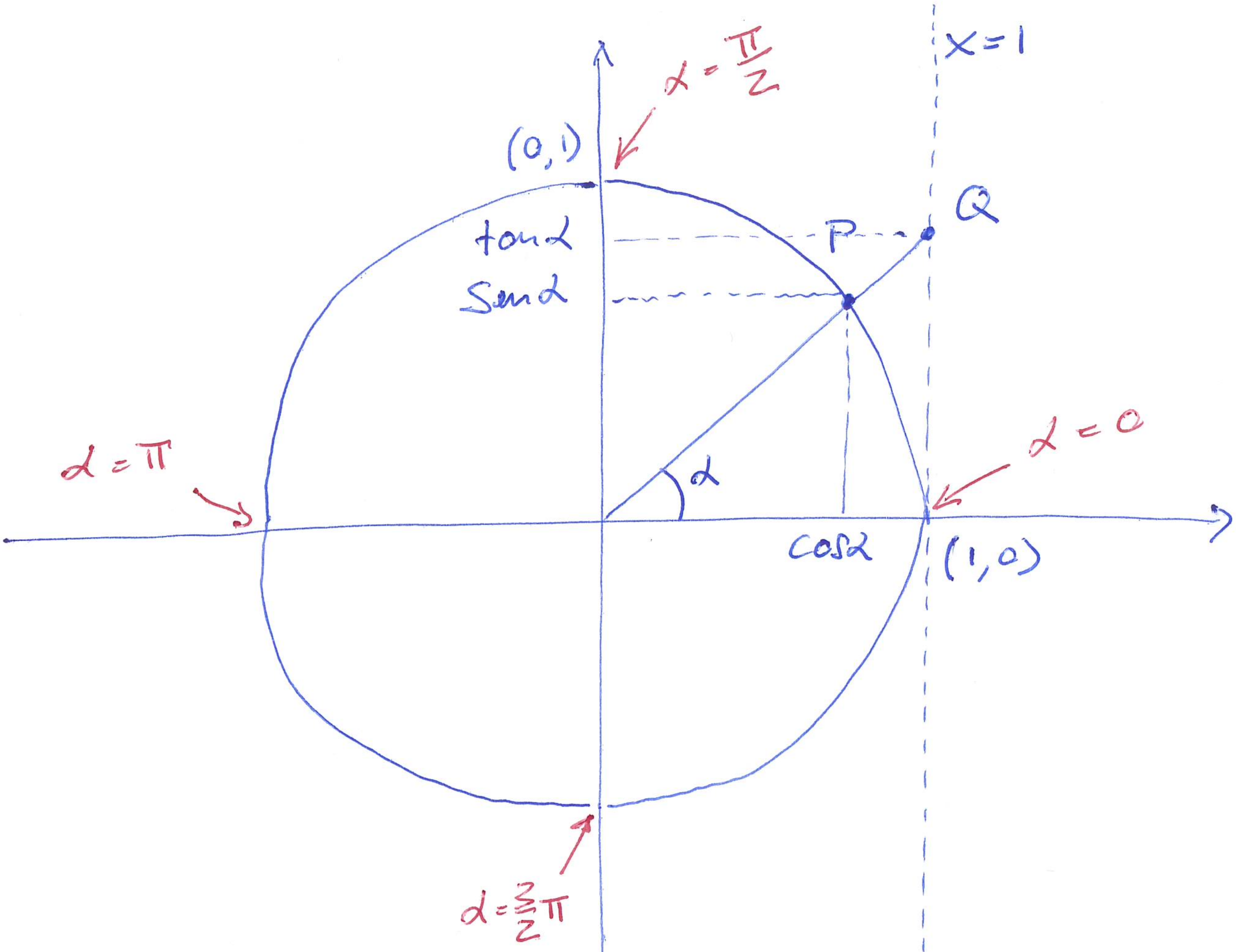
Funzioni trigonometriche

Consideriamo la circonferenza di raggio 1 e centrata nell'origine
(equazione : $x^2 + y^2 = 1$)



Fissato in modo arbitrario un angolo α il corrispondente punto P ha coordinate $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, mentre il punto Q ha coordinate $Q = (1, \tan\alpha)$

La retta (unica) che passa per l'origine e per Q, contiene P per costruzione e quindi ha coeff. angolare $m = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ ed equazione $y = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} x$. Il punto Q è l'intersezione di questa retta con la retta $x = 1$. Mettendo a sistema queste due rette, trovo

$$Q = \left(1, \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

e quindi

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

Relazione fondamentale della trigonometria

$$\boxed{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1}$$

E' in pratica l'equazione della circonferenza, ovvero il th. di Pitagora

Supponendo di lavorare con α misurato in radianti (un radiante è l'angolo corrispondente ad una lunghezza d'arco pari al raggio), essendo il perimetro del cerchio unitario uguale a 2π, avremo $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ($\frac{\pi}{2} = 90°$, $\pi = 180°$, $2\pi = 360°$).

Dalle definizioni geometriche, si vede facilmente che vale la seguente tabella

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1	non definita
π	-1	0	0
$\frac{3}{2}\pi$	0	-1	non definita
2π	1	0	0

Sempre osservando la figura è chiaro che $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ e $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$.

Inoltre, per $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $(45°)$, e allo stesso modo per $\alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$, la retta OPQ è la bisettrice del I e III quadrante, $y = x$. Quindi

$\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$, $\tan\alpha = 1$.

Per $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ oppure $\alpha = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$, la retta OPQ è $y = -x$, quindi $\operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha$, $\tan\alpha = -1$.

Per simmetria valgono inoltre le seguenti:

$$\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)$$
$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(2\pi - \alpha)$$
$$\tan\alpha = -\tan(2\pi - \alpha)$$

Relazioni che conviene ricordare

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Usando queste relazioni si può infatti dimostrare che

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha}$$

$$= \operatorname{sen}\alpha \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{=1} \cos\alpha$$

$$\boxed{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha}$$

$$= \cos\alpha \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + \operatorname{sen}\alpha \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{=1}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos^2\alpha - \underbrace{\operatorname{sen}^2\alpha}_{=1-\cos^2\alpha}$$