

ESPONENZIALI E LOGARITMI

Equazioni e disequazioni - Classe quarta

L'argomento degli esponenziali e logaritmi verrà affrontato LIMITATAMENTE al problema delle equazioni e delle disequazioni.

1 Richiami teorici

PROPRIETA' DEGLI ESPONENZIALI:

Si definisce **funzione esponenziale**, fissata una qualsiasi BASE reale $a > 0$ $a \neq 1$, il risultato dell'operazione

$$y = a^x$$

ottenuto elevando la base a all'esponente REALE x

- $a^x > 0 \forall x$ [l'esponenziale è SEMPRE POSITIVO!]
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- $a^0 = 1 \forall a > 0$
- $a^1 = a \forall a > 0$

PROPRIETA' DEI LOGARITMI:

Assegnata una BASE reale $a > 0$ $a \neq 1$ ed un numero REALE POSITIVO b , si definisce LOGARITMO in BASE a del numero b l'esponente x a cui devo elevare detta base per ottenere b , ossia:

$$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$$

- C.E. del logaritmo $\log_a(b)$: $b > 0$, ovvero $\log_a(f(x)) : f(x) > 0$
- $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y)$
- $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$
- $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$
- $\log_a 1 = 0 \forall a > 0$
- $\log_a a = 1 \forall a > 0$
- $\log_a(a^x) = x, \quad a^{\log_a(x)} = x$
- $\log_a(x) > 0$ per $x > 1$, $\log_a(x) < 0$ per $0 < x < 1$
- FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI BASE: $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$, con a e c due basi $a, c > 0$ e b argomento positivo. Tale formula risulta indispensabile per l'approssimazione dei logaritmi tramite calcolatrice (usando i logaritmi decimali o naturali)

2 Equazioni esponenziali (senza logaritmi)

le equazioni esponenziali di cui discuteremo la risoluzione in questa dispensa sono:

1. equazioni elementari, o riconducibili ad elementari, del tipo, per esempio: $2^x = 8$, oppure $2^x + 2^{x+1} = 16$;
2. equazioni risolvibili con una sostituzione, per esempio $2^{2x} + 2^x - 3 = 0$

2.1 equazioni elementari

Rientrano in questa categoria tutte le equazioni che sono riconducibili nella forma base:

$$a^x = k$$

ove a è una base positiva e k un numero reale positivo: se $k \leq 0$ l'equazione va subito classificata come impossibile.

Il segreto per la risoluzione è pensare, se possibile, a k come potenza della base a . Quindi si ricorre alla *principio di identità delle potenze* che afferma che *due potenze sono uguali se hanno stessa base e stesso esponente*.

Supponiamo di dover risolvere:

$$3^x = 27$$

Notiamo che $27 = 3^3$, pertanto si può dire che

$$3^x = 3^3$$

e, per il principio di identità, che

$$x = 3$$

Analogamente, se si dovesse risolvere:

$$2^{5x+1} = 8^x$$

basta notare che $8^x = 2^{3x}$ e quindi che $2^{5x+1} = 2^{3x}$, quindi, se le basi sono uguali basta eguagliare gli esponenti, ottenendo:

$$5x + 1 = 3x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

L'equazione

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7$$

chiaramente non è elementare, ma si può ricondurre a questa forma applicando opportunamente le proprietà delle potenze¹:

$$2^{x+1} = 2^x \cdot 2, \quad 2^{x+2} = 2^x \cdot 4$$

Quindi:

$$2^x + 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x = 7$$

Raccogliendo ora 2^x si ha:

$$2^x \cdot (1 + 2 + 4) = 7 \Rightarrow 7 \cdot 2^x = 7$$

Divido ora per 7 ambo i membri, riconducendomi alla forma elementare:

$$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Altro esempio:

$$2^{x+1} - 2^x - 2^{x-1} = 4$$

¹Ricordare che $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ e $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Notare che:

$$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x, \quad 2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$$

quindi:

$$2^x(2 - 1 - 1/2) = 4 \Rightarrow \frac{2^x}{2} = 4 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

2.2 equazioni con sostituzione

Rientrano in tale categoria le equazioni che possono essere risolte ricorrendo ad una sostituzione, ossia ad una variabile ausiliaria che trasforma l'equazione da esponenziale in algebrica.

