# FUNZIONI - CARATTERISTICHE IMPORTANTI

## Monotonia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- monotona crescente (strettamente)

  se $x < y \in D \Rightarrow f(x) \leq (<) f(y)$

- monotona decrescente (strettamente)

  se $x < y \in D \Rightarrow f(x) \geq (>) f(y)$

Esempi – $f(x) = \ln x$ è monotona crescente in $D = (0, +\infty)$

– $f(x) = \log_{1/2} x$ è monotona decrescente in $D = (0, +\infty)$

– $f(x) = 1/x$ è monotona decrescente in $D = (0, +\infty)$

– $f(x) = \sqrt{x}$ è monotona crescente in $[0, +\infty)$

Limitatezza $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

è inferiormente (superiormente)

limitata se $\exists L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \geq (\leq) L \quad \forall x \in D$$

Esempi - $f(x) = \sqrt{x}$ è inferiormente

limitata in quanto $\sqrt{x} \geq 0$

$\forall x \in [0, +\infty)$

- $f(x) = e^{-x^2}$ è inferiormente

e superiormente limitata in quanto

$$0 < f(x) \leq 1$$

- $f(x) = \frac{1}{x}$ su $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

non è limitata né superiormente

né inferiormente in quanto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

**Simmetrie** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è

- pari se $f(x) = f(-x)$
  $\to$ simmetria rispetto all'asse $y$
- dispari se $f(x) = -f(-x)$
  $\to$ simmetria rispetto all'origine

Le definizioni si possono estendere al caso di $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ purché $D$ sia simmetrico rispetto all'origine.

Esempi $x^2$, $|x|$, $\cos x$, $\dfrac{x^4+1}{x^2-1}$ sono funzioni pari. $x$, $x^3$, $\operatorname{sen} x$, $\tan x$ sono funzioni dispari.

**Periodicità** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica se $\exists\, T \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x+T) = f(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Esempi $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$

# Massimi e minimi

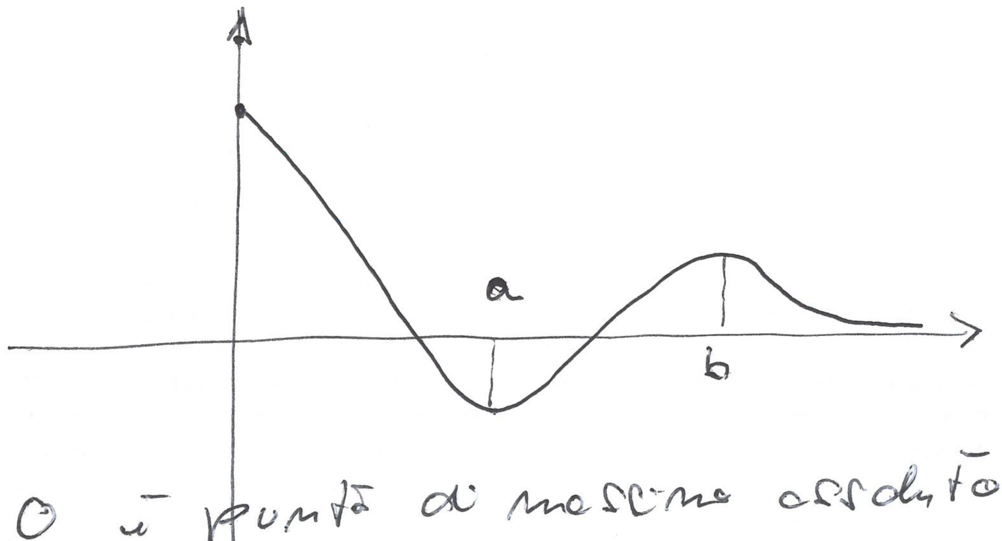
$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $x_0 \in D$ è punto di massimo (minimo) assoluto se

$$f(x_0) \geq (\leq) f(x) \quad \forall x \in D$$

$x_0 \in D$ è punto di massimo (minimo) relativo se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$ e inoltre

$$f(x_0) \geq (\leq) f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

Esempio grafico $\quad f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$




$x_0 = 0$ è punto di massimo assoluto.
$x_0 = a$ è punto di minimo sia assoluto che relativo. $x_0 = b$ è punto di max relativo