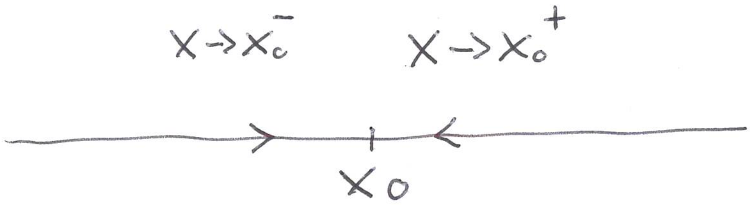
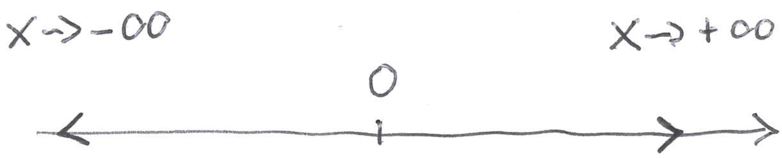
LIMITI DI FUNZIONI

<u>Notazione</u> La scrittura $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ indica la situazione in cui la variabile $x \in \mathbb{R}$ si avvicina progressivamente a x_0, e diremo x tende ad x_0. Scriveremo inoltre $x \to x_0^+$ oppure $x \to x_0^-$ per indicare la situazione in cui x si avvicina ad x_0 da destra $(x \geq x_0)$ oppure da sinistra $(x \leq x_0)$



Le scritture $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ indicano inoltre le situazioni in cui x tende a diventare arbitrariamente grande {positivamente} e negativamente



Naturalmente, se $x \to +\infty$ allora $-x \to -\infty$

Obiettivo: capire il comportamento di una funzione quando x si avvicina ai vari estremi del dominio di definizione ed eventualmente per

$x \to \pm\infty$

Esempi 1. $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$. Vogliamo capire cosa succede per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$

Naturalmente per $x \to +\infty$, x^2 tende a diventare arbitrariamente grande e quindi $x^2 \to +\infty$. Diremo che "$f(x) = x^2$ tende a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$" e scriveremo

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty}$$

Essendo x^2 sempre positivo avremo che $x^2 \to +\infty$ anche per $x \to -\infty$ cioè

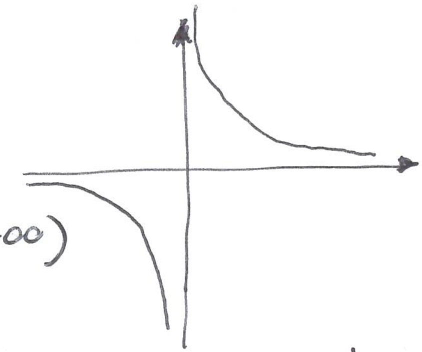
$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty}$$

In forma compatta per questo esempio possiamo scrivere

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$$

dove la scrittura $x \to \pm\infty$ indica x che tende a $+\infty$ oppure $-\infty$ indistintamente.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$



$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Osserviamo che la funzione $\frac{1}{x} \to 0$ per $x \to \pm\infty$ quindi possiamo scrivere

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Volendo essere più precisi abbiamo che $\frac{1}{x} \to 0^+$ per $x \to +\infty$ e $\frac{1}{x} \to 0^-$ per $x \to -\infty$. Questa analisi sul segno del limite della funzione può essere importante nel caso in cui si lavori con funzioni composte.

Poiché la funzione non è definita in 0 dobbiamo inoltre studiare cosa succede all'avvicinarsi a questo punto.

È evidente dal grafico che il comportamento è diverso a seconda che si arrivi in 0 da destra $x \to 0^+$ o da sinistra $x \to 0^-$.

In particolare avremo $\frac{1}{x} \to +\infty$ per $x \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

e $\frac{1}{x} \to -\infty$ per $x \to 0^-$, cioè

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$, $D = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$
$= [0, +\infty)$

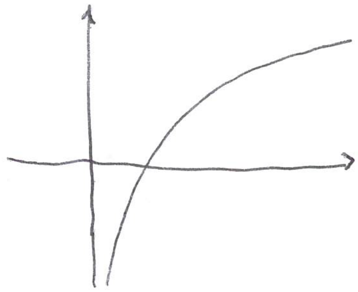
Devo quindi studiare cosa succede per $x \to 0^+$ (non posso avvicinarmi a 0 da sinistra in quanto la funzione non è definita per $x < 0$) e per $x \to +\infty$

Essendo $\sqrt{0} = 0$ avremo semplicemente

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Inoltre chiaramente $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

4. $f(x) = \ln x \qquad D = (0, +\infty)$

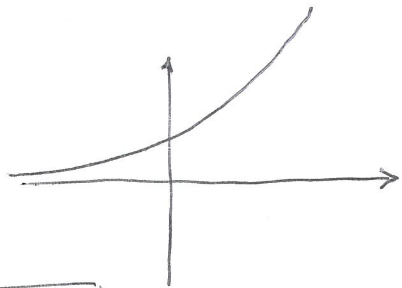


Abbiamo

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$$

5. $f(x) = e^x \qquad D = \mathbb{R}$



Abbiamo

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{array}}$$

6. In certi casi il limite non esiste. Per esempio per $x \to +\infty$ la funzione $\operatorname{sen} x$ continua ad oscillare senza mai tendere ad un certo valore finito. Diremo che il limite <u>non esiste</u>