Si trattano così tutte le equazioni riconducibili alla forma:

$$a \cdot k^{2x} + b \cdot k^x + c = 0$$

in cui a, b, c sono tre numeri reali e k una base positiva.

La sostituzione che si pone è sempre $k^x = t$, cosicchè $k^{2x} = t^2$.

Si abbia, ad esempio:

$$\boxed{5^{2x} - 24 \cdot 5^x - 25 = 0}$$

La sostituzione da fare è $5^x = t$, in virtù della quale l'equazione diviene:

$$t^2 - 24t + 25 = 0$$

che ora è algebrica di secondo grado in t .

Si calcola come al solito il Δ e le due soluzioni t_1, t_2^2 , nel nostro caso $t_1 = -1$ e $t_2 = 25$.

Ora si deve ri-sostituire, ponendo:

$$t_1 = 5^x \Rightarrow 5^x = -1$$

che è un'equazione elementare impossibile.

$$t_2 = 5^x \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow x = 2$$

che invece è una soluzione accettabile.

Altro esempio:

$$\boxed{5^{2x} - 5^{x+1} = 5(5^{x-1} - 1)}$$

Qui si applicano le proprietà delle potenze, riconducendosi a:

$$5^{2x} - 5 \cdot 5^x = 5^x - 5 \Rightarrow 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Si pone ora $5^x = t$ e quindi l'equazione diviene:

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

che ammette le due soluzioni $t_1 = 1, t_2 = 5$, quindi:

$$5^x = 1 \Rightarrow x = 0, \quad 5^x = 5 \Rightarrow x = 1$$

3 Disequazioni esponenziali elementari

Il segreto per comprendere le disequazioni esponenziali è quello di ricordare come varia l'andamento della funzione esponenziale $y = a^x$ al variare della base (mantenendola però strettamente positiva!)

- Se $a > 1$ la funzione $y = a^x$ è, come noto, crescente, per cui se si hanno due esponenti $x_1 < x_2$ si può dire che anche le rispettive potenze stanno nella stessa relazione, cioè $a^{x_1} < a^{x_2}$
- Se $0 < a < 1$ la funzione $y = a^x$ è, come noto, decrescente, per cui se si hanno due esponenti $x_1 < x_2$ le rispettive potenze stanno nella relazione inversa, cioè $a^{x_1} > a^{x_2}$

²il metodo di soluzione delle equazioni di secondo grado deve essere noto agli studenti

Ciò implica dunque che:

- se nella disequazione ridotta a forma normale compare una base $a > 1$, allora fra gli esponenti vige la stessa disuguaglianza che c'è tra le potenze;
- se nella disequazione ridotta a forma normale compare una base $0 < a < 1$, allora fra gli esponenti vige la disuguaglianza inversa rispetto a quella che c'è tra le potenze;

I metodi di risoluzione sono del tutto analoghi a quelli delle equazioni: è chiaro che sarà importante ricordare le tecniche di risoluzione delle disequazioni di secondo grado e di quelle fratte!

Si abbia, ad esempio:

$$5^{2x} > 5^{x+1}$$

Qui la base è $5 > 1$, quindi si può scrivere che la disequazione è equivalente a:

$$2x > x + 1 \Rightarrow x > 1$$

Altro esempio:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{5x} < \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$$

Qui la base è $\frac{1}{6} < 1$, quindi si può scrivere che la disequazione è equivalente a:

$$5x > x + 3 \Rightarrow x > 3/4$$

4 Risoluzione delle equazioni/disequazioni esponenziali coi logaritmi

In questo paragrafo vedremo come la nozione di logaritmo ci può essere utile nella risoluzione di particolari equazioni e disequazioni esponenziali. I logaritmi devono essere usati allorché nella riduzione di un'equazione (o disequazione) esponenziale in forma normale del tipo

$$a^{f(x)} = b$$

con $a > 0, b > 0$, b non è una potenza della base a .

