FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI AZZERAMENTO - MATEMATICA
ANNO ACCADEMICO 2010-2011

ESERCIZI DI

TRIGONOMETRIA: DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Esercizio 1: Risolvere la seguente disequazione

$$\sin x > \frac{1}{2}\,.$$

Svolgimento: Trovare le soluzioni della disequazione data significa determinare l'ascissa dei punti della circonferenza goniometrica le cui ordinate sono maggiori di $\frac{1}{2}$.
Gli angoli x tali che $\sin x = \frac{1}{2}$ sono

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{e} \qquad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\,, \;\; k \in \mathbb{Z}\,,$$

essendo la funzione seno periodica di periodo 2π.
Allora la disequazione data è verificata se

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\,, \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Esercizio 2: Risolvere la seguente disequazione

$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 < 0\,.$$

Svolgimento: Ponendo $y = \sin x$ la disequazione data diventa

$$2y^2 + 3y + 1 < 0\,,$$

la cui soluzione è data da

$$-1 < y < -\frac{1}{2}\,.$$

Allora la disequazione data equivale a

$$-1 < \sin x < -\frac{1}{2}\,.$$

Gli angoli x tali che $\sin x = -1$ sono

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\,, \;\; k \in \mathbb{Z}\,,$$

mentre quelli per cui $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ sono

$$x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \qquad \text{e} \qquad x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\,, \;\; k \in \mathbb{Z}\,,$$

essendo la funzione seno periodica di periodo 2π.
Allora la disequazione data è verificata se

$$\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\,, \;\; x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\,, \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Esercizio 3: Risolvere la seguente disequazione

$$\sin x + \cos x < 1\,.$$

Svolgimento: Tale disequazione è lineare in seno e coseno e si può risolvere utilizzando le formule parametriche

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad x \neq \pi + 2k\pi\,, \;\; k \in \mathbb{Z}\,,$$

dove $t = \tan \dfrac{x}{2}$. Per poter usare queste formule bisogna imporre che

$$x \neq \pi + 2k\pi\,, \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ponendo $x = \pi + 2k\pi\,, \;\; k \in \mathbb{Z}$ nella disequazione e tenendo conto del fatto che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π si ha

$$\sin \pi + \cos \pi = 0 + (-1) = -1 < 1\,,$$

quindi $x = \pi + 2k\pi\,, \;\; k \in \mathbb{Z}$, sono soluzioni della disequazione data.
Sostituendo nell'equazione le formule parametriche si ottiene

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} < 1\,.$$

Facendo il minimo comune multiplo si ha

$$\frac{2t + 1 - t^2 - 1 - t^2}{1+t^2} < 0\,,$$

da cui segue

$$\frac{2t - 2t^2}{1+t^2} < 0\,.$$

Essendo $1 + t^2 > 0$, tale disequazione equivale a

$$2t - 2t^2 < 0\,,$$

e quindi a

$$2t\,(t-1) > 0\,,$$

le cui soluzioni sono date da

$$t < 0 \qquad \vee \qquad t > 1\,.$$

Allora si ha

$$\tan\frac{x}{2} < 0 \qquad \vee \qquad \tan\frac{x}{2} > 1\,.$$

La disequazione $\tan\frac{x}{2} < 0$ ha come soluzione

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x}{2} < \pi + k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,,$$

da cui segue

$$\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Infine la disequazione $\tan\frac{x}{2} > 1$, è verificata se

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,,$$

e quindi se

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Tenendo conto del fatto che $x = \pi + 2k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}$, sono soluzioni, allora la disequazione data è verificata se

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Esercizio 4: Risolvere la seguente disequazione

$$\sin^2 x + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)\sin x\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos^2 x > 0\,.$$

Svolgimento: Tale disequazione è omogenea di secondo grado e per risolverla conviene dividere entrambi i membri per $\cos^2 x$: tale passaggio è lecito solo se $\cos x \neq 0$. Se $\cos x = 0$ allora

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Sostituendo tali valori nella disequazione si ha

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)\cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 0$$

$$= 1 > 0\,,$$

quindi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}$, sono soluzioni della disequazione data.

