underbrace{b^x}_{<1}} > 1$$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ Usando ancora $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1$$

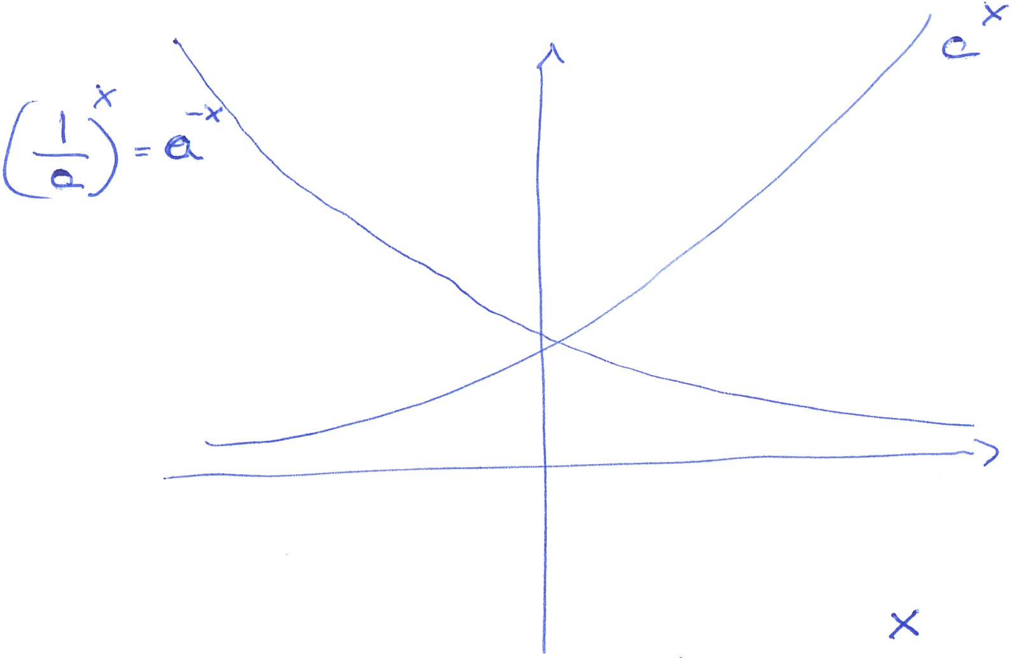
$$\Leftrightarrow \frac{1}{b^{x_1 - x_2}} > 1 \Leftrightarrow b^{x_2 - x_1} > 1$$

$$\Leftrightarrow x_2 > x_1$$

OSS essendo $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$

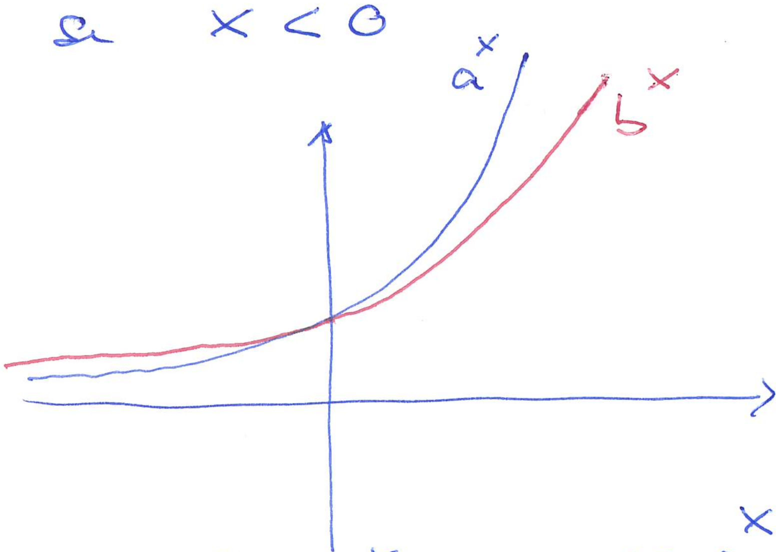
abbiamo che la funzione $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