In tal caso si deve ricordare la seguente definizione:

Si dice logaritmo in base $a > 0$ del numero $b > 0$ l'esponente a cui si deve elevare la base a per ottenere il numero b .

In virtù di tale definizione è facile rendersi conto che:

$$a^{f(x)} = b \Rightarrow f(x) = \log_a b$$

Ricordiamo anche come approssimare eventualmente i logaritmi con la calcolatrice. I normali calcolatori da studio danno la possibilità di calcolare solo logaritmi naturali (simbolo $\ln$ oppure $\log$) e quelli decimali (contrassegnati spesso con Log). Per calcolare allora logaritmi in una base diversa da quella naturale (e), ci si serve della seguente identità:

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

4.1 equazioni esponenziali coi logaritmi

Supponiamo di dover risolvere:

$$3^x = 4$$

E' ovvio, per la definizione di logaritmo che

$$x = \log_3 4 = \frac{\ln 4}{\ln 3} \simeq 1,262$$

Un'approssimazione con tre cifre decimali è di solito più che sufficiente.

Risolviamo ora:

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 15$$

Dissociando gli esponenti si ha:

$$2^x + 2 \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x = 15$$

Raccogliendo 2^x :

$$2^x \cdot \left(1 + 2 + \frac{1}{2}\right) = 15 \Rightarrow 2^x \cdot \frac{7}{2} = 15$$

Dividendo per $7/2$ abbiamo:

$$2^x = \frac{30}{7}$$

A questo punto la soluzione è immediata:

$$x = \log_2 \left(\frac{30}{7}\right) \simeq 2,099$$

Risolviamo ora:

$$12 - 2^{x+3} + 2^{2x} = 0$$

Dissociamo gli esponenti come al solito:

$$12 - 8 \cdot 2^x + 2^{2x} = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 12 = 0$$

Operiamo la sostituzione $2^x = t$ e abbiamo:

$$t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow t = 2 \vee t = 6$$

Risostituendo si ha:

$$t = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1, \quad t = 6 \Rightarrow 2^x = 6 \Rightarrow x = \log_2 6 \simeq 2,585$$

4.2 disequazioni esponenziali coi logaritmi

Si debba risolvere

$$4^{3+x} \geq 7^{2-x}$$

Dissociando gli esponenti si ha:

$$4^3 \cdot 4^x \geq \frac{7^2}{7^x}$$

Semplificando si ha:

$$64 \cdot 4^x \geq \frac{49}{7^x}$$

Moltiplichiamo ambo i membri per 7^x così da eliminare l'incognita al denominatore (a secondo membro):

$$64 \cdot 4^x \cdot 7^x \geq 49$$

Osserviamo a primo membro la presenza di esponenziali di basi diverse ma con lo stesso esponente: si ha:

$$64 \cdot (7 \cdot 4)^x \geq 49$$

Dividendo per 64 ambo i membri si ha:

$$28^x \geq \frac{49}{64}$$

Osserviamo che la base dell'esponenziale, ossia $28 > 1$, quindi nei passaggi successivi si lascia la stessa disuguaglianza:

$$x \geq \log_{28} \left(\frac{49}{64} \right) \simeq -0,080$$

Si debba risolvere

$$3^{1+x} + 2 \cdot 3^{2-x} > 29$$

Dissociando gli esponenti si ha:

$$3 \cdot 3^x + 2 \cdot \frac{3^2}{3^x} > 29$$

Moltiplichiamo ambo i membri per 3^x così da eliminare l'incognita al denominatore³:

$$3 \cdot 3^{2x} + 18 > 29 \cdot 3^x$$

Poniamo la sostituzione: $3^x = t$:

$$3t^2 - 29t + 18 > 0$$

Questa ultima disequazione va risolta come una normale disequazione di secondo grado: l'associata fornisce $t = 2/3 \vee t = 9$. La disequazione in t è soddisfatta per $t > 9 \vee t < 2/3$, dunque:

$$3^x > 9 \Rightarrow x > 2 \vee 3^x < 2/3 \Rightarrow x < \log_3(2/3) \simeq -0,37$$

