LIMITI DI FUNZIONE

PARTE IV - LIMITI NOTEVOLI

1) $$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$ E' un teorema

$\hookrightarrow 1^\infty$

Conseguenze

a) $$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Definiamo $t=-x$. Quindi per $x\to-\infty$ si ha $t\to+\infty$. Pertanto

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{t}}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1-1}{t-1}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\overbrace{\left(1+\frac{1}{t-1}\right)}^{\to 1}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} = e$$

usando il limite della funzione composta

b) $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log_a (1+x)^{1/x}$$

sostituzione $t = 1/x$

$$= \lim_{t\to \pm\infty} \log_a \left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \log_a e$$

c) immediata conseguenza della b)

è che $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

d) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$ valida per $a>0$ $a\neq 1$

uso la sostituzione $t = a^x - 1$

ovvero $x = \log_a(t+1)$. Si noti

che per $x \to 0$ vale $a^x - 1 \to 0$

e quindi $t \to 0$. Per la composizione

dei limiti abbiamo dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{\log_a(t+1)}{t}} \overset{b)}{=} \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

2) $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

Si noti che il dominio di $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tuttavia questo limite ci assicura che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

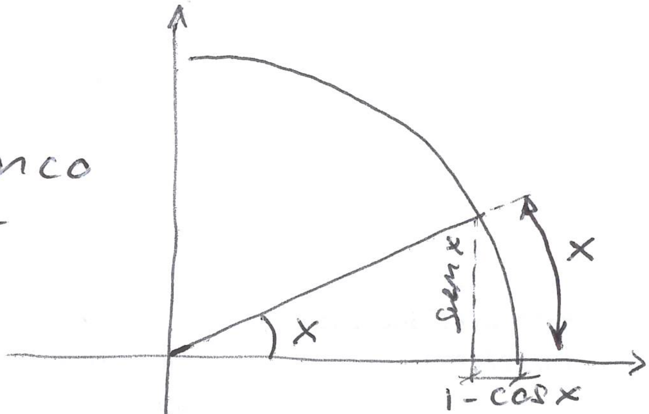
e quindi il punto 0 rappresenta una discontinuità eliminabile nel senso che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Dimostriamo il limite per $x \to 0^+$ ovvero $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Il caso $x \to 0^-$ è analogo e permette quindi di dimostrare la validità del limite per $x \to 0$



Lavorando in radianti, l'arco individuato dall'angolo x ha lunghezza esattamente uguale a x.

Quindi vale la disuguaglianza

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{sen} x + (1-\cos x)$$

ovvero (dividendo tutto per $\operatorname{sen} x$)

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{sen} x + (1-\cos x)}{\operatorname{sen} x}$$

cioè $$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + (1-\cos x)} < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

Osserviamo che la funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + (1-\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)}{\operatorname{sen} x(1+\cos x) + \operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\overbrace{1+\cos x}^{\to 2}}{\underbrace{1+\cos x}_{2 \leftarrow} + \underbrace{\operatorname{sen} x}_{\to 0}} \longrightarrow 1$$

Quindi

$$f(x) < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\downarrow$$

$$1$$

Come conseguenza del teorema di confronto $\frac{\sin x}{x} \to 1$ in quanto sta tra due funzioni che tendono a 1.

Conseguenze

a) $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Infatti

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\downarrow\ 1} \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\downarrow\ 2} \to \frac{1}{2}$$

b) $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1}$$

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow\ 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\downarrow\ 1} \to 1$$