Dividendo entrambi i membri della disequazione per $\cos^2 x > 0$ si ottiene

$$\tan^2 x + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)\tan x - \frac{\sqrt{3}}{3} > 0\,.$$

Ponendo $y = \tan x$ tale disequazione diventa

$$y^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right) y - \frac{\sqrt{3}}{3} > 0\,,$$

le cui soluzioni sono

$$y < -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \vee \qquad y > 1\,.$$

Allora si ha

$$\tan x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \vee \qquad \tan x > 1\,.$$

La disequazione $\tan x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ è verificata se

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi\,, \;\; k \in \mathbb{Z}\,,$$

mentre l'equazione $\tan x > 1$ ha come soluzioni

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Quindi, tenendo conto del fatto che $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}$, sono soluzioni, la disequazione data risulta verificata se

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi\,, \;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Esercizio 5: Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{2\cos x - 1}{\cos x} \leq 1\,.$$

Svolgimento: Facendo il minimo comune multiplo la disequazione data diventa

$$\frac{2\cos x - 1 - \cos x}{\cos x} \leq 0$$

che equivale a

$$\frac{\cos x - 1}{\cos x} \leq 0\,.$$

Poiché

$$\cos x \leq 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

essendo

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

la disequazione data equivale a

$$\cos x > 0\,,$$

che ha come soluzione

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Esercizi: Risolvere le seguenti disequazioni

1. $\sin x > \dfrac{1}{2}$
2. $\tan x\,(\tan x - 1) < 0$
3. $\dfrac{\sin x}{\cos x + 1} \geq 0$
4. $\left|\dfrac{1}{\cos x}\right| < 2$
5. $2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0$
6. $\dfrac{1 + |2\sin x|}{1 + 2\sin x} > 0$
7. $2\cos x - 1 < 0$
8. $-\dfrac{1}{2} < \sin x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
9. $2\cos^2 x + |\cos x| < \sin^2 x - \cos x$
10. $|\tan x| < \sqrt{3}$
11. $2\cos\dfrac{x}{2} + \sin x \geq 0$
12. $\sin x\,(2\cos x - 1) > 0$
13. $\cos^2 x - |\sin x| > 1 + \sin x$
14. $\dfrac{3}{2\cos x} \geq 2\cos x$
15. $\sqrt{3\tan^2 x - 1} < \sqrt{3}\tan x$
16. $\cos x - \sin x > 0$
17. $\dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{\sin 4x} > 0$
18. $\dfrac{2\,|\sin x| - 1}{2\sin x - 1} > 0$
19. $3\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x < 3\sin x - \sqrt{3}\cos x$

20. $\cos 2x - \cos x > 0$

21. $2\sin^2 x - 1 < 0$

22. $\sqrt{2\sin x} < \sin x + 1$

23. $\dfrac{4\cos^2 x - 3}{2\sin x - 1} > 0$

24. $\dfrac{1 - 2\,|\cos x|}{1 + \cos x} > 0$

25. $\cos^2 x \leq \cos x$

26. $|\sin x| \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

27. $2\cos x - \sqrt{2} < 0$

28. $\dfrac{\sqrt{3}\tan x - 1}{2\sin x - \sqrt{3}} < 0$

29. $\left|\dfrac{1}{\sin x}\right| > 3$

30. $\sin 2x + \cos 2x < 1$

31. $\sin^2 x < \dfrac{1}{2}$

32. $\dfrac{2\,|\sin x| + \sqrt{3}}{\cos x} > 0$

33. $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x < 0$

34. $\dfrac{\sin^2 x - 2}{\cos x} < 0$

35. $\cos x - 2\sqrt{3}\,\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} > 0$