5 Equazioni e disequazioni logaritmiche

Sono quelle equazioni in cui l'incognita compare sotto il segno di logaritmo. Le riconduciamo ai due tipi fondamentali:

1. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, dove $f(x)$ e $g(x)$ sono due espressioni contenenti la x e a una base positiva e diversa da 1;
2. $\log_a f(x) = b$, ove b è un numero reale

E' fondamentale ricordare che la funzione $y = \log_a x$ è definita se e solo se $x > 0$, per cui bisogna asseguire le equazioni alle C.E., ponendo TUTTI gli argomenti dei logaritmi strettamente positivi.

Si può effettuare la verifica dell'accettabilità delle soluzioni introducendo i valori trovati nelle disequazioni che derivano dalle C.E. (verifica a posteriori).

Le equazioni del primo tipo si risolvono, poste le C.E., uguagliando i due argomenti dei logaritmi (*principio di identità dei logaritmi*): se $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, allora $f(x) = g(x)$ con $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$, generando quindi un'equazione algebrica in x .

Le equazioni del secondo tipo si risolvono esponenziando membro a membro: se $\log_a f(x) = b$, allora $f(x) = a^b$, con $f(x) > 0$.

5.1 equazioni logaritmiche del primo tipo

Esempio 1

$$\log_2(x+1) = \log_2(3x-1)$$

E' un'equazione del primo tipo, perchè consiste in un'uguaglianza di due logaritmi di ugual base (qui $f(x) = x+1$ e $g(x) = 3x-1$).

Imponiamo le condizioni di esistenza: abbiamo due argomenti che devono essere posti *simultaneamente* positivi:

$$C.E. \begin{cases} x+1 > 0 \\ 3x-1 > 0 \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione, si può allora dire che:

$$\log_2(x+1) = \log_2(3x-1) \Rightarrow x+1 = 3x-1$$

³osserviamo che la disuguaglianza non cambia in quanto 3^x è positivo

L'ultima equazione (lineare) è detta *equazione risolvente*. La soluzione è

$$x - 3x = -1 - 1 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

E' necessario ora effettuare la verifica dell'accettabilità della soluzione. Il valore $x = 1$ va sostituito nel sistema delle C.E., per vedere se esso soddisfa simultaneamente entrambe le disequazioni (e rende positivi i due argomenti del logaritmo).

$$C.E. \begin{cases} 1+1 > 0 \\ 3 \cdot 1 - 1 > 0 \end{cases}$$

Essendo entrambe le disequazioni verificate, la soluzione $x = 1$ è accettabile e quindi la equazione di partenza ha per soluzione proprio $x = 1$.

Esempio 2

$$2 \log(x+3) = \log(x-1) + 4 \log 2$$

Abbiamo qui due argomenti di logaritmi (la cui base è indifferente!): entrambi vanno posti positivi, generando le seguenti condizioni:

$$C.E. \begin{cases} x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$$

Si applicano le proprietà dei logaritmi⁴, portando tutte le incognite a primo membro:

$$2 \log(x+3) - \log(x-1) = 4 \log 2 \Rightarrow \log(x+3)^2 - \log(x-1) = \log 2^4$$

Quindi:

$$\log \frac{(x+3)^2}{x-1} = \log 16$$

Ora si eguagliano gli argomenti, ottenendo come equazione risolvente, un'equazione algebrica fratta:

$$\frac{(x+3)^2}{x-1} = 16$$

Facendo il denominatore comune si ha:

$$x^2 + 6x + 9 = 16x - 16 \Rightarrow x^2 - 10x - 25 = 0$$

che dà come soluzione $x = 5$

Come si vede con facilità, la soluzione risulta accettabile, in quanto compatibile con le condizioni di esistenza. Pertanto la soluzione dell'equazione di partenza è $x = 5$.