Formalizzazione Nel caso in cui il limite esiste abbiamo tre possibilità $f(x) \to L$, $f(x) \to +\infty$, $f(x) \to -\infty$. Ognuna di queste può essere raggiunta attraverso $x \to x_0$, $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

	$f(x) \to L$	$f(x) \to +\infty$	$f(x) \to -\infty$
$x \to x_0$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. se $\|x - x_0\| < \delta$ allora $\|f(x) - L\| < \varepsilon$	$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. se $\|x - x_0\| < \delta$ allora $f(x) > M$	$\forall M < 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. se $\|x - x_0\| < \delta$ allora $f(x) < M$
$x \to x_0^+$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. se $x - x_0 < \delta$ allora $\|f(x) - L\| < \varepsilon$	$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. se $x - x_0 < \delta$ allora $f(x) > M$	$\forall M < 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. se $x - x_0 < \delta$ allora $f(x) < M$
$x \to x_0^-$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. se $x_0 - x < \delta$ allora $\|f(x) - L\| < \varepsilon$	$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. se $x_0 - x < \delta$ allora $f(x) > M$	$\forall M < 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. se $x_0 - x < \delta$ allora $f(x) < M$
$x \to +\infty$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0$ t.c. se $x > N$ allora $\|f(x) - L\| < \varepsilon$	$\forall M > 0 \ \exists N > 0$ t.c. se $x > N$ allora $f(x) > M$	$\forall M < 0 \ \exists N > 0$ t.c. se $x > N$ allora $f(x) < M$
$x \to -\infty$	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N < 0$ t.c. se $x < N$ allora $\|f(x) - L\| < \varepsilon$	$\forall M > 0 \ \exists N < 0$ t.c. se $x < N$ allora $f(x) > 0$	$\forall M < 0 \ \exists N < 0$ t.c. se $x < N$ allora $f(x) < M$

La tabella precedente contiene ~~le~~ definizioni di limite in tutti i possibili casi. Negli esempi visti prima abbiamo scritto i valori dei limiti lavorando per "intuizione". Dimostriamo ora attraverso la definizione che i limiti scritti sono effettivamente corretti

1. $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ La definizione corrispondente è quella della $\underline{\text{IV}}$ riga $\underline{\text{II}}$ colonna (def (IV, II))

Prendiamo $M > 0$ arbitrario. La disequazione $f(x) > M$, cioè $x^2 > M$, è sicuramente soddisfatta per $x > \sqrt{M}$

Quindi per $x > N = \sqrt{M}$ $f(x) > M$

In sostanza definisco $N = \sqrt{M}$ e ho dimostrato la validità del limite in quanto queste operazioni le posso fare $\forall M > 0$

$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ def (V, II)

Sia $M > 0$ arbitrario. La disequazione $f(x) > 0$, cioè $x^2 > M$ vale per $x < -\sqrt{M}$. Posso quindi definire

$$N = -\sqrt{M} \text{ per ogni } M > 0$$

dimostrando la correttezza del limite

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ def (IV, I)

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. La disequazione $|f(x) - L| < \varepsilon$, cioè $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ $(L = 0)$ cioè $\frac{1}{x} < \varepsilon$ (in quanto $x \to +\infty$ quindi $x > 0$)

è sicuramente vera per $x > \frac{1}{\varepsilon}$.

Quindi basta prendere $N = \frac{1}{\varepsilon}$.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ def (V, I)

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, cioè $-\frac{1}{x} < \varepsilon$ (in quanto $x \to -\infty$ quindi $x < 0$)

vale per $\frac{1}{x} > -\varepsilon$ cioè per

$x < -\frac{1}{\varepsilon}$. Basta quindi definire

$N = -\frac{1}{\varepsilon}$.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ def $(\mathrm{II}, \mathrm{II})$ $(x_0 = 0)$

Sia $M > 0$ arbitrario. La disequazione

$\frac{1}{x} > M$ vale per $x < \frac{1}{M}$. Quindi

basta prendere $\delta = \frac{1}{M}$ perché in

questo caso $x - x_0 = x < \delta$ assicura

$\frac{1}{x} > M$

3. $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ def $(\mathrm{II}, \mathrm{I})$ $(x_0 = 0, L = 0)$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. $|f(x) - L| < \varepsilon$

implica $|\sqrt{x}| < \varepsilon$ cioè $\sqrt{x} < \varepsilon$,

cioè $x < \varepsilon^2$. Basta dunque

definire $\delta = \varepsilon^2$

4. $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ def(II, III) $(x_0 = 0)$

Sia $M < 0$ e vogliamo risolvere $f(x) < M$ cioè $\ln x < M$. Otteniamo $x < e^M = e^{-|M|}$. Basta dunque prendere $\delta = e^{-|M|}$. Con ragionamento analogo si dimostra che

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{def (IV, II)}$$

<u>Esercizio</u> Usando la definizione di limite dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1$$