36. $(2\sin x - 1)\sin x > 0$

37. $|2\cos x| > \sqrt{3}$

38. $\dfrac{\sqrt{2}\sin^2 x}{\cos x} > \tan^2 x$

39. $\sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin x > 0$

40. $|\sin x - \cos x| < 1$

41. $0 < \cot x \leq \dfrac{1}{2}$

42. $\sin 2x - \cos x + 1 > 2\sin x$

43. $\dfrac{1 - 2|\cos x|}{2\cos x + 1} > 0$

44. $\left|\sqrt{3}\tan^2 x - 2\tan x\right| < \sqrt{3}$

45. $\dfrac{\cos 5x + \cos 3x}{\cos 4x} \leq 0$

46. $\tan^2 \dfrac{x}{2} + \cos x < 1$

47. $2\cos x > \sqrt{3}$

48. $\sqrt{2\sin^2 x - 1} - \cos x < \sin x$

49. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}|\tan x| < 1$

50. $2\cos^2 x - \cos x < 0$

51. $\dfrac{\sin x + \sqrt{3}}{\sin x} \geq 3$

52. $\cos 2x < \sin x$

53. $\tan^2 x - 3 > 0$

54. $\left|\dfrac{\sin x}{\cos x + 1}\right| \geq 1$

55. $2\sqrt{2 + \cos x} > 1 + 2\cos x$

56. $\dfrac{4\cos^2 x - 1}{\cos x} < 0$

57. $2\sin x < \sqrt{3}$

58. $\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

59. $2\left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right| - 1 < 0$

60. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 > 0$

61. $\frac{2\sin x - 1}{\sin x} < 1$

62. $2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 > 0$

63. $\frac{2\sin x + \sqrt{3}}{|\cos x|} \leq 0$

64. $\sqrt{2\cos^2 x - 1} > \sin x - \cos x$

65. $\tan x \leq \sqrt{3}$

66. $\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\sin x} < 0$

67. $\sin^2 x - 3\cos^2 x > 0$

68. $\sqrt{2|\cos x|} - 1 < 0$

69. $\cos x < \cos \frac{x}{2}$

70. $|\sin x| - 1 > 0$

71. $\frac{3\tan x + \sqrt{3}}{\cot x + \sqrt{3}}(2\sin x - 1) < 0$

72. $\sin 2x - \cos x < 0$

73. $\frac{2\cos x - 3}{\sin x} \geq 0$

74. $2\cos^2 x \leq 1$

75. $\frac{1 - 3\cot^2 x}{2\cos x - 1} < 0$

76. $\left|\frac{\sin x - 1}{\cos x}\right| < 1$

77. $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos x + 1 > 0$

78. $\sqrt{4\sin^2 x - 3} > 1 + 2\sin x$

79. $\sin 2x < \cos x$

80. $1 - \dfrac{1}{\tan x} < 0$

81. $|\sin x| > \dfrac{1}{2}$

82. $\dfrac{\tan^2 x - 3}{\sin x} < 0$

83. $\left(\sqrt{3} - 2\sin x\right)(2\sin x - 1) < 0$

84. $3\tan^2 x > 1$

85. $(1 + 2\sin x)\cos x > 0$

86. $\left|2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x\right| > 3$

87. $\dfrac{\cos 7x - \cos 3x}{\sin x \cos x} > 0$

88. $2\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x \leq 1$

89. $|\cos x| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

90. $\dfrac{4\sin^2 x - 1}{2\cos x} \geq 0$

91. $\cos 2x > \cos x - 1$

92. $0 < \sin x < 1$

93. $\left|\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x - 1}\right| \leq 1$

94. $\cos^2 x \geq \dfrac{3}{4}$

95. $\sqrt{2}\cos x \sin x - \sin x > 0$

96. $\sin x + \cos x < 1$

97. $\sqrt{2\cos^2 x - 1} > \sqrt{2}\cos x$

98. $2\sqrt{3}\,\cos^2 x - \sin 2x < \sqrt{3}$

99. $(2\cos x - 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) > 0$

100. $\dfrac{|2\sin x + 1|}{1 - \sin x} \geq 0\,.$

Esercizio 6: Risolvere la seguente equazione

$$|\sin x| - |\cos x| = 0\,.$$

Svolgimento: Innanzitutto studiamo il segno degli argomenti dei due moduli:

$$\sin x \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{se} \quad 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \\ < 0 & \text{se} \quad \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e

$$\cos x \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{se} \quad 2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \\ < 0 & \text{se} \quad \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Si presentano quattro diversi casi.