Esempio 3

$$\log(10-2x) = \log(5-x) - \log 4$$

Le C.E. sono:

$$C.E. \begin{cases} 10-2x > 0 \\ 5-x > 0 \end{cases}$$

Seguendo lo stesso procedimento del caso precedente, abbiamo:

$$\log(10-2x) - \log(5-x) = -\log 4 \Rightarrow \log \frac{10-2x}{5-x} = -\log 4$$

Si deve notare che $-\log 4 = \log 4^{-1}$.

Eguagliando gli argomenti otteniamo l'equazione risolvente:

⁴Ricordare che $\log(x^n) = n \cdot \log x$ e che $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$ se la base è la stessa

$$\frac{10-2x}{5-x} = \frac{1}{4} \Rightarrow 40-8x = 5-x$$

Moltiplicando in croce per eliminare i denominatori si ha:

$$40-8x = 5-x \Rightarrow -8x+x = -40+5 \Rightarrow -7x = -35 \Rightarrow x = 5$$

Notiamo subito che se sostituiamo la soluzione nelle C.E. si ha:

$$C.E. \begin{cases} \frac{10-2 \cdot 5}{5-5} > 0 \\ > 0 \end{cases}$$

Entrambe le disequazioni non risultano soddisfatte per cui l'equazione di partenza è impossibile, in quanto priva di soluzioni

5.2 equazioni logaritmiche del secondo tipo

Esempio 1

$$\log_3 x - \log_3(2x-1) = 2$$

Le C.E. sono: .

$$C.E. \begin{cases} x > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases}$$

Applicando la proprietà dei logaritmi a primo membro si ha:

$$\log_3 \frac{x}{2x-1} = 2$$

Esponenziando, prendendo come base 3, si ha che:

$$3^{\log_3 \frac{x}{2x-1}} = 3^2 \Rightarrow x = 18x-9$$

equazione che ha come radice $x = 9/17$.

Tale valore risulta compatibile con le condizioni di esistenza, quindi tale equazione ammette come soluzione

$$x = 9/17$$

Esempio 2

$$\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$$

Le C.E. sono: .

$$C.E. \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$$

Applicando la proprietà dei logaritmi a primo membro si ha:

$$\log_2[x \cdot (x-1)] = 1$$

Esponenziando, prendendo come base 2, si ha che:

$$2^{\log_2[x \cdot (x-1)]} = 2^1 \Rightarrow x(x-1) = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

L'ultima equazione quadratica ammette come soluzioni:

$$x = -1 \vee x = 2$$

Sostituendo nelle C.E. vediamo che la soluzione $x = -1$ va scartata mentre l'altra no. In definitiva, la nostra equazione ha come unica soluzione

$$x = 2$$

5.3 Disequazioni logaritmiche

Non cambia niente rispetto al caso delle equazioni logaritmiche, se non che le soluzioni delle disequazioni vanno intersecate con le condizioni di esistenza. In altre parole, esse vanno messe a sistema, generando un sistema di disequazioni: non possiamo quindi operare un controllo di accettabilità a posteriori, ma siamo obbligati a risolvere il sistema *di cui vanno prese le soluzioni comuni!*

Prestare grande attenzione alla base a del logaritmo: se è $0 < a < 1$ è necessario cambiare il verso della disequazione.

Ricordare sempre la risoluzione delle disequazioni fratte e di secondo grado!

Esempio 1

$$\log_3(2x+1) > 0$$

Le C.E. sono: $2x+1 > 0 \Rightarrow x > -1/2$.

Essendo la base $3 > 1$ il verso non cambia. Esponenziando in base 3 abbiamo:

$$3^{\log_3(2x+1)} > 3^0 \Rightarrow (2x+1) > 1$$

L'ultima disequazione è verificata per $x > 0$.

