CALCOLO DIFFERENZIALE

Definizione $f : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ se $\exists$ finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tale limite si definisce derivata di f in x_0 e la si indica con

$$f'(x_0) \quad \text{oppure} \quad \frac{df}{dx}(x_0)$$

Se f è derivabile in ogni punto di (a,b) allora possiamo definire la funzione derivata come $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f' : x \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

in cui abbiamo usato la relazione

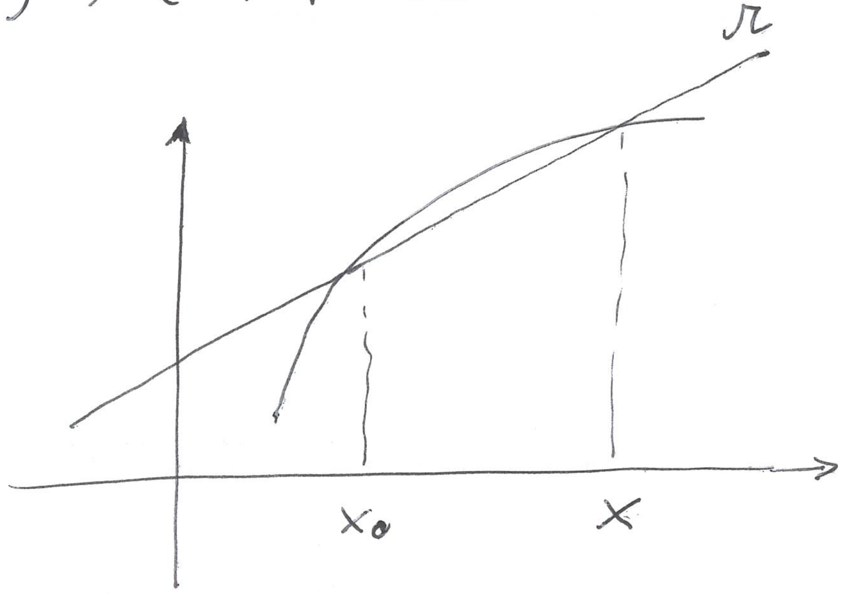
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

che proviene dalla sostituzione

$$h = x - x_0$$

Poiché $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ rappresenta

il coefficiente angolare della retta r secante la funzione f nei p.ti $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$



abbiamo che per $x \to x_0$ il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tende al coefficiente angolare della tangente ad f in x_0. Quindi se la derivata di f in x_0 esiste allora essa corrisponde al coefficiente angolare della tangente in quel punto.

Osservazione f derivabile in x_0 $\Longrightarrow$ f continua in x_0

Infatti poiché

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$$

avremo

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \to 0$$

cioè

$$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \to 0$$

Essendo $x-x_0 \to 0$, il limite qui sopra vale solo se

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \to 0$$

ovvero solo se

$$f(x)-f(x_0) \to 0$$

che rappresenta la condizione di continuità in x_0

Il viceversa in generale non vale come dimostrato dalla funzione

$f(x) = |x|$ che è continua in $\mathbb{R}$ ma non derivabile in 0 in quanto in 0 non posso definire la tangente

<u>Regole di derivazione</u> $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in x_0. Allora le funzioni $f+g$, cf $(c \in \mathbb{R})$, fg e f/g (se $g(x_0) \neq 0$) sono derivabili in x_0 e si ha

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(cf)'(x_0) = c\, f'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Conseguenza

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

Derivata di x^n, $n = 0, 1 \dots$

- per $n = 0$ $\quad f(x) = x^0 = 1$

$$\Rightarrow f'(x) = 0$$

- per $n = 1$ $\quad f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

- per $n = 2$ $\quad f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

- per n qualunque devo calcolare

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \dots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h + \dots + \binom{n}{n} x^0 h^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \dots + \binom{n}{n} h^{n-1}$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} = n\, x^{n-1}$$

$\binom{n}{k}$ sono i coefficienti binomiali

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

$$n! = n(n-1)\dots 2\cdot 1$$

con la convenzione $0! = 1$.

Dalle formule vedo immediatamente che $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$

La derivata di un generico polinomio

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

è dunque

$$P_n'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

Derivata delle funzioni trigonometriche

- $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} x \boxed{\frac{(\cos h - 1)}{h}} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\to 1} \cos x$$

$$\boxed{\frac{\cos h - 1}{h}} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)}$$

$$= -\underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2 h}{h^2}}_{\to 1} \frac{h}{\cos h + 1} \to 0$$

Quindi $f'(x) = \cos x$

- $f(x) = \cos x$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\downarrow \, 0} - \operatorname{sen} x \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\downarrow \, 1} = -\operatorname{sen} x$$

- $f(x) = \tan x$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x\right) \cdot \cos x - \left(\frac{d}{dx}\cos x\right) \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Derivata di esponenziale e logaritmo

- $f(x) = a^x \,, \quad a > 0$

$$\frac{d}{dx} a^x = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x \boxed{(a^h - 1)}}{\boxed{h}} = a^x \ln a$$

$\to \ln a$
(limite notevole)

Quindi $\boxed{\dfrac{d}{dx} e^x = e^x}$

- $f(x) = \log_a x$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a \left[x \left(1 + \frac{h}{x}\right)\right] - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

$\to \log_a e$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)}}{\boxed{\frac{h}{x}} \cdot \boxed{x}} = \frac{1}{x} \log_a e$$

Quindi

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}$$

Derivata delle funzioni composte

f e g due funzioni tali che f è derivabile in x_0, g è derivabile in $f(x_0)$. Allora

$$(g \circ f)'(x_0) = \frac{d}{dx} g(f(x_0))$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Esempio $\quad h(x) = e^{-x^2}$

$h = g \circ f$ dove

$$f(x) = -x^2$$

$$g(y) = e^y$$

Sappiamo che $f'(x) = -2x$ e inoltre $g'(y) = e^y$. Quindi

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x) = e^{-x^2}(-2x)$$