LIMITI DI FUNZIONI

PARTE III

Funzioni continue Una funzione $f \in (a,b)$ si dice continua in $x_0 \in (a,b)$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Si dice continua in (a,b) se è continua in ogni $x_0 \in (a,b)$

Osservazione :

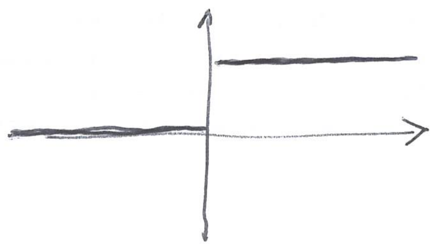
f è continua in x_0 se e solo se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

TUTTE le funzioni trattate finora sono continue nel loro insieme di definizione, ad esclusione di x^β, $\beta > 0$.

Esempio di funzione non continua in un punto

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$



discontinuità in 0.

Lo stesso discorso vale per $f(x) = \frac{1}{x}$

Continuità da destra e da sinistra

Una funzione avente dominio D si dice continua da destra in $x_0 \in D$ se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

e continua da sinistra se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Esempio la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ ha dominio $[0, +\infty)$ ma non è continua in 0. Non possiamo infatti calcolare $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$ ma possiamo invece calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$$

Quindi $f(x) = \sqrt{x}$ è continua da destra in 0 ed è semplicemente continua nella rimanente parte del dominio, ovvero $(0, +\infty)$

Una funzione è continua in $x_0 \in D$ se e solo se è simultaneamente continua da dx e da sx, ovvero se e solo se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

<u>Discontinuità eliminabili</u> Supponiamo di lavorare con una funzione

$$f : (a,b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$$

ovvero definita nell'intervallo (a,b) con esclusione del punto x_0.

Se accade che

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

allora si parla di discontinuità eliminabile nel senso che basta definire $f(x_0) = L$ per avere una funzione continua

<u>Esempio</u> $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ per $x_0 = 0$

Limite di funzioni composte

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ con $x_0 \in (a,b)$ (con a e/o b ~~[illegible]~~ che possono essere $\pm\infty$). Sia inoltre $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ continua in $y_0 \in (c,d)$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0) \qquad (*)$$

Nel caso in cui $y_0 = c$ oppure $y_0 = d$ allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) \qquad (**)$$

sempre che $\lim_{y \to y_0} g(y)$ esista

<u>Esempio</u> $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(y) = e^{y}$

In questa situazione $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = y_0$ e quindi per la $(*)$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = e^{0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$$

Abbiamo che $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty = y_0$. Quindi

per la (**) $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} e^{y} = 0$

<u>Proprietà</u> Sia $b>0$, $f(x)\to L$ per $x\to a$ (qualunque situazione)

Allora $\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x\to a} f(x)} = b^{L}$

In sostanza quando ho un esponenziale mi basta studiare il limite della funzione all'esponente.

<u>Osservazione!</u> La formula (**) dice essenzialmente che il limite della composta è la composizione dei limiti e rappresenta un <u>cambio di variabile</u> poichè passo da x a y. Altro esempio:

$$\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

Definisco $y = \frac{1}{x} + 1$ e

osservo che per $x \to +\infty$ $y \to 1$

Quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \lim_{y \to 1} \ln y = 0$$