Questa soluzione va messa a sistema con le C.E., generando il *sistema risolvibile*:

$$\begin{cases} x > -1/2 \\ x > 0 \end{cases}$$

Il sistema ammette dunque come soluzione (che è anche quella della disequazione di partenza)

$$x > 0$$

Esempio 2

$$\log_2(1-x^2) - 1 < 0$$

Le C.E. sono: $1-x^2 > 0$, disequazione che andrebbe risolta, trovando $-1 < x < 1$.

Siccome la base è $2 > 1$ il verso rimane lo stesso: portiamo il termine noto a secondo membro:

$$\log_2(1-x^2) < 1$$

Esponenziamo in base 2 scrivendo:

$$1-x^2 < 2^1 \Rightarrow x^2 + 2 - 1 > 0$$

L'ultima condizione è verificata $\forall x$ (*tralasciamo perchè...cosa che non meriterebbe ancora trattazione...*).
Mettendo a sistema tale condizione con le C.E. si ha:

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ \forall x \end{cases}$$

Intersecando si trova

$$-1 < x < 1$$

Esempio 3

$$\log_{1/2}(2x+1) > -2$$

Le C.E. sono: $2x+1 > 0 \Rightarrow x > -1/2$.

Esponenziamo in base $1/2$:

$$(1/2)^{\log_{1/2}(2x+1)} > (1/2)^{-2}$$

Visto che la base $1/2$ è minore di 1, il verso va cambiato:

$$(1/2)^{\log_{1/2}(2x+1)} > (1/2)^{-2} \Rightarrow 2x+1 < (1/2)^{-2} \Rightarrow 2x+1 < 4$$

L'ultima disequazione dà $x < 3/2$ che va intersecata con le C.E. generando il sistema:

$$\begin{cases} x > < -1/2 \\ x < 3/2 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione di partenza è allora:

$$-1/2 < x < 3/2$$

Esempio 4

$$\log_{1/4}(x^2 - 6) - \log_{1/4}(x - 3) > -1$$

Le C.E. sono: $x^2 - 6 > 0 \Rightarrow x > \sqrt{6} \vee x < -\sqrt{6}$ e $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$.

Applichiamo la proprietà dei logaritmi:

$$\log_{1/4}(x^2 - 6) - \log_{1/4}(x - 3) = \log_{1/4}\left(\frac{x^2 - 6}{x - 3}\right)$$

La disequazione diviene allora:

$$\log_{1/4}\left(\frac{x^2 - 6}{x - 3}\right) > -1$$

Esponenziamo in base $1/4$: visto che la base $1/4$ è minore di 1, il verso va cambiato, arrivando a:

$$\frac{x^2 - 6}{x - 3} < 4 \Rightarrow \frac{x^2 - 6}{x - 3} - 4 < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 6 - 4 \cdot (x - 3)}{4 \cdot (x - 3)} < 0$$

Questa disequazione è fratta e dà come soluzione⁵ $x < 3$ che va intersecata con le C.E. generando il sistema:

$$\begin{cases} x > \sqrt{6} \quad \vee \quad x < -\sqrt{6} \\ x > 3 \\ x < 3 \end{cases}$$

Come si osserva, si tratta di un sistema impossibile, per cui la disequazione di partenza non ammette soluzioni

ESERCIZI:

- a) $2^x - 4 + 3 \cdot 2^x < 2$
- b) $\log_2(x - 1) + \log_2(x) = 0$
- c) $6 + 5 \cdot 3^x - 3^{2x} = 0$
- d) $\log_2(4x - 1) + 1 > 0$
- e) $1 - \log_3(x^2 - 4) < 0$
- f) $2^x + 2^{-x} - 4 = 0$
- g) $\log_{10}(x - 3) - \log_{10}(2x + 1) = 0$
- h) $4^{x+2} \geq 7^{x-1}$
- i) $5^{2x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} < 0$
- j) $\frac{8^x \cdot 2}{2^{x+3}} = \frac{2^{x+1}}{2^{2x+2}}$

⁵Provarlo per esercizio, ricordando come si risolvono le equazioni fratte...