- Caso 1: $2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$

  L'equazione data è equivalente a
  $$\sin x - \cos x = 0\,.$$
  Poiché $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, l'equazione si può riscrivere come
  $$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$
  le cui soluzioni sono
  $$x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$
  e quindi
  $$x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$
  Di queste soluzioni le uniche che verificano la condizione $2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\,,$ sono date da
  $$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Caso 2: $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,.$

  L'equazione data è equivalente a
  $$\sin x - (-\cos x) = 0\,,$$
  e quindi a
  $$\sin x + \cos x = 0\,.$$
  Poiché $\sin x = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$, l'equazione si può riscrivere come
  $$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x\,,$$
  che risulta verificata se
  $$x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \quad \vee \quad x = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,,$$
  e quindi se
  $$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$
  Di queste soluzioni le uniche che verificano la condizione $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono date da
  $$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Caso 3: $\pi + 2k\pi < x \leq \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,.$

  L'equazione data si può riscrivere come
  $$-\sin x - (-\cos x) = 0\,.$$
  che equivale a
  $$\sin x - \cos x = 0\,.$$
  Tale equazione è stata già risolta nel Caso 1. Le soluzioni trovate sono
  $$x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,,$$
  e di queste soluzioni le uniche che verificano la condizione $\pi + 2k\pi < x \leq \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono date da
  $$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

- Caso 4: $\dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi\,,\;\; k \in \mathbb{Z}\,.$

  L'equazione data si può riscrivere come
  $$-\sin x - \cos x = 0\,,$$
  e quindi come
  $$\sin x + \cos x = 0\,,$$

che è l'equazione studiata nel Caso 2. Le soluzioni trovate sono

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

e di queste soluzioni le uniche che verificano la condizione $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi\,,$ $k \in \mathbb{Z}$, sono date da

$$x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

In conclusione l'equazione data ha come soluzioni

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{3}{4}\pi + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Esercizi: Risolvere le seguenti equazioni

1. $|1 - 2\sin x| = \sin x + 1$
2. $\cos x = \dfrac{4\sin x + 1}{|\cos x|}$
3. $\left|2\sqrt{3}\,\sin x - 3\right| = 2\left(\sqrt{3}\,\sin x - \cos x\right) + 1$
4. $|1 + 2\cos x| = \cos x + 1$
5. $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{\cos x} = 2\left(\sqrt{3} + 1\right)\tan x + \dfrac{1}{|\cos x|}$
6. $|\sin x - 2\cos x| = |\sin x - 2|$
7. $\sin^2 x - |\cos x| = 1 + \cos x$
8. $|\sin x| + |\cos x| = 0$
9. $\cos x \cdot |\tan x + 1| - 2\sin x = 0$
10. $\left|\cos^2 x - \sin^2 x\right| = \sin x - \cos x\,.$

Esercizi: Risolvere i seguenti sistemi

1. $\begin{cases} \cos x \geq 1 \\ \\ 1 - 2\cos x > 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{\sin x + 1}{\cos x} \geq 0 \\ \\ \sin x < 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \tan x \geq 0 \\ \\ \tan x - 1 \leq 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sqrt{3}\,|\cos x| - \sin x < 0 \\ \\ \sin x > 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \cos x - \sin x > 1 \\ \\ \cos x < 2\,. \end{cases}$

Esercizi: Determinare il dominio delle seguenti funzioni

1. $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$

2. $y = \sqrt[3]{\dfrac{\sin x + \cos x}{|\sin x| - 2}}$

3. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}\,|\cos x| - \sin x}$

4. $y = \sqrt{1 - 2\sin x}$

5. $y = \dfrac{1}{2\sin^2 x - 1}$

6. $y = \dfrac{2}{\cos x} + \sqrt{\sin x}$

7. $y = \sqrt{2\,|\sin x| - \sqrt{3}}$

8. $y = \dfrac{1}{2\cos^2 x - \cos x}$

9. $y = \sqrt{\dfrac{\cos x + 2}{\sin^2 x}}$

10. $y = \dfrac{\sqrt{\tan^2 x + 2}}{\tan x - 1}$

11. $y = \dfrac{x}{|\sin x| - |\cos x|}$

12. $y = \dfrac{1 - 2x}{\cos^4 x - \cos^2 x}$

13. $y = \sqrt{\dfrac{\sin x}{\cos x + 1}}$

14. $y = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$

15. $y = \sqrt[3]{\dfrac{2}{1 - \sin^2 x}}$

16. $y = \dfrac{1 - x}{\tan^2 x + \tan x}$

17. $y = \sqrt{\dfrac{|\sin x + \cos x| + 1}{\cos x - \cos^2 x}}$

18. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\cos x}} + \sqrt{\cos x}$

19. $y = \dfrac{1}{\sin x - \cos x + 1}$

20. $y = \sqrt{\dfrac{|\sin x| + 1}{\cos x}}\,.$