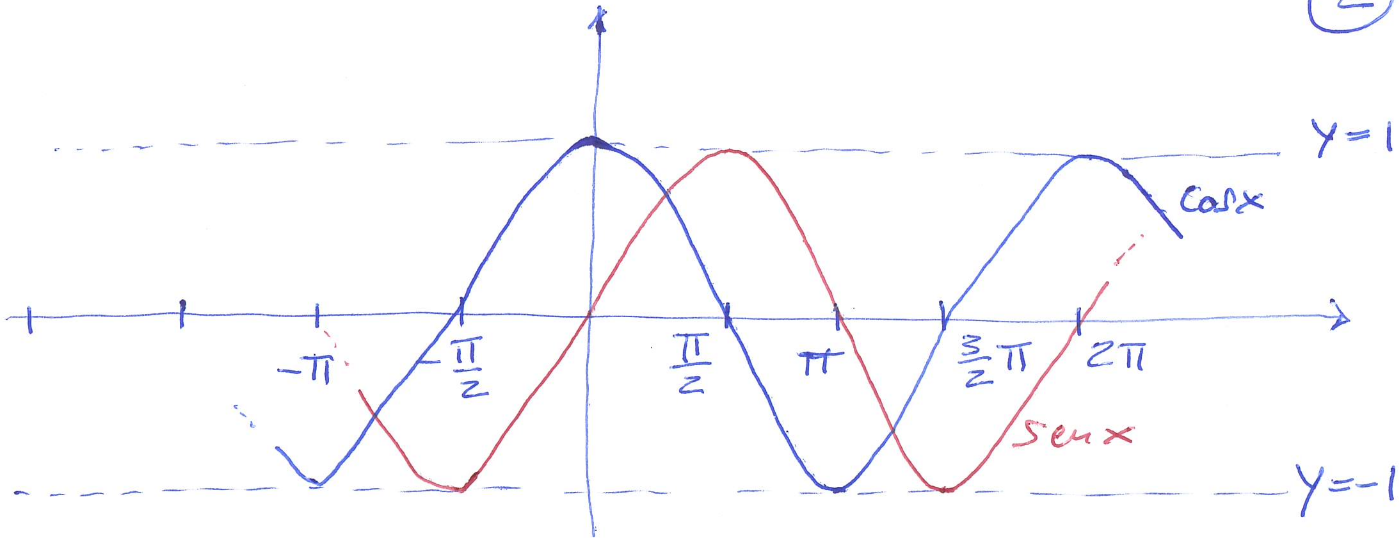
Estensione a tutto $\mathbb{R}$

Supponendo di compiere un numero arbitrario di giri intorno alla circonferenza unitaria, in senso antiorario (positivo) oppure orario (negativo), posso estendere il concetto di angolo a tutta la retta reale. Un generico punto sulla circonferenza, identificato dall'angolo α, lo posso infatti identificare con $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

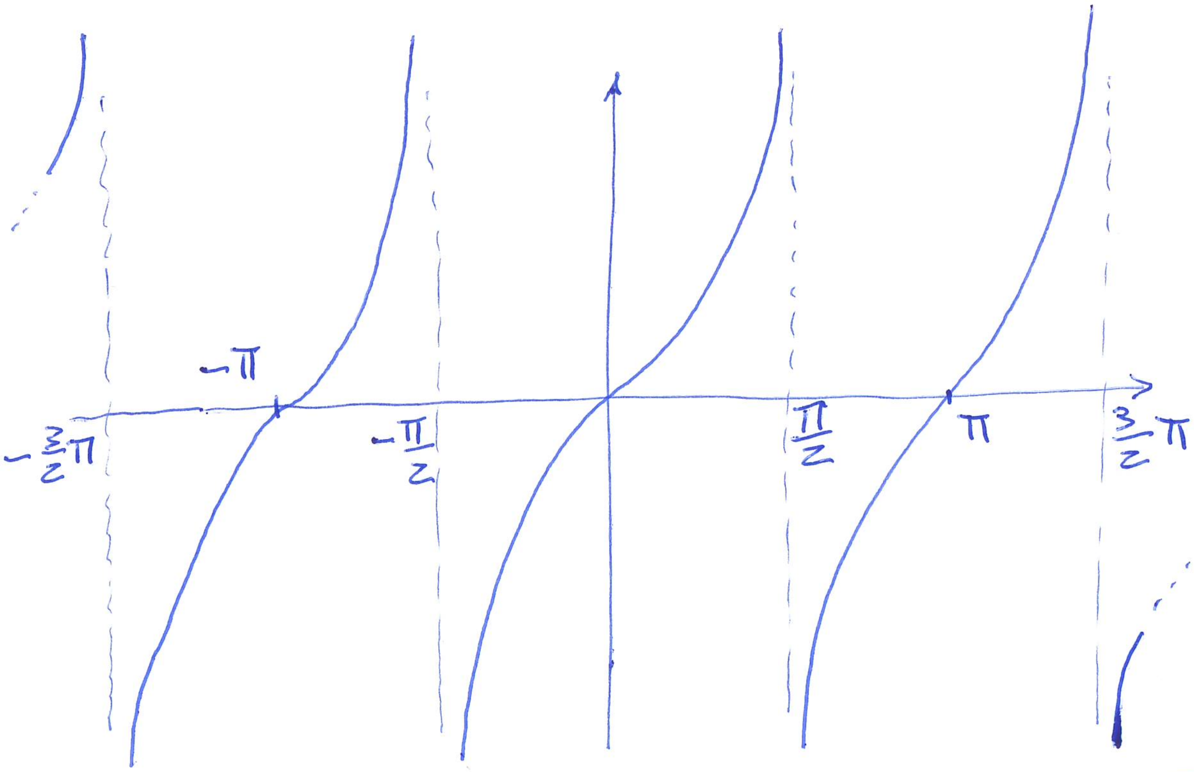
In questo senso posso considerare le funzioni: $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\tan x$.
Per come sono definite, le funzioni $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ sono <u>periodiche di periodo 2π</u>, ovvero

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \cos(x+2\pi) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}(x+2\pi) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$



La tangente non è definita quando $\cos x = 0$, cioè per $x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

ed è <u>periodica di periodo π</u>



$$\boxed{\tan x = \tan(x+\pi) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq k\frac{\pi}{2}}$$

Infatti:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cos\pi + \cos x \underbrace{\operatorname{sen}\pi}_{=0}}{\cos x \cos\pi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\pi}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$$

Esercizio sapendo che $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

dimostrare che $\tan\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x \pm 1}{1 \mp \tan x}$

Esercizio dimostrare che

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$

Esercizio dimostrare che

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \frac{\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$$