è simmetrica di a^x rispetto all'asse y



OSS per $a > b > 1$ si ha: $a^x > b^x$ se $x > 0$,

$a^x < b^x$ se $x < 0$



Per $x > 0$, $a^x > b^x \iff \left(\frac{a}{b}\right)^x > 1 \iff$

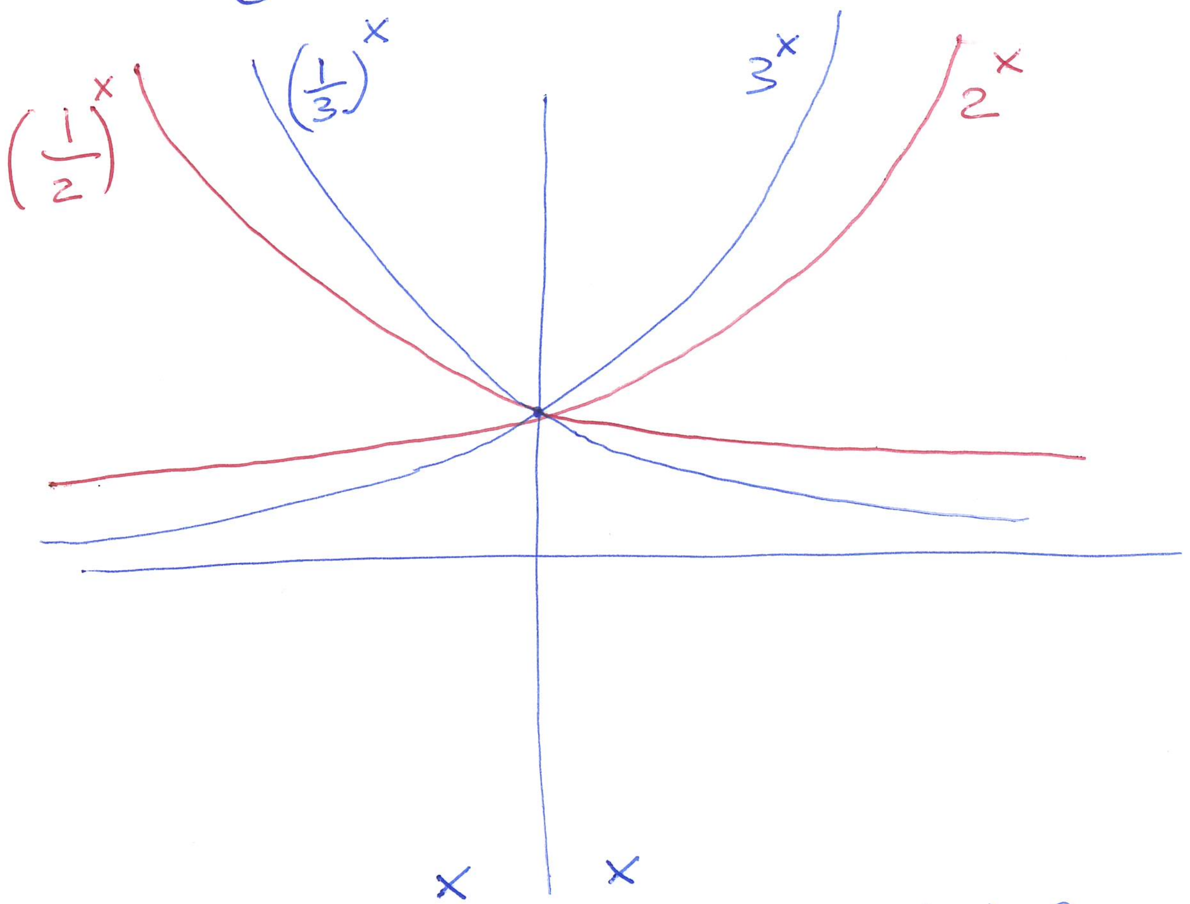
$\frac{a}{b} > 1 \iff a > b$. Per $x < 0$ si

ragiona allo stesso modo. Per simmetria

rispetto all'asse y vale il discorso

analogo nella situazione

$0 < a < b < 1$



Cioè: $a^x < b^x$ per $x > 0$

$a^x > b^x$ per $x < 0$

La funzione esponenziale più importante dal punto di vista matematico è la funzione $y = e^x$ $e = 2.718\ldots$

Per questa funzione, la tangente in $(0,1)$ è la retta $y = x + 1$